

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 20 Août 1955 Skikda
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil



MEMOIRE

Pour l'obtention du

DIPLOME DE MAGISTER

Spécialité : GENIE CIVIL

Option : Géotechnique

Par

M^{elle} : RAHAL SOUAD

Thème

**Introduction de la ductilité dans la modélisation
numérique de la rupture interfaciale**

Soutenue le Juin 2012

Devant le jury composé de :

Dr. Hamoudi BOUZERD	(MCA. Université 20 Août 1955 Skikda)	Président
Dr. Mohamed GUENFOUD	(Pr. Université 8 Mai 1945 Guelma)	Rapporteur
Dr. Mohamed Laid SAMAI	(Pr. Université Mentouri Constantine)	Examineur
Dr. Salah .MESSASSAT	(MCA. Université 20 Août 1955 Skikda)	Examineur

Remerciements

Je remercie vivement mon directeur de mémoire Pr Guenfoud Mohamed pour son très grande qualité scientifique et humaine. Son encadrement a été très efficace et constructif, tout en laissant beaucoup de place pour mes initiatives personnelles. Il m'a poussé à être exigeante.

Je remercie également Dr Bouzerd Hamoudi, qui m'a suivi de près avec beaucoup de bienveillance, et s'est rendu disponible à mes sollicitations. Son action a été très importante, notamment pour le démarrage et le suivi du mémoire. Je le remercie également pour la confiance qu'il m'a témoignée et la motivation qu'il m'a transmise, tout au long de la réalisation de ce travail.

Un remerciement très spécial à mon père, ma mère, mon frère Abdallah et mes petites perles de soeurs, qui sont tous formidables. Merci à toute ma famille.

Je remercie vivement mes collègues de travail du service équipement de la DAS (Direction de l'action sociale) qui m'ont beaucoup aidé durant ma formation post-graduée, et à tous mes amis. Un grand merci à tous les membres du département Génie civil.

Table des matières

RESUME

INTRODUCTION

2

Chapitre 1 – Analyse du comportement élastoplastique

Introduction	6
1.1. Les grandes familles des non-linéarités	6
1.2. Le comportement plastique	7
1.2.1. Les critères de plasticité	8
1.2.1.1. Critères ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique	10
a) Critère de Von Mises	10
b) Critère de Tresca	10
c) Comparaison des critères de Tresca et Von Mises	10
1.2.1.2. Critères faisant intervenir la pression hydrostatique	13
a) Critère de Drucker-Prager	13
b) Critère de Mohr-Coulomb	13
c) Critère de Rankine	14
d) Critère de Hoek et Brown	14
1.2.1.3. Critères anisotropes	15
1.2.2. Formulation des lois de comportement élastoplastique	16
1.2.2.1. Un seuil de plasticité	17
1.2.2.2. Une loi d'écoulement	17
a) Directions d'écoulement associées aux critères courants	18
b) Matériaux élastiques parfaitement plastiques	20
1.2.2.3. Une loi d'écrouissage	23
1.3. Formulation de la matrice de rigidité tangente	26
1.4. Les techniques de résolution des problèmes non linéaire	27
1.4.1. Résolution structurale: méthode de Newton-Raphson	28
1.4.2. Résolution locale: intégration de l'écoulement	29

1.4.2.1. La méthode explicite d'Euler	30
1.4.2.2. La méthode implicite d'Euler	32
<i>Chapitre 2 –Notion sur la mécanique de rupture non linéaire</i>	
2.1. Introductions	34
2.2. Les modes de la rupture	35
2.3. L'étude d'un milieu élastoplastique fissurée	35
2.3.1. Détermination de la zone plastique	36
2.3.2. Modèle d'Irwin	37
2.3.3. Crack Tip Opening Displacement (CTOD)	38
2.4. Facteur d'intensité de contrainte	39
2.4.1. Solution de Muskhelishvili	39
2.4.2. Solution asymptotique de Westergaard	39
2.5. Le taux de restitution d'énergie	40
2.5.1. Taux de restitution d'énergie non linéaire	41
2.6. Calcul du taux de restitution d'énergie par éléments finis	42
2.6.1. Méthode de l'intégrale J	42
2.6.2. Méthode d'avancée réelle de fissure (RCET)	44
2.6.3. Méthode de fermeture virtuelle de fissure (VCCT)	44
2.6.4. Méthode d'avancée virtuelle de fissure (VCET)	45
2.7. Le comportement des massifs rocheux à la rupture	47
2.7.1. Caractéristiques et représentations géométriques des discontinuités des massifs rocheux	47
2.7.1.1. Différents type de discontinuités	47
2.7.1.2. Propriétés des discontinuités	48
2.7.2. Comportement plastique des sols	48
2.7.3. Lois de comportement des roches	50

Chapitre 3 – modélisation numérique par la méthode des éléments finis

3.1 Introduction	54
3.2. Le principe variationnel en élastoplastique	55
3.3. Structure générale du modèle (calcul élastoplastique)	57
3.3.1. Calcul élastique	57
3.3.2 Calcul plastique	57
3.3.2.1. La frontière élastique initiale	57
3.3.2.2. La frontière élastique actuelle	60
3.3.3. L'évaluation du taux de restitution d'énergie	61
3.4. Critère d'arrêt	62
3.5. L'algorithme élastoplastique avec écrouissage isotrope	64
3.6. Conclusion	65

Chapitre 4 – Validation du modèle choisi

4.1. Exemple d'application	67
4.2. Commentaires des résultats	70
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	77
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	

NOTATION

E	Module d'Young
E_T	Module tangent (élastoplastique)
H	Module d'écrouissage
K_I	Facteur d'intensité de contrainte en mode I
K_{II}	Facteur d'intensité de contrainte en mode II
K_{III}	Facteur d'intensité de contrainte en mode III
μ	Module de cisaillement
ν	Coefficient de poisson
σ_{ij}	Composantes des contraintes
s_{ij}	Composantes des contraintes déviatorique
J_i	Invariants du déviateur de contraintes
τ_{ij}	Contraintes de cisaillement
ε_{ij}	Composantes des déformations totales
ε_{ij}^e	Composantes des déformations élastiques
ε_{ij}^p	Composantes des déformations plastiques
σ_y	La limite d'élasticité
$f(\sigma, a)$	La fonction de charge
df	L'incrément du critère de plasticité
$\Delta\sigma$	L'incrément des contraintes
$\Delta\varepsilon$	L'incrément des déformations
$[C]$	La matrice du comportement élastoplastique
$[K]$	La matrice de rigidité tangente
a_k	Les variables d'écrouissage
n	La direction d'écoulement
$d\lambda_p$	Le multiplicateur plastique de Lagrange
Ge	Taux de restitution d'énergie élastique
Gp	Taux de restitution d'énergie élastoplastique
J	Intégrale- J ou taux de restitution d'énergie non linéaire
δ	L'ouverture de la fissure
r_p	La zone plastique
Π	L'énergie potentielle totale

RESUME

Ce mémoire, a pour objet la modélisation numérique de la rupture interfaciale des matériaux ductiles présente un comportement élastoplastique parfait, en tenant compte de la ductilité causé par l'augmentation des contraintes à la pointe de fissure. Pour cela, nous avons utilisé un élément fini mixte RMQ-7 qui est développé par le docteur H. Bouzerd, et utilisé jusqu'à maintenant à la rupture interfaciale dans l'étude des cas où le matériau présente un comportement linéaire fragile.

Nous avons utilisé la technique numérique d'intégration de l'écoulement pour l'analyse non linéaire (la relation contrainte-déformation), et nous déterminons le taux de restitution d'énergie par la méthode d'extension virtuelle de fissure pour évaluer l'état de la fissuration interfaciale.

Nous supposons le matériau homogène, isotrope et la fissure étant débouchante.

MOTS CLES

Rupture ductile – Comportement élastoplastique – Méthode d'intégration numérique – Élément fini mixte – Taux de restitution d'énergie.

ABSTRACT

This work, the object as the numerical modelling of the interfacial fracture of ductile materials with perfect elastoplastic behaviour, by taking account of ductility caused by the increase in the stress with the tip of crack. For that, we used a finite element mixed RMQ-7 which is developed by Doctor H. Bouzerd, and is used until now with the interfacial fracture in the study of the cases where the material present a fragile linear behaviour.

We used the numerical technique of integration of the flow for the nonlinear analysis (the relation stress-strain), and we determine the energy release rate by the method of virtual extension of crack to evaluate the state of interfacial cracking.

We suppose homogeneous, isotropic material and the crack being crossing,

KEYWORDS

Ductile rupture - perfectly plastic elastic Behaviour - Method of integration numerical - mixed Finite element – Energy release rate.

الخلاصة

هذا العمل من أجل الدراسة الرقمية لانكسار واجهة بين مادتين لدنتين ذات سلوك مرن- لدن تام.

نأخذ بعين الاعتبار اللدونة الناتجة عن زيادة الإجهادات في رأس التشقق ، من أجل هذا استعملنا عنصر متناهي مختلط 7-RMQ الذي طور من طرف الدكتور حمودي بوزرد والذي أستعمل لحد الآن لدراسة انكسار واجهة بين مادتين ذات سلوك خطي هش (مرن) .

استعملنا الطريقة الرقمية تكامل السيلان من أجل تحليل غير خطي (العلاقة إجهادات-تشوهات) وقمنا بتحديد معامل استعادة الطاقة بواسطة طريقة التوسع الافتراضي للتشقق من أجل تقييم حالة التشققات لواجهة بين مادتين .

نفترض المادة متجانسة، متساوية المناحي والتشقق ينتهي للخارج.

المفاتيح

لانكسار اللدن – السلوك المرن-اللدن – طريقة التكامل الرقمي –
العناصر المتناهيّة المختلطة – معامل استعادة الطاقة

Introduction

INTRODUCTION

Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture a connu un grand succès scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre en compte le comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés à cette période ; on peut citer par exemple Rice en 1968) et Bui en 1973 qui ont introduit la notion des intégrales indépendantes du contour telles que *l'intégrale J*, dont les propriétés ont permis de caractériser la ténacité d'un matériau lorsque la plasticité n'est plus confinée à la pointe de fissure. C'est également à cette période que les premiers travaux concernant la mécanique de la rupture dans les matériaux multicouches sont réalisés (Sih en 1964, Erdogan en 1965 et Comninou en 1977).

Les premiers travaux traitant la théorie de la plasticité se rapportent aux années soixante dix du XIX ème siècle et sont liés aux noms de Saint –Venant et M.Levy .La théorie de plasticité représente une extension nécessaire de la théorie de l'élasticité et est concernée par les analyses des contraintes et des déformations dans la structure (des déformations irréversibles ou plastiques).

Au début du vingtième siècle, un critère de résistance ou de plasticité a été proposé par Von Mises (1913) en plus de celui de Tresca (1864) et qui sont employés encore de nos jours. Le critère de plasticité est une relation $f(\sigma, a) = 0$ entre les composantes du tenseur des contraintes σ_{ij} agissant sur un élément de matériau d'un ou plusieurs paramètres a définissant l'état actuel de cet élément (écrouissage).

L'application de la plasticité doit s'occuper de deux aspects d'importance égale :

- 1) La technique générale utilisée dans le développement des relations contrainte déformation pour les matériaux élastoplastiques avec travail d'écrouissage.
- 2) La procédure de solution numérique générale pour résoudre le problème structural élastoplastique sous l'action des charges ou des déplacements, chacun desquels varie de manière spécifiée.

Deux points sont donc encore à considérer dans la modélisation des problèmes de fissure: la naissance d'une fissure et ensuite sa propagation. La naissance de la fissure repose sur la vérification d'un critère de rupture.

Le second aspect est la modélisation de la propagation de la fissure dans la structure. Une fois l'existence d'une fissure détectée par le critère de rupture, nous devons nous assurer que sa propagation est conforme aux observations expérimentales.

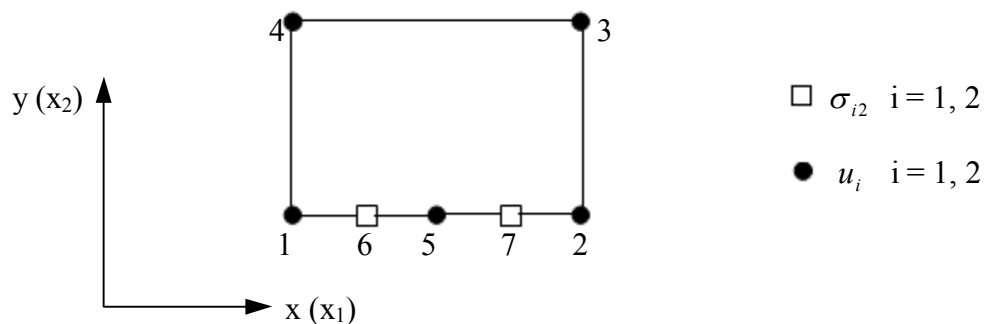
Différentes techniques sont utilisées pour modéliser cette propagation. Nous nous intéressons aux méthodes utilisant les éléments finis.

Dans cette présente étude, on va s'intéresser au comportement non linéaire des matériaux incluant le non linéarité matérielle. On modélisée un comportement élastique parfaitement plastique avec des applications en mécanique de la rupture. Nous avons utilisé la technique numérique d'intégration de l'écoulement pour l'implémentation de la relation non linéaire contrainte-déformation (nécessite une analyse incrémentale des contraintes et des déformations).

Notre analyse reposera sur la Méthode des Eléments Finis mixte, avec des éléments spéciaux (RMQ-7) en utilisant des procédures numériques élaborées d'analyse non linéaire. L'objectif étant d'évaluer les paramètres caractérisant la propagation de fissure du matériau ductile par la méthode d'extension virtuelle de fissure.

Dans un second lieu, on passera à la partie pratique qui est la mise en œuvre informatique (Code de calcul CASMIC utilisant le langage FORTRAN). On examiner les réponses du matériau ductile en contraintes planes. Des exemples numériques seront traités pour valider le modèle proposé en déterminant:

- Les contraintes et des déformations plastiques.
- La matrice du comportement élastoplastique $[C]$.
- Le taux de restitution d'énergie élastique et part la suite le taux de restitution d'énergie élastoplastique.



Elément fini mixte RMQ-7

Outre l'introduction et la conclusion, le présent mémoire comporte quatre chapitres :

- Le premier chapitre est orienté vers l'analyse élastoplastique où on a présenté les notions fondamentales de la théorie de l'élastoplasticité et la formulation de la matrice de rigidité tangente. nous avons présenté aussi les différentes techniques de résolution des problèmes élastoplastiques qui sont nécessitent une analyse incrémentale.
- Le deuxième chapitre est consacré à l'étude théorique de la rupture non linéaire dans le cadre des matériaux ductiles et une représentation des expressions des contraintes et des déplacements au voisinage de l'extrémité de la fissure sous diverses formes ainsi que l'approche énergétique de Griffith. nous avons focalisé sur l'implémentation numérique de la rupture dans le modèle éléments finis (la détermination du taux de restitution d'énergie).
- Le troisième chapitre traite de la technique numérique utilisée pour l'analyse du comportement élastoplastique avec écrouissage isotrope dans cette étude, ainsi que la modélisation des matériaux fissurés par éléments finis mixtes pour évaluer le taux de restitution d'énergie G .
- Le quatrième chapitre comporte une analyse sur la simulation élastoplastique parfaite sur une plaque pré entaillée sollicitée en traction avec un commentaire sur les résultats obtenus.
- Une conclusion générale ponctue le présent travail avec un regard critique sur les réponses aux éléments de la problématique posés dans l'introduction ainsi que les perspectives éventuelles qu'ouvre cette contribution.

CHAPITRE I

Analyse du comportement élastoplastique

Introduction

Un grand nombre de problèmes rencontrés actuellement dans l'industrie peuvent nécessiter la prise en compte des non linéarités aussi bien géométrique que matérielle.

La première utilisation de la théorie élastoplastique était pour décrire le comportement des matériaux, dont la présentation fait l'objet de ce chapitre, a été initialement élaboré à partir de constatations expérimentales relatives au comportement bidimensionnel tridimensionnel des métaux.

Actuellement, les domaines d'application de cette modélisation sont devenus plus larges et débordent ce cadre. On résout actuellement, par les méthodes analytiques ou numériques, des problèmes d'élastoplasticité en calcul des structures (structures réticulées, structures à barres fléchies, les structures plaques et coques, les structures complexes,...). Depuis les années 80, la théorie de plasticité est aussi utilisée à la modélisation et à l'analyse des structures en béton, en béton armé et dans les ouvrages de géotechnique.

On se propose, dans la suite, d'exposer le modèle de comportement élastoplastique classique, construit en se plaçant dans l'hypothèse de la petite transformation (**non linéarité matérielle**). Ce modèle, dont la présentation est maintenant bien acquise, demeure le schéma plastique le plus fréquemment utilisé dans les applications courantes et numériques; il convient toutefois de signaler que des travaux de recherche effectués au cours des trois dernières décennies ont abouti à la mise sur pied, de la théorie de l'élastoplasticité (Lee en 1969; Mandel 1971, 1973 ; Brun en 1992).

Le modèle de comportement élastoplastique classique (le modèle qui couple la théorie de l'élasticité avec celui de la plasticité) laisse de côté, en ce qui concerne la plasticité (deux phénomènes de vieillissement et de viscosité du matériau utilisé).

1.1. Les grandes familles des non-linéarités

Trois grandes familles des non-linéarités que l'on rencontre usuellement en mécanique et en dynamique sont:

► Les non-linéarités géométriques.

Elles apparaissent dans des structures ou des mécanismes soumis à des mouvements de grande amplitude. Leur fondement physique ainsi que leur principales manifestations seront rappelés à la fois dans le cas de mécanismes composés de solides rigides et pour des structures minces déformables. Les principaux effets des non-linéarités géométriques : la distorsion harmonique des oscillations, la dépendance des fréquences d'oscillations libre en fonction de

l'amplitude, des réponses quasi-périodiques et chaotiques avec sensibilité aux conditions initiales.

► **Les non-linéarités de contact.**

Dans cette deuxième famille, on classe toutes les non-linéarités liées au contact entre solides.

► **Les non-linéarités matérielles.**

Elles proviennent d'une relation de comportement non-linéaire des matériaux : la relation entre les contraintes et les déformations dans le matériau est non-linéaire. Trois exemples seront présentés:

- Le comportement *élastique parfaitement plastique* qui exprime le fait que le matériau est incapable de supporter une contrainte plus importante que celle qui correspond à l'écoulement plastique, σ_y (yield stress). Le module élastoplastique est nul, il sera dépendant de la déformation dans le cas général.

- Le comportement *élastoplastique linéaire* qui est au contraire caractéristique de matériaux capables de se durcir (notion d'écrouissage) avec la déformation plastique; la pente de la courbe déformation-contrainte pour des contraintes supérieures à s'appelle le module élastoplastique est constant, $E_T = d\sigma/d\varepsilon$.

- Le comportement *élastoplastique non-linéaire*, le module élastoplastique, $E_T = \int (d\sigma/d\varepsilon)$

1.2. Le comportement plastique (Théorie de la plasticité) :

En plus, dans les années récentes, les méthodes de plasticité ont aussi été étendues et appliquées à l'étude de l'environnement déformationnel des matériaux géologiques ; tels que roches, sols et béton. L'extension de la théorie de plasticité aux matériaux non métalliques est probablement le sujet de recherche le plus actif dans le domaine de mécanique des matériaux qui ont été développés.

La première tâche de la théorie de plasticité est d'établir les relations entre contrainte et déformation plastique observée, Ceci est une tâche difficile.

La seconde tâche de la théorie est de développer les techniques numériques pour l'implémentation de ces relations contrainte-déformation dans l'analyse des structures. A cause de la nature non linéaire des règles des déformations plastiques ; résoudre les équations de base de mécanique du solide inévitablement, présente des difficultés considérables.

Cependant dans les années récentes, le développement d'ordinateurs à grande capacité et les techniques modernes d'analyse par éléments finis a muni l'ingénieur d'un outil puissant pour la résolution en fait virtuellement de n'importe quel problème structural non linéaire.

1.2.1. Les critères de plasticité

Lorsqu'un élément de matière est soumis à des sollicitations multiaxiales caractérisées par le champ de contraintes σ , l'expérience montre qu'il existe un domaine d'élasticité initial qui est l'homologue du segment $[-\sigma_y, \sigma_y]$ de l'essai uniaxial. C'est pourquoi la théorie générale de la plasticité fait intervenir la notion de surface de charge plastique. Elle suppose l'existence d'un scalaire $f(\sigma, a)$ tel que :

- $f(\sigma, a) < 0$ correspond au domaine élastique,
- $f(\sigma, a) = 0$ correspond à l'apparition des déformations plastiques, 1.1
- $f(\sigma, a) > 0$ correspond au domaine inaccessible par le matériau.

Les paramètres a , appelés *paramètres internes*, mesurent l'ensemble des phénomènes irréversibles (écrouissage isotrope, effet Bauschinger,...). Ce sont ces paramètres qui servent à enregistrer l'histoire de la déformation. La fonction $f(\sigma, a)$ est appelée *fonction de charge* ou *fonction seuil*. Cette fonction est *convexe* dans l'espace des contraintes pour des matériaux stables au sens de Drucker. La convexité de la fonction de charge assure l'unicité d'un incrément de déformation plastique pour un état de contraintes donné.

De nombreux travaux ont eu pour objet d'essayer de trouver les critères de plasticité les mieux adaptés aux résultats expérimentaux observés. Parmi les critères les plus classiquement employés, on peut distinguer les critères isotropes et anisotropes.

Dans l'hypothèse d'une isotropie physique, le régime plastique est obtenu pour des états de contraintes indépendants de l'orientation du repère dans lequel sont appliquées les contraintes par rapport à un repère matériel donné. Il est donc naturel que la dépendance de la fonction seuil vis-à-vis des contraintes se traduise soit par l'intermédiaire des contraintes principales, soit par celui des invariants de contraintes.

$$f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, a) \quad \text{et} \quad f = f(I_1, I_2, I_3, a) \quad 1.2$$

$$\begin{cases} I_1 = \text{trace}(\sigma) = \sigma_{ij} \\ I_2 = (1/2)\text{trace}(\sigma^2) = (1/2)\sigma_{ij}\sigma_{ji} \\ I_3 = (1/3)\text{trace}(\sigma^3) = (1/3)\sigma_{ij}\sigma_{jk} \end{cases} \quad 1.3$$

De plus, l'expérience a montré qu'un accroissement hydrostatique de l'état de contraintes ne peut provoquer de déformations plastiques. Dans le cas où on choisit d'écrire f en fonction des invariants, il apparaît donc logique d'exprimer cette fonction seuil en termes des invariants du déviateur de contraintes « s » :

$$f = f(J_2, J_3, a) \quad 1.4$$

$$s = \sigma - (I_1/3)I$$

$$J_1 = \text{trace}(s) = 0$$

$$J_2 = (1/2)\text{trace}(s^2) = (1/2)s_{ij}s_{ji} \quad 1.5$$

$$J_3 = (1/3)\text{trace}(s^3) = (1/3)s_{ij}s_{jk}s_{ki}$$

Il est commode, en vue de réaliser les comparaisons avec les résultats expérimentaux, de disposer d'expressions des critères dans lesquelles les valeurs de f sont homogènes à des contraintes, c'est ce qui amène par exemple à utiliser à la place de J_2 l'invariant J , qui peut également s'exprimer en fonction des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$J = \left((3/2)s_{ij}s_{ji} \right)^{1/2} = \left(\left(\frac{1}{6} \right) (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)^{1/2} \quad 1.6$$

Pour traiter le comportement des sols (les argiles par exemple) ou des matériaux pulvérulents artificiels, on est amené à utiliser le troisième invariant. On introduit alors :

$$S = \left((9/2)s_{ij}s_{jk}s_{ki} \right)^{1/3} = \left((9/2)(s.s) : s \right)^{1/3} \quad 1.7$$

On note que S vaut σ en traction comme en compression simple (tenseur uniaxial avec une seule composante non nulle σ), qu'il vaut 0 en cisaillement simple, et $-\sigma$ pour une expansion biaxiale ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, les autres composantes nulles).

Dans cette partie, une sélection de différents critères de plasticité est proposée. D'abord, quelques critères classiques, tel que ceux de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager et Hoek et Brown.

Ces critères sont définis de manière formelle et leur présentation passe par :

- L'expression analytique de la surface de charge ;
- La représentation graphique du critère dans le plan des invariants ;
- Une représentation en 3D (pour quelques critères).

En mécanique des sols usage surtout de deux lois (critère) de plastification :

- Mohr Coulomb (état du sol : drainé. C, Φ) ;
- Von Mises (état du sol : non drainé. $C, \Phi=0$) .

1.2.1.1. Critères ne faisant pas intervenir la pression hydrostatique

a) Critère de Von Mises

Dans la mesure où la trace du tenseur des contraintes n'intervient pas, le critère le plus simple est celui qui n'utilise que le second invariant du déviateur des contraintes, ou encore J_2 . Cela revient à négliger l'influence du troisième invariant

Ceci correspond à une sphère dans l'espace des tenseurs \underline{s} symétriques (expression quadratique des composantes s_{ij} , qui sont toutes équivalentes), soit, si σ_y est la limite d'élasticité en traction, la fonction de charge est définie par :

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2} - \sigma_y \quad 1.8$$

$$f(\sigma) = J - \sigma_y$$

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{(3/2)s_{ji} : s_{ij}} - \sigma_y \quad 1.9$$

b) Critère de Tresca

Le premier critère utilisé pour la plasticité a été proposé par Tresca. Ce critère postule que la limite d'élasticité est atteinte lorsque la *contrainte tangentielle maximale* atteint une valeur critique k . La surface de charge est donc déterminée par :

$$f(\sigma) = \max(\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_y \quad 1.10$$

On peut également exprimer le critère en fonction de l'angle de Lode:

$$f(\sigma) = \frac{2J}{\sqrt{3}} \cos(\theta) - \sigma_y \quad 1.11$$

Cette expression ne définit en général pas une surface régulière (discontinuité de la normale, points anguleux). La limite élastique en cisaillement k peut être déterminée par un essai de traction uniaxial pour lequel la limite élastique est égale à $\sigma_y = 2k$.

c) **Comparaison des critères de Tresca et Von Mises**

Comme il n'est bien entendu pas question de se placer dans l'espace des 6 (ou 9) composantes du tenseur des contraintes, il faut se résoudre à ne visualiser les frontières du domaine d'élasticité que dans des sous-espaces à deux ou trois dimensions. Les représentations les plus courantes s'effectuent:

✓ Dans le plan traction cisaillement (Figure.1.1a), lorsque seules les composantes $\sigma = \sigma_{22}$ et $\tau = \sigma_{12}$ sont non nulles; les expressions des critères se réduisent alors à:

Von Mises : $f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} - \sigma_y$

Tresca: $f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} - \sigma_y$

✓ Dans le plan des contraintes principales (σ_1, σ_2) (Figure.1.1b), lorsque la troisième contrainte principale σ_3 est nulle:

Von Mises : $f(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} - \sigma_y$

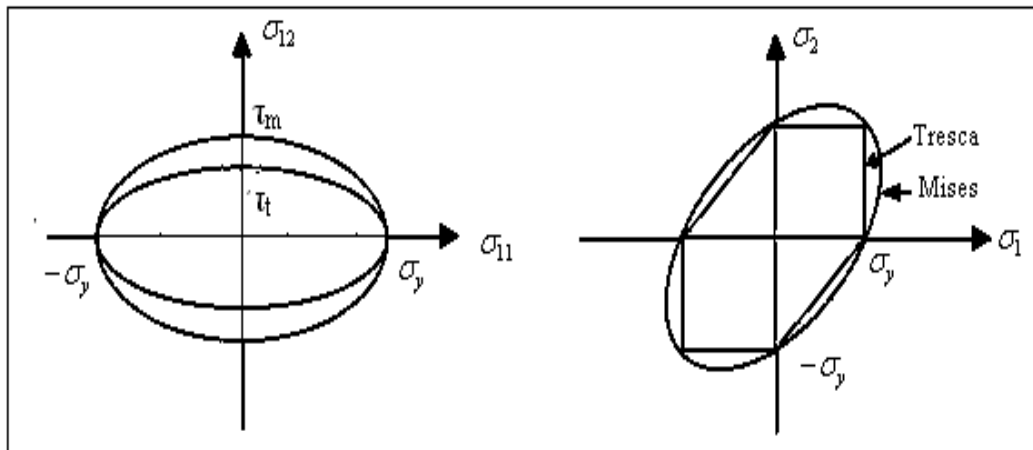
Tresca : $f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - \sigma_y$ si $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2$

$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_y$ si $0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$

$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y$ si $\sigma_2 \leq 0 \leq \sigma_1$ (Symétrie par rapport à l'axe $\sigma_1 = \sigma_2$)

Dans le plan déviateur (Figure.1.2), le critère de Von Mises est représenté par un cercle, ce qui est cohérent avec son interprétation par le cisaillement octaédrique, le critère de Tresca par un hexagone;

Dans l'espace des contraintes principales, chacun de ces critères est représenté par un cylindre de génératrice (1,1,1), qui s'appuie sur les courbes définies ci-dessus dans le plan déviateur.



a. En traction-cisaillement (Von Mises: $\tau_m = \sigma_y / \sqrt{3}$, Tresca: $\tau_t = \sigma_y / 2$) b. En traction biaxiale

Figure.1.1: Comparaisons des critères de Tresca et de Von Mises

Remarque :

1. Les critères de Tresca et de Von Mises sont tous deux *insensibles à la pression*. En d'autres termes, si σ vérifie le critère, $(\sigma + pi)$ vérifie le critère pour tout p . En effet, pour le critère de Tresca on remarque que l'ajout d'une pression ne fait que déplacer les trois cercles de Mohr le long de l'axe horizontal (les trois contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ devenant $(\sigma_1 + p), (\sigma_2 + p), (\sigma_3 + p)$) ce qui n'affecte pas le cisaillement maximal $(\sigma_3 - \sigma_1)/2$. En ce qui concerne le critère de Von Mises, il suffit de remarquer que σ et $(\sigma + pi)$ ont même déviateur et donc même contrainte équivalente.

2. Les critères de Tresca et de Von Mises s'appliquent tous deux à des matériaux *isotropes*, ne privilégiant aucune direction physique de l'espace. En d'autres termes leur expression mathématique est invariante par changement de repère. Ce point est clair pour le critère de Tresca puisque le cisaillement maximal $(\sigma_3 - \sigma_1)/2$ est défini de façon intrinsèque, indépendamment de tout repère. Pour le critère de Von Mises on remarque que :

$$\sigma : \sigma = s : s + 3\sigma_m^2$$

Mais $\sigma_m = tr(\sigma)/3$ et $\sigma : \sigma = tr(\sigma : \sigma)$ sont des invariants de σ . Il en est donc de même de $s : s$ et par suite de J :

La contrainte équivalente J est un invariant du tenseur de contrainte σ .

3. Les critères de Tresca et de Von Mises se ressemblent (outre les points ci-dessus, ils reposent tous deux sur une mesure du cisaillement) mais leurs prédictions pour des états de contrainte triaxiaux sont différentes.

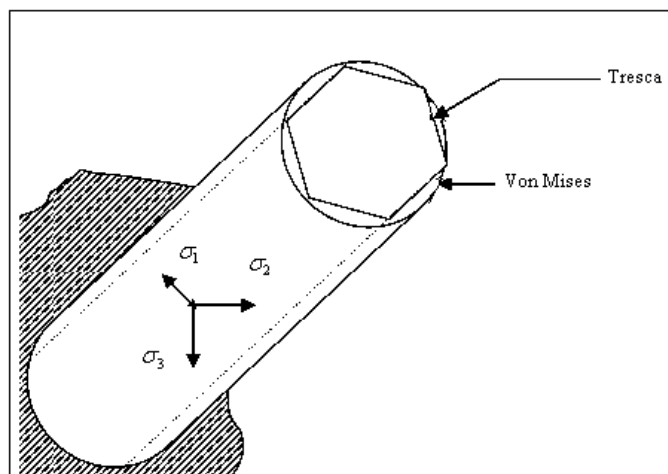


Figure.1.2: Comparaisons des critères de Tresca et de Von Mises dans le plan déviateur

1.2.1.2. Critères faisant intervenir la pression hydrostatique

Ces critères sont nécessaires pour représenter la déformation plastique des matériaux pulvérulents, des sols ou en présence d'endommagement du matériau. Ils expriment le fait qu'une contrainte hydrostatique de compression rend plus difficile la déformation plastique. Une des conséquences de leur formulation est qu'ils introduisent une dissymétrie traction compression.

a) Critère de Drucker-Prager

Le critère de Drucker-Prager est une extension du critère de Von Mises, s'exprime en fonction de la première et du second invariant du tenseur des contraintes. Dans l'espace des contraintes, ce critère représente un cône.

$$f(\sigma) = (1 - \beta)J + \beta I_1 - \sigma_y \quad 1.12$$

La limite d'élasticité en traction reste σ_y , et la limite d'élasticité en compression est $-\sigma_y / (1 - 2\beta)$. Le coefficient β dépend du matériau, il est bien entendu compris entre 0 et 0.5, et on retrouve le critère de Von Mises pour $\beta = 0$, et le cône dégénère en cylindrique dans l'espace des contraintes.

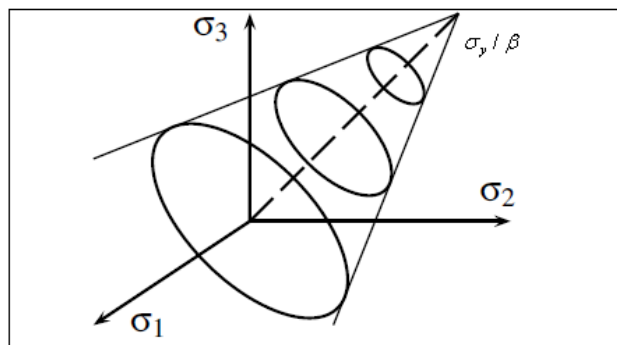


figure.1.3: Représentation du critère de Drucker-Prager

b) Critère de Mohr-Coulomb

De manière générale, le modèle de Mohr-Coulomb constitue une loi élastique parfaitement plastique utilisée pour décrire de manière approchée le comportement des sols pulvérulents (sable) et des sols cohérents à court et long terme (argiles, limons).

Dans l'espace des contraintes principales, le critère de plasticité défini dans le modèle de Mohr-Coulomb est une pyramide de section hexagonale d'équation:

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2C \cos \phi - \sigma_y \quad 1.13$$

Dans le cas particulière où $\phi = 0$, le critère est appelé "critère de Tresca" et la pyramide dégénère en prisme

c) Critère de Rankine

Ce critère est plutôt employé comme critère de rupture dans les matériaux fragiles (craie), et pas pour définir la limite d'un domaine d'élasticité. Il s'exprime en fonction des contraintes normales principales:

$$f(\sigma) = \text{Max}_i(\sigma_i) - \sigma_y \quad 1.14$$

On peut illustrer ce critère par sa trace dans le plan de contraintes principales ($\sigma_1 - \sigma_2$), lorsque $\sigma_3 = 0$: il s'agit de deux demi-droites parallèles aux axes, dans la direction des contraintes négatives, et qui s'appuient sur le point $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y$.

d) Critère de Hoek et Brown

Le critère en cisaillement de Hoek et Brown convient particulièrement à la modélisation du comportement des massifs rocheux. L'expression de surface de plasticité est donnée par l'équation:

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_c \left(m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^a \quad 1.15$$

σ_c désigne la résistance en compression simple mesurée en laboratoire, s est un paramètre exprimant le degré de fracturation de la roche: $s=1$ pour un matériau non fracturé et $s = 0$ pour un matériau totalement granulaire, m est un paramètre lié à la nature pétrographique.

Dans la formulation initiale, le paramètre a est égale à $1/2$, mais une expression généralisée a été proposée, dans laquelle $a \in]0;1]$. Si $a=0$, (1.15) correspond au critère de Tresca. σ_t correspond à la résistance en traction. Dans le cas où $a=0.5$, elle est déterminée analytiquement par:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_c \left(m - \sqrt{m^2 + 4s} \right)}{2} \quad 1.16$$

Il est possible d'exprimer les paramètres σ_c , a , m et s du critères de Hoek et Brown en fonction de C et ϕ , paramètre du critère de Mohr-Coulomb.

$$m + 1 = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad \text{et} \quad \sigma_c s^a = \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad 1.17$$

1.2.1.3. Critères anisotropes

Lorsqu'on mesure expérimentalement la surface de charge sur un matériau métallique, on constate qu'en présence de déformations inélastiques, elle subit une expansion, une translation, et une distorsion. Les deux premières modifications sont représentées par les écrouissages isotropes et cinématiques, mais la dernière n'est pas prise en compte par les modèles courants, d'autant que la forme évolue au cours de la déformation sous chargement complexe : on est là en présence d'anisotropie induite.

Il existe par ailleurs des matériaux fondamentalement anisotropes par fabrication, matériaux composites à fibres longues par exemple. Les modèles de matériaux hétérogènes permettent de tenir compte naturellement de certaines anisotropies, mais ils restent d'un emploi délicat, et on ne peut pas actuellement envisager de traiter dans un cadre industriel le cas de l'anisotropie la plus complexe. Il existe néanmoins de nombreuses possibilités d'extension des critères isotropes à la description de matériaux anisotropes.

La solution la plus généralement adoptée généralise le critère de Von Mises, en utilisant à la place de $J(\sigma)$ l'expression :

$$J_B(\sigma) = (\sigma : B : \sigma)^{1/2} \quad 1.18$$

qui fait intervenir le tenseur du quatrième ordre B . Choisir pour B le tenseur J tel que $s = J : \sigma$ (s déviateur associé à σ) redonne bien entendu le critère de Von Mises. On retrouve alors l'expression classique (critère de Hill) :

$$f(\sigma) = \left(F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{13}^2 \right)^{1/2} - \sigma_y = f_H(\sigma) \quad 1.19$$

En représentant le tenseur d'ordre 4 comme une matrice 6x6, les termes de B s'écrivent dans ce cas particulier :

$$\begin{pmatrix} F+H & -F & -H & 0 & 0 & 0 \\ -F & G+F & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & -G & H+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N \end{pmatrix} \quad 1.20$$

1.2.2. Formulation des lois de comportement élastoplastique:

La formulation classique du comportement élastoplastique d'un milieu continu se place dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale. Ces modèles de comportement écartent tout effet de vieillissement du matériau et de viscosité. Les modèles élastoplastiques permettent de décrire un comportement non linéaire avec une déformation irréversible des matériaux. Le schéma des modèles élastoplastiques intègre l'existence d'un palier d'écoulement sur la courbe contrainte déformations et de déformations irréversibles. Cette application permet de décrire de façon relativement satisfaisante les principaux aspects du comportement mécanique des sols saturés, en conservant néanmoins un domaine de réversibilité. Par ailleurs, ce schéma est bien adapté à une implantation dans les logiciels de calcul par éléments finis.

Le temps physique n'est pas supposé intervenir (pas d'effet de vitesse).

Cette section vise à présenter les notions fondamentales de la théorie de l'élastoplasticité, qui sont, pour un modèle élastoplastique à un seul mécanisme :

- la partition des déformations, qui décompose le tenseur des déformations totales en la somme du tenseur des déformations élastiques et du tenseur des déformations plastiques ;
- la surface de charge, qui définit le seuil de contrainte au delà duquel le comportement d'un matériau est irréversible ;
- le domaine d'élasticité, qui correspond à l'intérieur de la surface de charge et dans lequel les déformations sont réversibles ;
- l'écrouissage, qui permet de faire évoluer la surface de charge dans l'espace des contraintes en fonction de l'intensité des sollicitations. Dans ce cas, le domaine d'élasticité varie également ;
- la règle d'écoulement plastique, qui décrit la manière dont évoluent les déformations plastiques et les autres variables internes ;
- le critère de plasticité parfaite, qui caractérise la rupture du matériau. Lorsque le seuil de contrainte n'évolue pas, ce critère est confondu avec la surface de charge.

Le modèle de comportement plastique (élastoplastique classique) est le modèle qui couple la théorie de l'élasticité avec celui de la plasticité. Pour formuler le comportement élastoplastique, il faut définir les trois règles suivantes:

1.2.2.1. Un seuil de plasticité, qui caractérise l'état des contraintes multiaxiales à partir desquelles commence l'écoulement. Le comportement est identifié par:

$$f < 0 \text{ et } df < 0 \Rightarrow \text{Comportement élastique}$$

$$f = 0 \text{ et } df = 0 \Rightarrow \text{écoulement plastique (il faut vérifier)} \quad 1.21$$

$$f = 0 \text{ et } df < 0 \Rightarrow \text{déchargement élastique}$$

où f est la fonction de charge et $f = 0$ représente la surface de charge délimitant le domaine élastique.

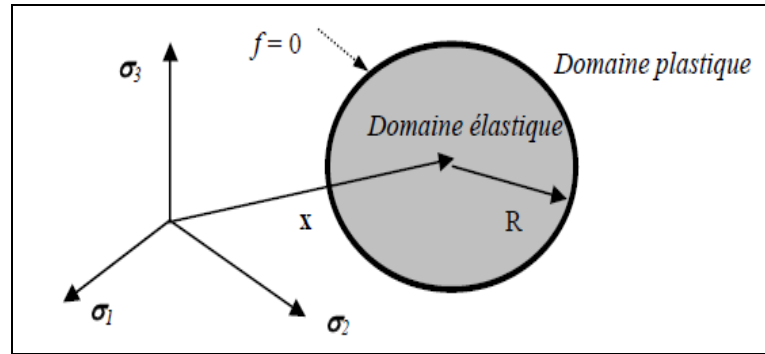


figure.1.4. Surface de charge en plasticité

1.2.2.2. Une loi d'écoulement, qui relie l'incrément des déformations plastiques aux contraintes actuelles et à l'incrément des contraintes pendant l'écoulement.

Le principe de Hill (1950) indique "pendant la déformation plastique caractérisée par les vitesses de déformation $d\varepsilon_{ij}^p$, l'état de contraintes qui réalise rend maximum la puissance de dissipation plastique spécifique.

La puissance de dissipation plastique dW_d est donc à maximiser sous la condition d'appartenance à la frontière du domaine élastique $f = 0$. Pour un accroissement de charge donné, il s'agit de maximiser le lagrangien:

$$\begin{aligned} dL &= dW_d - d\lambda_p f(\sigma_{ij}, a_k) \\ &= \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p - d\lambda_p f(\sigma_{ij}, a_k) \end{aligned} \quad 1.22$$

λ est un scalaire appelé multiplicateur plastique, il se calcule à partir de la condition de consistance qui assure que la relation $f(\sigma, a) = 0$ soit toujours satisfaite lors du processus de plasticité, c'est-à-dire, que le phénomène d'écrouissage se développe de telle façon que le point de chargement reste sur la surface seuil.

Les conditions de maximalité sont:

$$\frac{\partial dL}{\partial \sigma_{ij}} = d\varepsilon_{ij}^p - d\lambda_p \frac{\partial f(\sigma_{ij}, a_k)}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad 1.23$$

$$\frac{\partial dL}{\partial (d\lambda_p)} = f(\sigma_{ij}, a_k) = 0 \quad 1.24$$

Deux propriétés importantes découlent de ce principe:

- *Convexité*: le principe de Hill impose la convexité du domaine élastique. L'unicité de la solution du problème de maximisation n'est possible que lorsque le domaine élastique est convexe.

- *Normalité*: lorsque l'on superpose les espaces de contrainte et de déformation, le vecteur accroissement des déformations plastiques instantanées est dirigé vers la normale extérieure à la frontière du domaine élastique; cette règle est appelée *loi de la normalité*, elle découle de la première condition de maximalité:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_p \frac{\partial f(\sigma_{ij}, a_k)}{\partial \sigma_{ij}} \quad 1.25$$

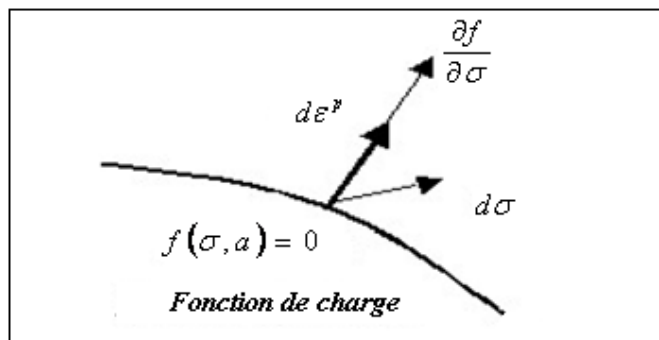


figure.1.5. Loi d'écoulement plastique des matériaux ductiles

a) Directions d'écoulement associées aux critères courants

Les directions d'écoulement sont calculées dans un premier temps pour un matériau sans écrouissage. Les modifications apportées par l'écrouissage seront indiquées à la section suivante.

► Critère de Von Mises

La fonction de charge s'écrit $f(\sigma) = J(\sigma) - \sigma_y$, si bien que la normale n s'exprime :

$$n = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial J}{\partial \sigma} = \frac{\partial J}{\partial s} : \frac{\partial s}{\partial \sigma} \quad \text{ou} \quad n_{ij} = \frac{\partial J}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \quad 1.26$$

En utilisant:
$$\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = J_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad 1.27$$

On obtient:
$$\boxed{n_{ij} = \frac{3 s_{ij}}{2 J}} \quad \text{ou encore} \quad n = \frac{3 s}{2 J} \quad 1.28$$

Dans le cas du critère de Von Mises, la direction d'écoulement est donnée par le déviateur du tenseur des contraintes. Cette expression se simplifie en traction simple selon la direction 1 :

$$s = \frac{2\sigma}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad J = |\sigma| \quad n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \text{signe}(\sigma) \quad 1.29$$

La loi d'écoulement plastique déduite de la règle de normalité s'écrit alors :

$$\boxed{\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \lambda \frac{s_{ij}}{J}} \quad 1.30$$

► Critère de Tresca

La loi d'écoulement se définit par secteur dans l'espace des contraintes principales. Par exemple pour le cas $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, la fonction de charge s'écrit : $f(\sigma) = |\sigma_1 - \sigma_3| - \sigma_y$, si bien que, pour l'ensemble des états de contrainte qui vérifient cette inégalité, la vitesse de déformation plastique possède les mêmes composantes, le matériau ne se déformant pas selon l'axe 2 (déformation de type cisaillement) :

$$\text{Si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 : \quad \varepsilon^p = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad 1.31$$

La définition de la normale pose un problème pour les états de contrainte correspondant aux points singuliers, ainsi en traction simple, lorsque par exemple $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, le critère s'exprimant alors indifféremment $f(\sigma) = |\sigma_1 - \sigma_2| - \sigma_y$ ou $f(\sigma) = |\sigma_1 - \sigma_3| - \sigma_y$. Il est alors classique de définir deux multiplicateurs plastiques, se référant chacun à une forme du critère. Si ces deux multiplicateurs sont choisis égaux, le modèle redonne la même forme que le critère de Von Mises en traction simple.

Par contre, dès que l'état de contrainte s'éloigne de l'égalité stricte entre les composantes σ_2 et σ_3 , c'est l'un des deux régimes de type cisaillement qui prend le dessus.

$$\text{Si } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = 0 : \quad \varepsilon^p = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1.32$$

► Critère de Drucker–Prager

La fonction de charge s'écrit $f(\sigma) = (1 - \beta)J + \beta I_1 - \sigma_y$, si bien que la normale n possède une composante sphérique. La déformation plastique évaluée avec un tel critère est accompagnée d'une augmentation de volume quel que soit le chargement appliqué :

$$n = \frac{3}{2}(1 - \beta)\frac{S}{J} + \beta I \quad 1.33$$

$$\text{trace}(\varepsilon^p) = 3\beta\lambda \quad 1.34$$

b) Matériaux élastiques parfaitement plastiques

Dans cette famille, le modèle le plus simple est le modèle élastique linéaire parfaitement plastique, initialement développé pour décrire, de manière approchée, le comportement des métaux. Cependant, l'existence d'un palier d'écoulement sur la courbe de comportement contrainte-déformation de nombreux matériaux a suggéré d'étendre ce modèle aux bétons, aux sols et aux roches. En particulier, l'application à la description du comportement des massifs des sols s'est révélée très fructueuse et a permis d'analyser la rupture des sols dans les problèmes de fondations, de stabilité de pentes, de tunnels, des murs de soutènement...

Dans ce cas, la fonction de charge ne dépend que du tenseur de contrainte. Le domaine d'élasticité est fixe. Au cours de l'écoulement plastique, le point représentatif de l'état de contrainte ne peut que "tourner" autour du domaine d'élasticité (elle correspond au cas idéal où le seuil d'écoulement est une constante matérielle indépendante de la valeur de la déformation plastique atteinte. L'écrouissage ou durcissement est nul).

Le multiplicateur plastique est indéterminé; la condition de charge plastique et la condition de cohérence deviennent respectivement :

$$\text{Pour } f(\sigma) = 0 \text{ et } df(\sigma) = 0 : \quad \varepsilon^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \lambda n \quad 1.35$$

$$\text{Au cours de l'écoulement : } n : \sigma = 0 \quad 1.36$$

Le modèle est sans écrouissage, puisque le niveau de contrainte ne varie plus au sortir du domaine d'élasticité. Il n'y a pas d'énergie stockée au cours de la déformation, et la dissipation en chaleur est égale à la puissance plastique. Le modèle est susceptible d'atteindre des déformations infinies sous charge constante, conduisant à la ruine du système par déformation excessive.

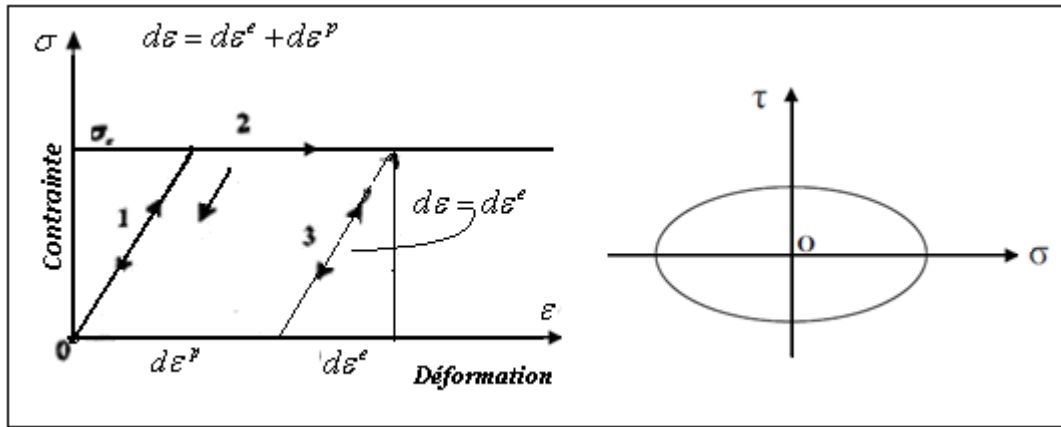


Figure.1.6. Comportement élastique parfaitement plastique

► Calcul du multiplicateur plastique

Le multiplicateur plastique λ est une *nouvelle inconnue* introduite par la loi de comportement. La règle de normalité précise son signe (positif) mais ne précise pas sa valeur. Il n'y a pas pour autant de contradiction, la présence de cette nouvelle inconnue étant compensée par l'équation supplémentaire exprimant que λ n'est non nul que lorsque le seuil est atteint, *i.e.* $f(\sigma) = 0$.

En pratique, l'indétermination de λ pose des problèmes analytiques et numériques assez sérieux, même si le bilan équations-inconnues est équilibré. Nous verrons que l'indétermination du multiplicateur plastique est levée dès que le matériau présente un écrouissage positif (qu'il soit cinématique ou isotrope).

Le multiplicateur plastique est indéterminé pour un matériau élastique-parfaitement plastique chargé en vitesse de contrainte imposée. Cela est lié au fait que, le module plastique étant nul, il existe une infinité de positions équivalentes en déformation plastique pour un état de contrainte admissible donné, tel que $J(\sigma) = \sigma_y$.

Le multiplicateur plastique va pouvoir être déterminé, en combinant la loi de comportement élastique écrite en termes **de vitesse et la condition de cohérence**, soit :

$$\dot{\sigma} = C : \left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p \right) \quad \text{et} \quad n : \dot{\sigma} = 0 \quad 1.37$$

En remplaçant σ par sa valeur dans la deuxième égalité de l'équation 1.36, il vient:

$$\dot{n} : C : \left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p \right) = \dot{n} : C : \dot{\varepsilon} - \dot{n} : C : \lambda \dot{n} = 0 \quad 1.38$$

Si bien que
$$\dot{\lambda} = \frac{n : C : \dot{\varepsilon}}{n : C : n} \quad 1.39$$

Dans le cas particulier de l'élasticité isotrope, et du critère de Von Mises, on obtient successivement les simplifications suivantes :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad n_{ij} = \frac{3}{2} \frac{s}{J} \quad 1.40$$

$$n_{ij} C_{ijkl} = 2\mu n_{kl} \quad n_{ij} C_{ijkl} n_{kl} = 2\mu \quad n_{ij} C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} = 2\mu n_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad 1.41$$

$$\boxed{\dot{\lambda} = \frac{2}{3} n : \dot{\varepsilon}} \quad 1.42$$

Sous chargement uniaxial, la vitesse de déformation totale et la vitesse de déformation plastique sont identiques, puisque le niveau de contrainte reste inchangé pendant l'écoulement. Ce résultat n'est pas général. Lorsque le chargement s'effectue sur plusieurs composantes du tenseur de contrainte, il y a un déplacement du point représentatif de l'état de contrainte sur la surface de charge, qui peut toutefois atteindre une position asymptotique. On peut donc par exemple avoir des diminutions de contrainte sur certaines composantes en présence d'écoulement plastique.

Le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ est déterminé à l'aide de la charge-décharge du critère de plasticité f . Ceci peut être exprimé par :

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{et} \quad f \dot{\lambda} = 0 \quad 1.43$$

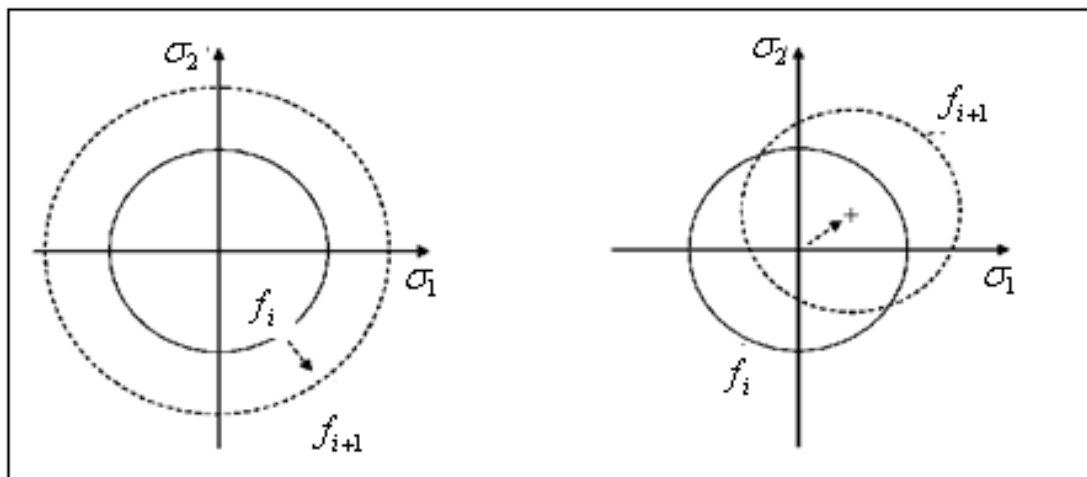
L'écoulement plastique est caractérisé par $\dot{\lambda} > 0$ et par conséquent, $f = 0$.

1.2.2.3. Une loi d'écrouissage

La grande variété des comportements non linéaires se manifeste en particulier dans le durcissement (ou l'adoucissement) observé en relation avec le processus de déformation (écrouissage, endommagement). Ces phénomènes sont liés à des réarrangements de la structure intime du matériau conduisant à un nouvel état. Si le comportement plastique se révèle inchangé, c'est qu'on est en présence d'un comportement parfaitement plastique, sans écrouissage. Le domaine d'élasticité sera modifié dans le cas du comportement à écrouissage positif (durcissement) ou négatif (adoucissement).

Les lois d'écrouissage sont donc les règles qui caractérisent l'évolution du domaine d'élasticité au cours de la déformation inélastique (l'évolution du seuil de plasticité pendant l'écoulement).

Dans la pratique, on cherche à définir l'état de l'écrouissage en fonction d'un certain nombre de paramètres scalaires ou tensoriels. Notons que l'état de l'écrouissage n'évolue que lorsque les déformations plastiques se développent. Il est donc légitime de rechercher un lien entre la règle d'écoulement et la règle d'écrouissage. Les deux modèles d'écrouissage simples que l'on peut combiné pour tenir compte au mieux du comportement d'un matériau sont l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. La Figure. 1.7 schématise ces deux modèles dans l'espace des contraintes principales 2D.



(a) écrouissage isotrope

(b) écrouissage cinématique

Figure. 1.7. Modèle d'écrouissage

► **Écrouissage isotrope**

Ce type d'écrouissage consiste en un gonflement de la surface de charge de la même manière dans toutes les directions de l'espace des contraintes (Figure. 1.7a). On le traduit par la dépendance de la contrainte de plastification σ_y vis-à-vis d'un paramètre interne scalaire h appelé paramètre d'écrouissage.

Loi de Prandtl–Reuss

C'est la loi qui utilise le critère de Von Mises et une règle d'écrouissage isotrope. La fonction de charge est donc :

$$f(\sigma, R) = J(\sigma) - \sigma_y - R(p) = 0 \quad 1.44$$

L'écrouissage isotrope est décrit par la fonction $R(p)$. l'égalité $f(\sigma, R) = 0$ se résume à :

$$\sigma_{yi} = \sigma_y + R(p) \quad R(p) = Hp \quad 1.45$$

La courbe décrite par $(\sigma_y + R(p))$ est donc la courbe d'écrouissage en chargement uniaxial monotone, la déformation de traction $\varepsilon_{11}^p = \varepsilon^p$ étant égale dans ce cas à la déformation plastique cumulée p .

$$p = \int \sqrt{\frac{2}{3}} (d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p) \quad 1.46$$

Le module d'écrouissage peut être évalué comme la pente à cette courbe.

$$\sigma_{yi} = \sigma_y + R(\varepsilon^p) \quad H = \frac{d\sigma_{yi}}{d\varepsilon^p} = \frac{dR}{d\varepsilon^p} = \frac{dR}{dp}$$

$$H = \frac{E_T}{1 - E_T / E} \quad 1.47$$

$R(p)$ peut être définie point par point, par une fonction puissance ou une fonction exponentielle. Quelle que soit la forme choisie pour R , la condition de cohérence permet de trouver le multiplicateur plastique $\lambda = p$:

$$\frac{df}{d\sigma} : \sigma + \frac{df}{dR} R = 0 \quad \text{s'écrit} \quad n : \sigma + Hp = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{n : \sigma}{H}$$

La loi de Prandtl-Reuss permet de déterminer la direction et l'intensité de l'écoulement plastique :

$$\varepsilon^p = \lambda n = \frac{n : \sigma}{H} n \quad 1.48$$

► **Écrouissage cinématique**

Il s'agit d'un mouvement de translation de la surface de charge dans l'espace des contraintes (Figure. 1.7b). Ce type d'écrouissage a principalement pour but de modéliser l'effet Bauschinger qui peut être très important lors de chargements cycliques présentant de faibles déformations plastiques. Il existe de nombreux modèles d'écrouissage cinématique, le plus simple a été proposé initialement par Milan (1938).

Modèle de Prager :

Prager (1955) a proposé une règle d'écrouissage donnée par:

$$X = (2/3)H\varepsilon^p \quad 1.49$$

où H est une constante positive. Cette règle est introduite dans le critère de Von Mises pour décrire l'écrouissage cinématique sous la forme:

$$f(\sigma_{ij}, X) = \sqrt{\frac{1}{2}(s_{ij} - X)(s_{ji} - X)} - \sigma_y \quad 1.50$$

L'association en parallèle de la figure 1.7a correspond au comportement illustré en figure 1.7b. Dans ce cas, le modèle présente de l'écrouissage. Il est dit cinématique linéaire, car dépendant linéairement de la valeur actuelle de la déformation plastique. Sous cette forme, le modèle est rigide-plastique. Il devient élastoplastique si l'on rajoute un ressort en série. La forme de la courbe dans le plan $\sigma - \varepsilon^p$ est due au fait que, lors de l'écoulement plastique, la contrainte qui s'établit dans le ressort vaut X . Par ailleurs, cet écoulement ne se produit que si la valeur absolue de la contrainte dans le patin, soit $|\sigma - H\varepsilon^p|$ est égale à σ_y . Pour une déformation donnée, cette contrainte X est une contrainte interne qui caractérise le nouvel état neutre du matériau.

La fonction de charge dépend maintenant de la contrainte appliquée et de la contrainte interne. Elle s'écrit :

$$f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_y$$

Dans ce cas, la contrainte augmente au cours de l'écoulement plastique, si bien qu'elle peut servir de variable de contrôle. Mais il est aussi toujours possible d'exprimer la vitesse d'écoulement plastique en fonction de la vitesse de déformation totale le cas où $H = 0$

redonnant bien entendu le cas du matériau parfaitement plastique : $\varepsilon^p = \frac{E}{E + H} \varepsilon$

1.3. Formulation de la matrice de rigidité tangente

Au cours de l'écoulement plastique, nous avons:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial a_k} da_k = 0 \quad 1.51$$

Ou bien:

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^t \{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\}^t \{da\} = 0 \quad 1.52$$

Or la loi de comportement donne:

$$\{d\sigma\} = [C] \{d\varepsilon^e\} = [C] (\{d\varepsilon\} - d\varepsilon^p) \quad 1.53$$

En introduisant la loi de la normalité, nous pouvons écrire l'incrément des contraintes:

$$\{d\sigma\} = [C] \left(\{d\varepsilon\} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} d\lambda_p \right) \quad 1.54$$

Dans le cas des matériaux standard généralisés, on peut admettre une relation entre incrément des variables d'écoulement et celui du multiplicateur plastique sous la forme:

$\{da\} = -[L] \left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\} d\lambda_p$, avec la matrice $[L]$ contenant les termes $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta_i \partial \beta_j}$. Ainsi, l'incrément du

critère de plasticité est donné par:

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t [C] \left(\{d\varepsilon\} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} d\lambda_p \right) - \left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\}^t [L] \left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\} d\lambda_p = 0 \quad 1.55$$

D'où:

$$d\lambda_p = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t [C]}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t [C] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\}^t [L] \left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\}} \{d\varepsilon\} \quad 1.56$$

Reportons ce résultat dans la loi de comportement pour obtenir la matrice du comportement élastoplastique $[\bar{C}]$:

$$\{d\sigma\} = [\bar{C}] \{d\varepsilon\} \quad 1.57$$

où:

$$\overline{[C]} = [C] - \frac{[C] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t [C]}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t [C] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\}^t [L] \left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\}} \quad 1.58$$

Ainsi, la matrice de rigidité tangente prend la forme:

$$\overline{[K_t]} = \int_{V_e} [B]^t [C_t] [B] dV \quad 1.59$$

Où la matrice $[C_t]$ prend différentes valeurs selon la nature du comportement au point de Gauss considéré:

Comportement élastique: $d\lambda_p = 0 \Rightarrow [C_t] = [C]$

Ecoulement plastique: $d\lambda_p > 0 \Rightarrow [C_t] = \overline{[C]}$

Décharge élastique: $d\lambda_p = 0 \Rightarrow [C_t] = [C]$

1. 4. Les techniques de résolution des problèmes non linéaire

La non linéarité du phénomène rend impossible la description d'une relation directe entre l'état final des contraintes et celui des déformations. La résolution des problèmes élastoplastiques nécessite une analyse incrémentale puisque l'état de la structure dépend de l'histoire du chargement et de l'état initial de la structure. Afin de pouvoir suivre la trajectoire du chargement, la charge totale $\{F\}$ est appliquée en un certain nombre d'incrément $\{\Delta F\}$, suffisamment petits pour assurer la convergence. Toutefois, ces incréments ne garantissent pas le suivi du comportement réel, car il existe un cumul des erreurs au cours des incréments successifs. La matrice de rigidité tangente conduit à la linéarisation du comportement à l'intérieur de chaque incrément, cette linéarisation par morceaux s'écarte progressivement de la courbe du comportement réel (dans ce cas, on observe une divergence monotone au cours des incréments). Il est donc indispensable d'introduire des procédures itératives garantissant l'équilibre des forces internes et externes à la fin de chaque incrément.

1.4.1. Résolution structurale: méthode de Newton-Raphson

1.4.1.1. Solution incrémentales :

Le système structural non linéaire est donné sous sa forme incrémentale:

$$K(\{q\})\{q\} = \left(\frac{dF}{d\{q\}} \right) \{q\} = F$$

$$[K(\{q\})]\{dq\} = \{dF\} \quad 1.60$$

La procédure de résolution consiste à appliquer la force $\{F\}$ par petits incréments $\{\Delta F\}$. A chaque pas de temps $\{F\} = \lambda\{\Delta F\}$ où λ est un multiplicateur adimensionnel appelé "facteur de charge" (en général, on prend λ égal au nombre d'incrément, $\lambda = n$).

$$\Delta\{q\}_i = \left(\frac{dF}{d\{q\}} \right)^{-1} \Delta F_i \quad 1.61$$

1.4.1.2. Solution itérative:

Pour chaque incrément de charge, le bilan des efforts est considéré. A l'incrément n , on définit le résidu d'équilibre $\{R^{(n)}\}$ par la différence entre les efforts appliqués et ceux développés par l'état de déformation de la structure (forces internes) :

$$\{R^{(n)}\} = \{F^{(n)}\} - \{F_{\text{int}}^{(n)}\} = 0 \quad 1.62$$

Où $\{F^{(n)}\}$ sont les forces appliquées à l'incrément n et $\{F_{\text{int}}^{(n)}\}$ sont les forces internes dans la structure au même incrément.

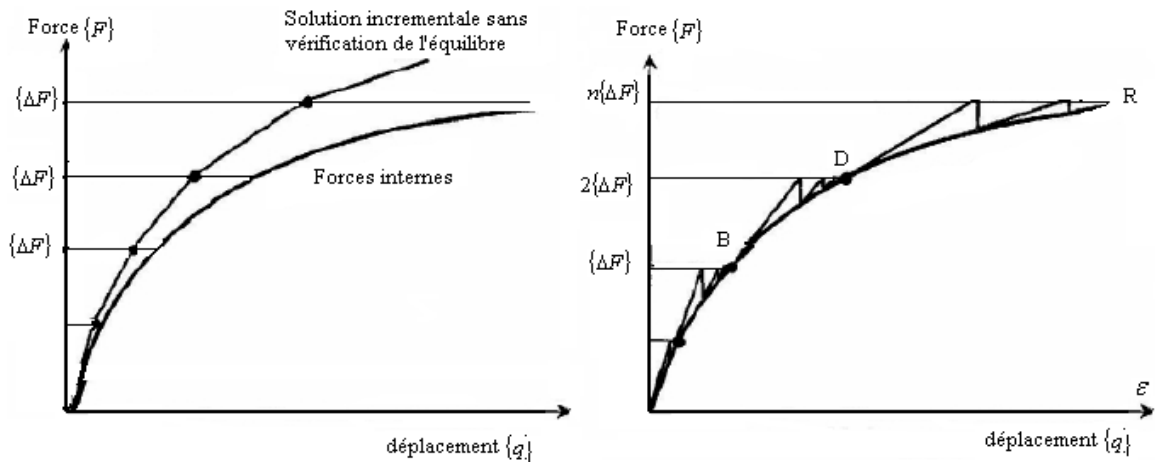


Figure. 1.8. Schéma de résolution sans et avec itérations.

1.4.2. Résolution locale: intégration de l'écoulement

Il y a plusieurs méthodes d'intégrations qui sont notamment exposées par Macari & al. Ces auteurs exposent des méthodes *implicites* (Backward Euler, generalized midpoint rule and generalized trapezoidal rule) et *explicites* (Forward Euler et Vermeer scheme).

Les méthodes explicites utilisent les variables en début d'incrément. Elles nécessitent de rajouter une condition de retour sur la surface de charge et éventuellement une sous-incrémentation afin de maintenir la stabilité et la précision de la méthode dans le cas de grands incréments (M. Kempeneers.) [9]. Ces méthodes sont relativement simples à mettre en œuvre mais sont conditionnellement stables.

Les méthodes implicites utilisent quant à elles les variables en fin d'incrément et consistent en une projection de la contrainte sur la surface de charge. Ces schémas sont beaucoup plus stables mais nécessitent généralement un processus itératif qui peut parfois se révéler très coûteux.

La forme générale des équations constitutives des matériaux élastoplastiques est donnée par :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad 1.63$$

$$\sigma = \sigma(\varepsilon^{el}, a_k) \quad 1.64$$

$$\varepsilon^p = \lambda n(\sigma, a_k) \quad 1.65$$

$$a_k = \lambda H(\varepsilon^p, \varepsilon_k) \quad 1.66$$

L'équation (1.63) exprime la décomposition de la déformation totale en une partie élastique et une partie plastique. L'équation (1.64) est la réponse élastique du matériau. L'équation (1.65) donne l'écoulement plastique non-associé et l'équation (1.66) exprime l'évolution des paramètres d'écrouissages.

Dans la pratique, les incréments de charge ne peuvent pas être infinitésimaux, pour des raisons d'efficacité numérique. Les incréments de taille finie $\{\Delta\varepsilon\}$ sont donc utilisés à la place des accroissements $d\varepsilon$. Il est nécessaire de satisfaire le critère à tous les points d'intégration (i.e. points de gauss ou de Hammer).

Pour un point donné, l'état des contraintes est actualisé à partir de l'ancien état de contrainte et de déformation plastique ainsi que de la nouvelle déformation (issue de l'incrément des déplacements nodaux) [2] [3]. La première estimation propose une supposition d'un accroissement élastique des contraintes. Si le point final se trouve à l'intérieur du critère, le point garde un comportement élastique où suit une décharge élastique lorsque le point de départ se trouve sur le critère.

Dans ce cas, le point final est correct et il n'y a pas besoin de correction. Par contre, si le point final se trouve à l'extérieur du domaine élastique, une procédure d'intégration des équations d'écoulement doit être adoptée.

1.4.2.1. La méthode explicite d'Euler:

Dans un premier temps, on cherche l'intersection de la trajectoire du chargement avec le critère de plasticité en B, point à partir duquel l'écoulement plastique prend effet; il s'agit de trouver la solution de l'équation:

$$f(\sigma_B, a_0) = f(\{\sigma_A\} + \alpha\{\Delta\sigma_e\}, a_0) = 0 \quad 1.67$$

$$\Delta\sigma_e = [C]\Delta\varepsilon$$

Où les conditions $f(\{\sigma_A, a_0\}) < 0$ et $f(\{\sigma_C, a_0\}) > 0$ sont vérifiées. Le développement de Taylor au premier ordre donne:

$$f(\{\sigma\} + \alpha\{\Delta\sigma\}) = f(\{\sigma\}) + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^t \left\{ \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \alpha} \right\} d\alpha$$

$$= f(\{\sigma\}) + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^t \{\Delta\sigma\} d\alpha \quad 1.68$$

Les estimations successives de $\alpha^{k+1} = \alpha^k + d\alpha^k$ sont obtenues par : $d\alpha^k = \frac{-f(\{\sigma^k\})}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right\}^t \{\Delta\sigma\}_k}$

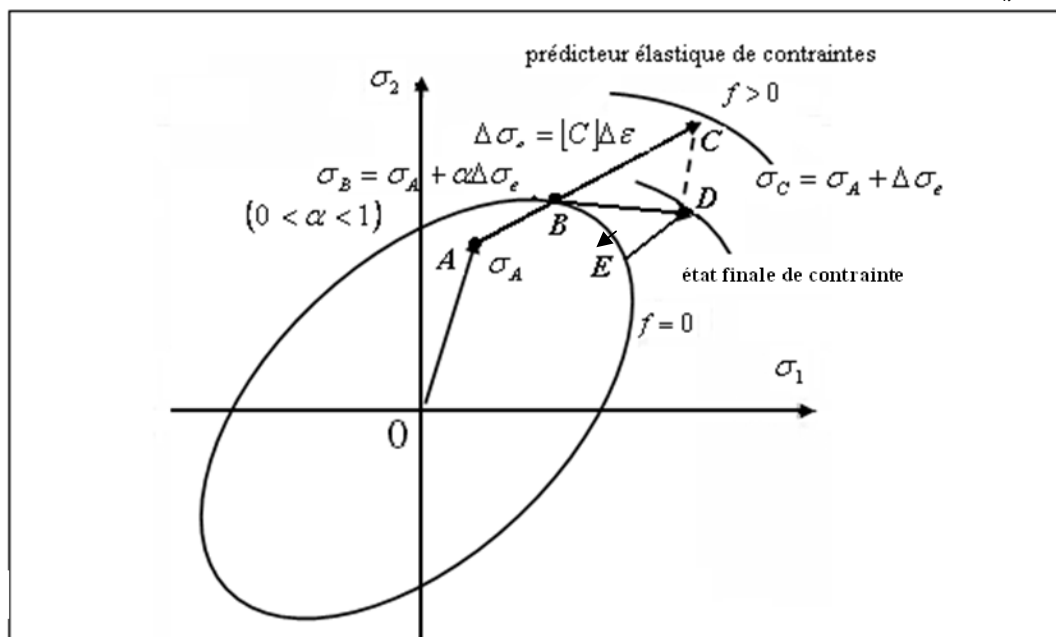


Figure. 1.9. Méthode explicite d'Euler.

En écrivant l'incrément de contrainte, on obtient:

$$\begin{aligned}\{\Delta\sigma\} &= [\overline{C}]\{\Delta\varepsilon\} \\ \{\Delta\sigma\} &= [C]\{\Delta\varepsilon\} - \Delta\lambda_p [C]\{n\} \\ &= \{\Delta\sigma^e\} - \Delta\lambda_p [C]\{n\}\end{aligned}\quad 1.69$$

Où $\{n_B\}$ est le vecteur normal en B et le vecteur $\Delta\sigma^e$ est égal à $(1-\alpha)\{\Delta\sigma\}$ (on l'appelle accroissement des contraintes supposées élastiques). Le nouveau point correspond à une projection selon la normale en B de la contrainte en C.

$$\{\sigma_D\} = \{\sigma_B\} + \{\Delta\sigma^e\} - \Delta\lambda_p [C]\{n_B\} \quad 1.70$$

Il est recommandé de diviser l'incrément BC en petits incréments pour pouvoir actualiser le vecteur normal et réduire ainsi les erreurs. De plus, le rabattement sur le critère de plasticité est effectué à partir des vecteurs normaux au point courant.

- **Rabattement sur le critère de plasticité**

La convexité du domaine élastique conduit à un point D en dehors du critère de plasticité. Il est nécessaire de ramener le point de calcul sur le critère, afin d'éviter toute situation aberrante. L'approche utilisée consiste à conserver la déformation totale et à introduire des déformations plastiques supplémentaires permettant la relaxation des contraintes jusqu'au retour au critère.

$$\{\sigma_E\} = \{\sigma_D\} - \delta\lambda_{PD} [C]\{n_D\} \quad 1.71$$

Avec

$$\delta\lambda_{PD} = \frac{f(\{\sigma_D\})}{\{n_D\}^T [C]\{n_D\} + A} \Big|_D \quad 1.72$$

Si la fonction de charge n'est pas suffisamment petite en D, des relaxations successives sont calculées par les équations ci-dessus jusqu'à ce que $|f(\{\sigma_D\})| \leq \epsilon$

1.4.2.2. La méthode d'Euler implicite :

Cette méthode est basée sur l'équation :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_A\} - \delta\lambda_p [C]\{n\} \quad 1.73$$

Dans cette équation, λ et a sont inconnus. Dans la pratique, Ortiz et Simo en 1986 ont appliqué une technique dite "operator splitting" et ont réécrit (1.87) de la manière suivante :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_A\} - \delta\lambda_0 [C]\{n_0\} - \delta\lambda_1 [C]\{n_1\} - \dots \quad 1.74$$

$$\delta\lambda_0 = \frac{f(\{\sigma_A\})}{\{n_A\}^T [C]\{n_A\} + A} \quad 1.75$$

Ainsi, on peut créer un processus itératif basé sur l'annulation d'un résidu de contraintes défini par la différence entre le champ de contraintes courant et celui de la méthode d'Euler implicite.

Notons enfin que le multiplicateur plastique $d\lambda_p$ est donné par la condition de consistance [1.36]. Nous ne dérivons pas son expression car il constituera l'inconnue principale dans le schéma de résolution numérique basé sur un algorithme de prédiction élastique-correction plastique.

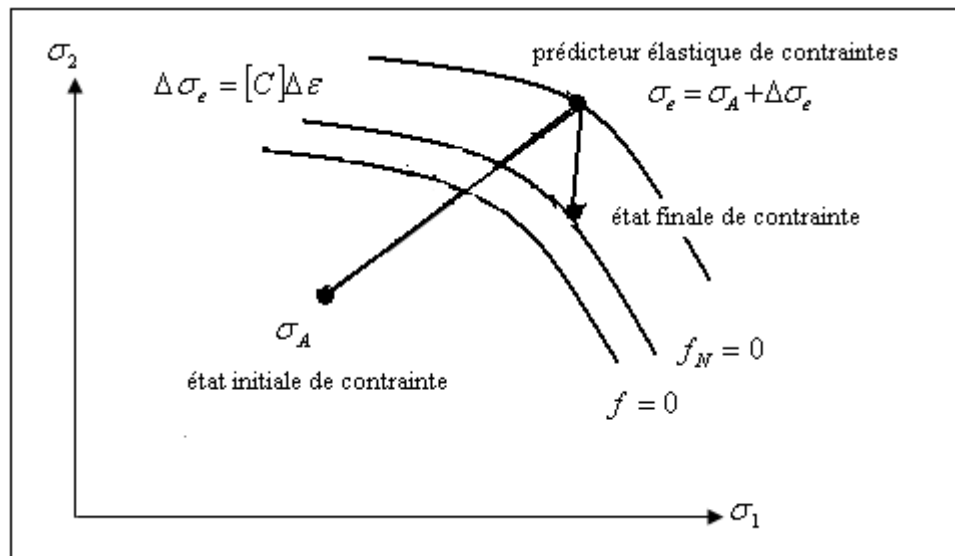


Figure. 1.10. Méthode d'Euler implicite.

CHAPITRE II

Notion sur la mécanique de rupture non linéaire

2.1. Introduction

La Mécanique de la Rupture s'est beaucoup développée dans la seconde moitié du vingtième siècle, motivée par une série d'accidents sur des structures diverses et causés par des défauts non détectés lors de la construction : bateaux (les *Liberty ships*), avions (notamment le Comet¹), réservoirs sous pression (de gaz notamment). Mais le domaine d'application de cette théorie ne se limite pas aux structures métalliques. Elle s'applique également aux *roches*, aux *céramiques* et aux *polymères* (dans une certaine gamme de température). Les échelles d'application sont également très diverses puisqu'elles vont des microsystemes (Silicium) à la géomécanique de l'écorce terrestre (création et propagation de failles).

La théorie de la mécanique de la rupture est un moyen pour estimer la stabilité des fissures qui peuvent survenir à cause des défauts. Elle permet de prévoir l'évolution de la fissure jusqu'à la ruine de la structure.

Griffith est souvent cité comme le premier chercheur à avoir introduit la mécanique de la rupture (en tant que science) en 1920, dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique. Il a ainsi mis en évidence une variable (appelée plus tard taux de restitution d'énergie) caractérisant la rupture, et dont la valeur critique est une caractéristique du matériau. Vinrent ensuite les premiers développements théoriques d'analyse des champs de contraintes et de déformations au voisinage d'une fissure en élasticité. Ces études, menées notamment par Sneddon en 1946, puis Irwin en 1957, ont permis de définir les facteurs d'intensité de contraintes, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit.

En fonction du chargement et du matériau considérés, si la plasticité est absente ou reste très confinée, les théories qui permettent de traiter le problème considèrent le matériau comme élastique partout: c'est la mécanique linéaire de la rupture. Si au contraire le milieu est globalement plastique, l'étude est du ressort de la mécanique non linéaire de la rupture, ou encore de l'approche locale, dans laquelle il est fait une description aussi précise que possible de l'état de contrainte et de déformation en pointe de fissure à l'aide de modèles de comportement non linéaires, qui va être considérée dans ce chapitre.

La mécanique de la rupture couvrant un domaine extrêmement vaste, dans ce travail nous étudierons de façon précise le cadre de "la rupture non linéaire". Donc notre étude sera basée sur une analyse élastoplastique du champ des contraintes sous les conditions suivantes:

- Matériaux homogènes, isotropes, sous sollicitation statique;
- La zone de plasticité doit être étendue;
- L'étude est restreinte aux fissures planes, et rectilignes.

¹ Premier vol en 1949. Rupture par fatigue du fuselage à proximité des hublots.

2.2. Les modes de la rupture

En mécanique de la rupture, plusieurs modes de rupture sont possibles :

Le mode I (a) correspond à une ouverture des lèvres de la fissure tandis que les modes II (b) et III (c) prennent en compte le glissement d'une lèvre sur l'autre. On peut aussi avoir une combinaison de ces différents modes.

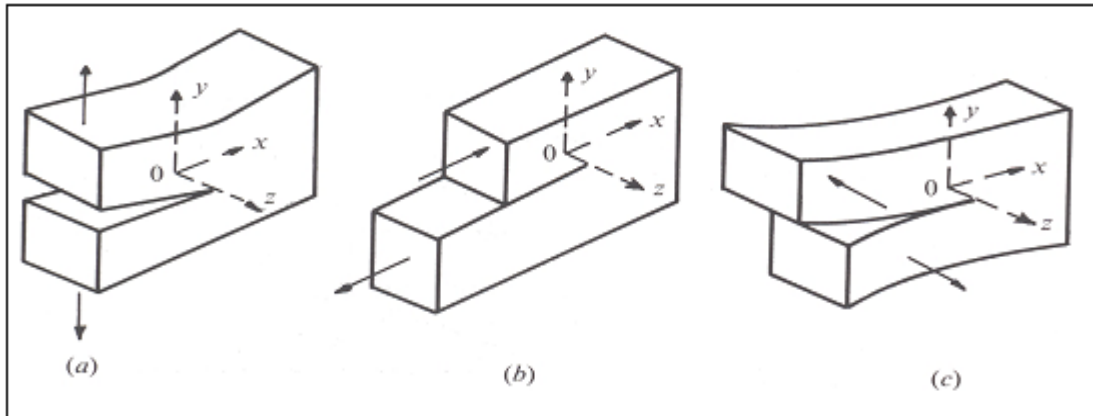


Figure 2.1. Les modes de la rupture

2.3. L'étude d'un milieu élastoplastique fissuré

En plasticité, une partie de l'énergie est dissipée (phénomène irréversible) et on ne peut donc pas toujours évaluer la fraction d'énergie "disponible" pour la propagation.

Deux situations se distinguent selon la valeur du rapport de la taille de la zone éventuellement déformée plastiquement à celle de l'éprouvette ou de la structure considérée.

- **Plasticité confinée:**

La concentration de contraintes en point de fissure créant une plastification locale, il est nécessaire que la taille de cette zone reste petite par rapport à la longueur de la fissure, de façon à ne pas trop perturber la distribution élastique des contraintes. Lorsque c'est le cas, on peut continuer à utiliser les concepts de la mécanique linéaire de la rupture.

- **Plasticité étendue:**

L'étude de la rupture en situation de plasticité étendue, c'est-à-dire lorsque la taille de la zone plastique n'est plus négligeable devant la longueur de la fissure, constitue ce qu'on appelle la mécanique de la rupture en comportement non linéaire.

Plusieurs modèles proposent de déterminer la taille de la zone plastique en pointe de fissure : modes d'Irwin, et de Dugdale qui sont détaillés dans (Broek-david) [5].

La mécanique élastique plastique de la rupture (MEPR) s'applique aux matériaux ductiles lorsque le comportement reste toute fois indépendant du temps, comme pour la mécanique de la rupture linéaire (MLR) où le FIC est le paramètre utilisé comme critère de rupture. Deux paramètres caractéristiques de la MEPR décrivent le critère de rupture, le CTOD et l'intégrale -J.

Si en élasticité linéaire, la singularité est d'ordre -1/2, elle est plus faible en plasticité, et vaut $-n/(n+1)$, où n est le coefficient d'écrouissage du matériau, est compris entre 0 et 0,2.

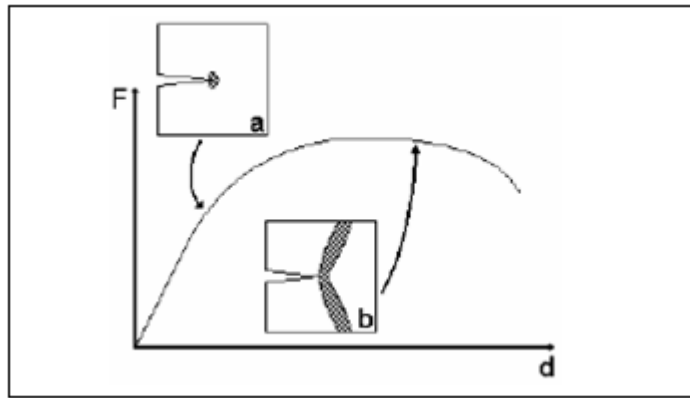


Figure 2.2. Courbe force-déplacement : plasticité confinée (a) et étendue (b). La zone déformée plastiquement est représentée en gris.

2.3.1. Détermination de la zone plastique

Les contraintes au voisinage de la fissure : (Mode I)

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi.r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad 2.1$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi.r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad 2.2$$

$$\sigma_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma_3 = \frac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi.r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad 2.3$$

En considérons que la contrainte σ_1 et σ_2 , vérifie le *critère de Von Mises*:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{ys}^2 \quad 2.4$$

$$2\sigma_{ys}^2 = \frac{K_I^2}{2\pi \cdot r_p} \left[\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right] \dots\dots DP \quad 2.5$$

$$2\sigma_{ys}^2 = \frac{K_I^2}{2\pi \cdot r_p} \left[1 + \frac{3}{2} \sin^2 \theta + \cos \theta \right] \dots\dots\dots CP \quad 2.6$$

D'où l'on tire une équation pour

$$r_p = \frac{K_I^2}{4\pi\sigma_{ys}^2} \left[\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right] \dots\dots\dots DP \quad 2.7$$

$$r_p = \frac{K_I^2}{4\pi\sigma_{ys}^2} \left[1 + \frac{3}{2} \sin^2 \theta + \cos \theta \right] \dots\dots\dots CP \quad 2.8$$

2.3.2. Modèle d'Irwin

Irwin (1960) a présenté un modèle de détermination de la zone plastique le long de l'axe de la fissure.

- * Hypothèse d'un matériau élastique plastique parfait.
- * Hypothèse de contraintes planes.

La zone plastique est donnée par : $r_p^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$ 2.9

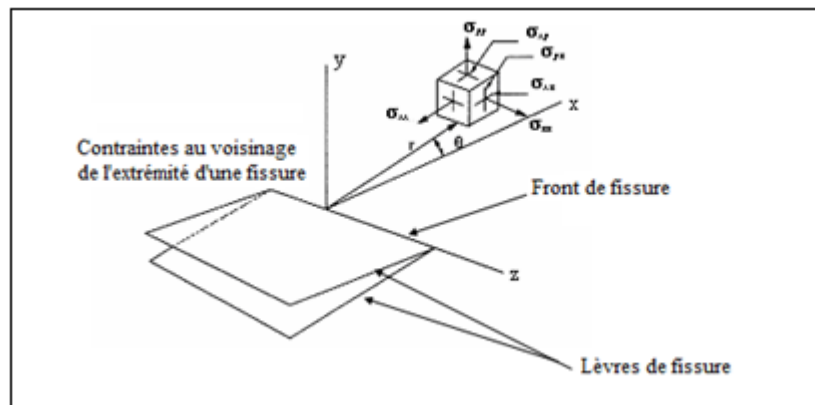


Figure 2.3. Champ de Contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure selon Irwin

Irwin propose que l'aire en dessous de la courbe $\sigma_{ys}(x)$ soit donnée par:

$$\int_0^{r_p} \frac{K_I dx}{\sqrt{2\pi x}} = 2\sigma_{ys} r_p \quad 2.10$$

Pour satisfaire l'équilibre → la fissure doit s'allonger de r_p

La résolution de $\int_0^{r_p} \frac{K_I dx}{\sqrt{2\pi x}} = 2\sigma_{ys} r_p$ donne la longueur de fissure : $r_p = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$

$$0 < r < r_p \Rightarrow \sigma_y = \sigma_{ys} \quad \text{et} \quad r > r_p \Rightarrow \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \quad 2.11$$

Le modèle d'Irwin : une longueur de fissure 2 fois plus grand que la méthode approchée.

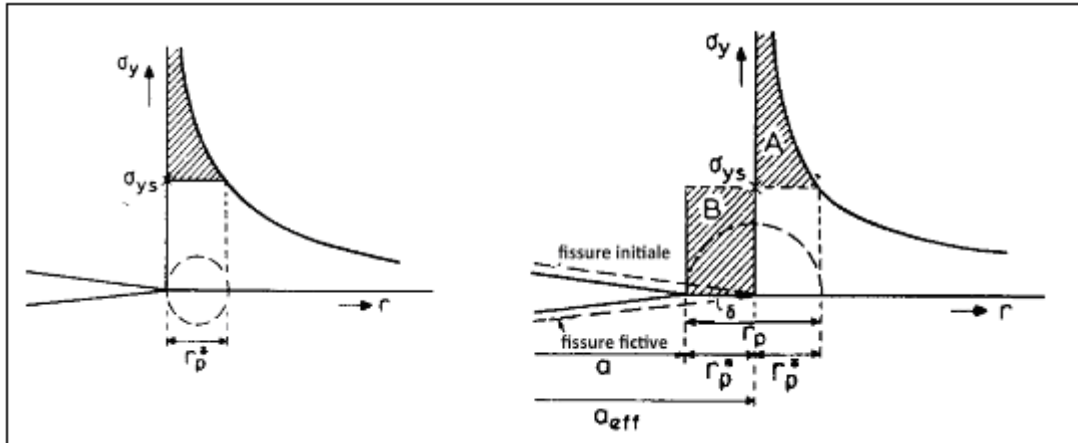


Figure 2.4. Première et deuxième évaluation de la zone plastique

2.3.3. Crack Tip Opening Displacement (CTOD)

En élastoplasticité, certains autres (Wells 1963) ont proposé d'utiliser l'ouverture de fissure comme paramètre de mécanique de la rupture. Le CTOD, ou écartement de fissure δ , a ainsi été défini à partir des déplacements de la pointe de fissure, mesurés à l'intersection de la frontière de la zone plastique avec les lèvres de la fissure. Il existe de nombreuses façons de calculer δ . Par exemple, Tracey a proposé de définir cet écartement à l'intersection de deux droites passant à 45° de l'axe et des lèvres de la fissure. L'ouverture de la fissure :

$$\delta = \frac{4}{\pi \cdot E} \frac{K_I^2}{\sigma_{ys}} \quad 2.12$$

Il est ensuite possible de relier le CTOD au taux de restitution d'énergie, on encre à l'intégration J en utilisant la solution asymptotique HRR (shih 1981).

$$\delta = (d_a (\sigma_y \cdot a)) \frac{J}{\sigma_a} \quad 2.13$$

Où d_a est un coefficient de proportionnalité sans dimension, et qui dépend fortement du coefficient d'érouissage a , et peu de la limite d'élasticité σ_y .

2.4. Facteur d'intensité de contrainte

L'expérience a montré que la progression des fissures et la résistance résiduelle d'une structure possédant un défaut sont très bien gouvernées par le facteur d'intensité des contraintes K . Donnons l'expression de K dans le cas d'une plaque infinie comportant une fissure de longueur $2a$.

Le facteur d'intensité de contrainte K uniquement fonction du chargement σ et de la géométrie, en particulier de la taille de fissure est solution d'un problème d'élasticité linéaire.

2.4.1. Solution de Muskhelishvili

Il s'agit d'un panneau « infini », contenant une fissure de longueur $2a$ selon l'axe x_1 , et sollicité en traction uniforme selon l'axe x_2 . Dans la pratique, un modèle de ce type pourra être raisonnablement utilisé dès lors que les dimensions de la fissure seront de 10 à 20 fois plus faibles que celle de la plaque. Il existe une solution analytique exacte de ce problème, sur l'axe $x_2 = 0$, en supposant un état de contraintes planes :

$$\text{- si } x_1 \geq a \quad \sigma_{22} = \sigma_{\infty} / \left(1 - (a/x_1)^2\right)^{1/2} \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} - \sigma_{\infty} \quad 2.14$$

$$\varepsilon_{22} = \left(\frac{\sigma_{\infty}}{E}\right) \left(\nu + \frac{1-\nu}{\left(1 - (a/x_1)^2\right)^{1/2}} \right) \quad 2.15$$

$$\text{- si } 0 \leq x_1 \leq a \quad [u_2] = 2u_2 = \left(\frac{4a\sigma_{\infty}}{E}\right) \left(1 - (x_1/a)^2\right)^{1/2} \quad 2.16$$

2.4.2. Solution asymptotique de Westergaard

Le problème précédent peut également être abordé en introduisant la «fonction d'Airy» $\Psi(x_1, x_2)$ telle que : $\sigma_{11} = \Psi_{,22}$; $\sigma_{22} = \Psi_{,11}$; $\sigma_{12} = \Psi_{,12}$. Les équations d'équilibre sont alors automatiquement vérifiées. En élasticité linéaire, le report de ces égalités dans les conditions de compatibilité $2\varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{22,22}$ conduit à chercher ψ comme solution de l'équation biharmonique $\Delta\Delta\psi = 0$. Ce problème se résoud par la méthode des fonctions complexes. Irwin a montré que le premier terme du développement limité est le même, à un facteur multiplicatif près, pour tous les problèmes correspondant à un mode d'ouverture donné. On introduit ainsi le facteur d'intensité de contrainte en mode I, K_I , tel que :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sigma_{22} \sqrt{2\pi.r} \right) \quad 2.1$$

2.5. Le taux de restitution d'énergie

Dans le cas où l'énergie cinétique est négligée, la puissance mécanique disponible pour ouvrir une fissure de surface A est égale à la variation de l'énergie potentielle mécanique Π . Cette contribution mécanique est appelée taux de restitution d'énergie. Elle peut se définir quel que soit le type de comportement.

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} \quad (\text{joule/m}^2) \quad 2.18$$

Cette énergie sert à créer de nouvelles surfaces libres, ce qui implique des apports d'énergie. En appelant γ^s l'énergie spécifique de rupture par unité de surface, il est donc nécessaire pour que la fissure se propage que la contribution mécanique équilibre au moins l'énergie dissipée (théorie de Griffith pour la rupture fragile), soit dans un milieu plan d'épaisseur unité :

$$\text{- propagation si : } G - 2\gamma^s \geq 0 \quad 2.19$$

$$\text{- arrêt si : } 0 \geq G - 2\gamma^s \quad 2.20$$

Le taux de dissipation d'énergie G peut être calculé par éléments finis ou mesuré à partir des courbes J - Δa . G décroît avec l'extension de fissure pour atteindre une valeur stationnaire car la plasticité sature dans la structure

Dans le cas d'une ouverture en mode I, on peut définir un taux de restitution d'énergie G_I qui, lorsqu'il atteint la valeur critique G_{Ic} (équivalente à deux fois l'énergie de création de surface libre du matériau), correspond à la propagation de la fissure. G_{Ic} et K_{Ic} (ainsi que G_I et K_I) sont reliés par les équations suivantes en déformations planes et contraintes planes :

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{EG_{Ic}}{1-\nu^2}} \quad \text{et} \quad K_{Ic} = \sqrt{EG_{Ic}} \quad 2.21$$

Lorsque l'hypothèse de plasticité confinée n'est plus réaliste, il est possible de rendre compte du comportement élastoplastique du matériau. Pour ce faire, on attribue à celui-ci un comportement élastique non linéaire tel que ses courbes Contrainte - Déformation demeurent inchangées. Dans le cadre de l'élasticité, il existe alors un potentiel élastique dérivant des

contraintes tel que: $\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$, avec W : la densité d'énergie élastique.

La terminologie, *taux de restitution de l'énergie*, est justifiée par le signe de G : lorsque la longueur de la fissure passe de (a) à $(a + da)$, le système voit son énergie passer de $\Pi(a)$ à $\Pi(a + da)$ (nous omettons provisoirement la dépendance par rapport au chargement, qui est le même dans les deux cas).

2.5.1. Taux de restitution d'énergie non linéaire

Rice a appliqué la théorie de la déformation pour analyser un solide fissuré, Il a démontré que le taux de restitution d'énergie non linéaire en mode I, peut être déterminé à partir d'une intégrale de contours indépendants du contour d'intégration, la valeur de cette intégrale est égale au taux de restitution d'énergie dans un matériau non linéaire, les variations d'énergie qui accompagnent une extension Δa d'une fissure dans un solide :

$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{elastique} + \Delta U \quad 2.24$$

Où : ΔU : l'énergie dépensée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa

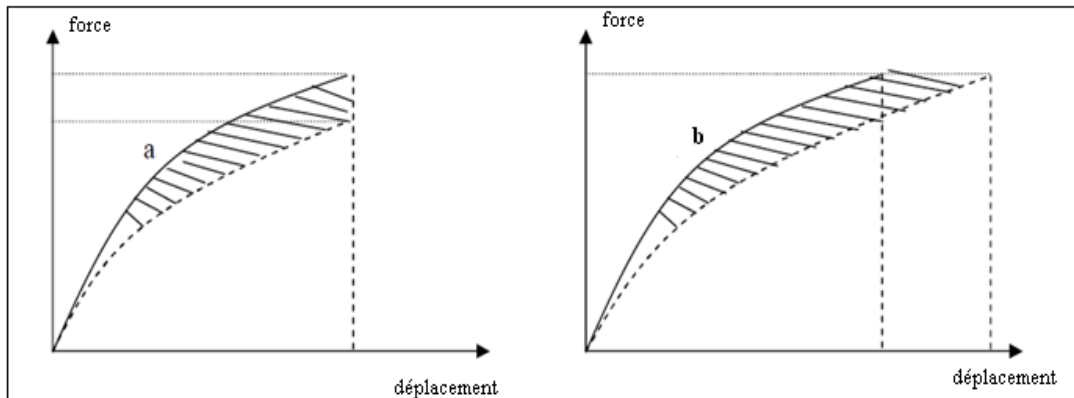
$$\Delta U = \Delta W_{séparation} + \Delta W_{plastification} \quad 2.25$$

$\Delta W_{plastification}$: Energie de plastification

$\Delta W_{séparation}$: Energie de séparation des surfaces

Considérons deux cas de propagation de fissure (figure 2.5) et calculons l'énergie nécessaire

- Propagation à déplacement imposé;
- Propagation à force imposée ;



a) Propagation à u

b) Propagation à P

Figure 2.5. Diagrammes Force – Déplacement

a) Propagation à déplacement $\Delta x = 0$

$$G = -\frac{dU}{da} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = -\int_0^x \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right) dx \quad 2.22$$

b) Propagation à force $\Delta P = 0$

$$G = -\frac{dU}{da} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = -\int_0^P \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right) dP \quad 2.23$$

2.6. Calcul du taux de restitution d'énergie par éléments finis

Dans cette section, nous nous intéressons à la modélisation de la rupture dans des matériaux ductiles : la propagation de la fissure. Nous nous focalisons sur l'implémentation numérique de la rupture dans le modèle éléments finis. Le problème posé est le suivant : un critère de rupture est vérifié en un ou plusieurs points de Gauss d'un élément. Cet élément est alors considéré comme rompu et ne participe donc plus à la raideur globale de la structure.

Trois grandes techniques de modélisation de propagation de fissure sont référencées dans la littérature avec les éléments finis traditionnels :

2.6.1. Méthode de l'intégrale J

Rice introduit une intégrale de contour J (Figure 2.6), dont la valeur est égale à la variation d'énergie nécessaire à la propagation de la fissure, et est équivalente au taux de restitution d'énergie G dans le cas de la plasticité confinée (Rice).

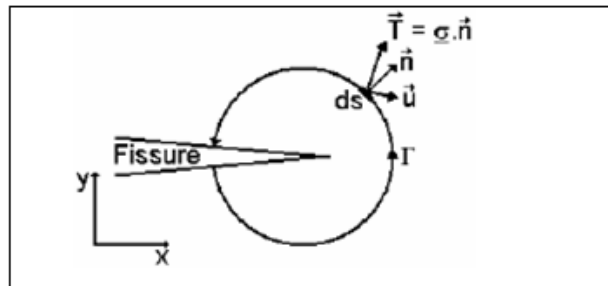


Figure 2.6. Contour d'intégration pour l'intégrale J en sommet de fissure.

Indépendante du contour choisi, cette intégrale a pour expression :

$$J = \int_{\Gamma} \left(W \vec{n} - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right) ds \quad 2.26$$

avec :

- Γ : contour arbitraire autour du sommet de fissure.
- \vec{n} : vecteur unitaire normal à Γ .
- \vec{T} : vecteur contrainte agissant sur Γ .
- \vec{u} : vecteur déplacement sur Γ .

Les travaux de Hutchison et Rice et Rosengren permettent de décrire, pour un matériau présentant une loi d'écroutissement en puissance, la singularité des champs des contraintes et des déformations en sommet de fissure:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \gamma \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad 2.27$$

avec :

- σ_0 et ε_0 : limites élastiques et la déformation.
- γ : constante caractéristique du matériau.
- n : coefficient d'écroissage.

Le rapport J/σ_0 est alors relié au « Crack Tip Opening Displacement » (CTOD) par une fonction de n . D'un point de vue expérimental, l'accès à la valeur de l'intégrale J se fait à partir de l'aire sous la courbe Contrainte-Déplacement, des dimensions de l'éprouvette, et de la distance de propagation de la fissure.

✓ **Cas de l'élastique parfaitement pastique** : en plasticité parfaite, Nguyen a proposé un critère de type Griffith généralisé $J_S \leq G_C$ où :

$$J_S = \lim_{\Gamma \rightarrow S} \int_{\Gamma} w(\varepsilon - \varepsilon^p) n_1 - n \cdot \sigma \cdot u_1 ds \quad 2.28$$

$$I_S = \lim_{\Gamma \rightarrow S} \int_{\Gamma} -w^*(\sigma) n_1 - n \cdot \sigma_{,1} \cdot u ds \quad 2.29$$

S désigne ici la surface de discontinuité des champs de vitesses lors de la propagation, On obtient les énergies potentielles E et complémentaire E^* partir de la densité d'énergie complémentaire : $w^*(\sigma) = \sigma : (\varepsilon - \varepsilon^p) - w(\varepsilon - \varepsilon^p)$

A l'état d'équilibre pour un champ de déformation plastique donné, ces deux énergies sont égales à la solution du problème d'équilibre, il est immédiat de montrer que

$$I_S = J_S = -\frac{\partial E}{\partial a} = -\frac{\partial E^*}{\partial a}$$

$$G + G^* = J_S + I_S \quad 2.30$$

✓ **Cas de l'écroissage** : le comportement est défini par l'énergie stockée isotherme $w(\varepsilon, \gamma)$ où γ désigne maintenant des paramètres internes. Les équations d'état définissent les forces associées aux paramètres d'état

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}, \quad A = -\frac{\partial w}{\partial \gamma}$$

$$G = J_{\Gamma} + \int_{\Gamma} A \cdot \gamma_{,1} d\Omega \quad G^* = I_{\Gamma} - \int_{\Gamma} A_{,1} : \alpha d\Omega$$

2.6.2. Méthode d'avancée réelle de fissure (RCE)

En travaillant à force imposée, on peut calculer G en calculant l'évolution de l'énergie élastique lors d'un petit incrément de longueur de la fissure. G s'obtient alors par lissage de la quantité : $\Delta W / \Delta a$.

Dans la pratique, la méthode consiste donc à effectuer deux ou trois calculs élastiques successifs à partir d'un maillage identique, mais sur lequel on relâche un ou plusieurs noeuds en fond de fissure entre les différents calculs. On peut travailler avec des éléments quadratiques courant, mais il ne faut surtout pas positionner la pointe de fissure sur un noeud milieu. Il est préférable de réaliser au moins deux déterminations (3 calculs) puis d'évaluer G par extrapolation quand $r \rightarrow 0$.

Cette méthode, basée sur un raisonnement physique, à l'avantage de bien s'adapter aux codes, tout en n'utilisant pas d'éléments spéciaux. Elle nécessite cependant un maillage fin en pointe de fissure et est très coûteuse en temps de calcul, puisqu'elle requiert au moins deux calculs pour une longueur de fissure donnée.

2.6.3. Méthode de fermeture virtuelle de fissure (VCCT)

La méthode VCCT est basée sur l'hypothèse que l'énergie libérée lorsqu'une fissure se propage d'une distance Δa est identique à l'énergie nécessaire pour refermer la fissure, sous un même effort externe. Quand une fissure est avancée d'une distance Δa , les G_I et G_{II} peuvent alors être déterminés par :

$$G_I = \frac{1}{2\Delta a} [Z_i \cdot (w_l - w_{l^*}) + Z_j \cdot (w_m - w_{m^*})] \quad 2.31$$

$$G_{II} = \frac{1}{2\Delta a} [X_i \cdot (u_l - u_{l^*}) + X_j \cdot (u_m - u_{m^*})] \quad 2.32$$

où :

X : Effort de réaction (linéique) selon l'axe X

Z : Effort de réaction (linéique) selon l'axe Z

u : Déplacement selon l'axe X

w : Déplacement selon l'axe Z

2.6.4. Méthode d'avancée (extension) virtuelle de fissure (VCE)

Cette technique, introduite par Parks en 1974 et Hellen en 1975, permet de calculer la variation d'énergie potentielle totale en introduisant une extension virtuelle de fissure δa . Le processus d'extension de la fissure est obtenu en déplaçant les points nodaux du réseau, plutôt qu'en ôtant les composantes de traction nodale à la pointe de la fissure et en procédant à une seconde analyse comme cela est fait dans la méthode d'extension réelle.

Cette méthode est consistante à séparer le noeud au front de fissure en deux noeuds superposés, chaque noeud est attaché à un côté différent de la fissure. Une liaison relie les deux noeuds et sert à mesurer les efforts de réaction entre eux. Deux noeuds supplémentaires sont placés de la même manière en avant du front de fissure pour mesurer les déplacements relatifs entre les faces de la fissure. Le principe de calcul en 2D.

Tout d'abord les efforts de réaction (R_I , R_{II}), les déplacements relatifs (U_I , U_{II}), et l'énergie potentielle initiale (E_0) des éléments qui contiennent les noeuds de pointe de fissure sont calculés. Puis, une avancée de la fissure est simulée par un déplacement des deux noeuds (rouge et bleu) d'une distance contrôlée par l'énergie potentielle (E_1) des mêmes éléments est recalculée.

Le taux de restitution d'énergie total est ensuite déterminé en tenant compte de la variation de la surface fissurée (dA) générée par la perturbation des noeuds :

$$G_t = -\frac{E_1 - E_0}{dA} \quad 2.33$$

La mesure des efforts de réaction et des déplacements relatifs, mesurés dans le repère de la fissure, permet de calculer les pourcentages relatifs en mode I et II. La répartition du G_t est alors possible :

$$G_I = -\frac{UI - RI}{(UI.RI + UII.RII)} G_t \quad 2.34$$

$$G_{II} = -\frac{UII - RII}{(UI.RI + UII.RII)} G_t \quad 2.35$$

On part de la formule donnant l'énergie potentielle (cas linéaire élastique), Cette méthode est basée sur la dérivation des équations d'état:

$$\Pi = \frac{1}{2} \{v\}' [K] \{v\} - \{v\}' \{F\} \quad 2.36$$

Le calcul de G donne :

$$G = -\frac{\partial \{v\}^t}{\partial a} \left(\frac{[K] \{v\}}{2} - \{F\} \right) - \frac{1}{2} \{v\}^t \frac{\partial [K]}{\partial a} \{v\} + \{v\}^t \frac{\partial \{F\}}{\partial a} \quad 2.37$$

Équilibre
absence de forces sur la fissure

On obtient ainsi :

$$G = -\frac{K_I^2}{E} = -\frac{1}{2} \{v\}^t \frac{\partial [K]}{\partial a} \{v\}$$

$$\Rightarrow G = -\frac{1}{2} \{v\}^t \left(\sum_{i=1}^{ne} \frac{\partial [k_i]}{\partial a} \right) \{v\} \quad 2.38$$

Le taux de restitution d'énergie Gp :

$$G_p = -\frac{1}{2} \{v\}^t \frac{\partial [K]}{\partial a} \{v\} \quad 2.39$$

Cette méthode a l'avantage de n'utiliser qu'un seul maillage, par contre elle nécessite un développement de code de dérivation des matrices de rigidité.

2.7. Le comportement des massifs rocheux à la rupture

Pendant leur vie, les ouvrages sont soumis à divers types de sollicitations extérieures monotones ou non monotones. La loi de comportement utilisée pour modéliser les roches et les sols, doit ainsi être en mesure de décrire le caractère non linéaire du comportement des roches, soumis à ces sollicitations.

Dans la pratique, diverses approches sont utilisées pour modéliser le comportement des roches dans les études géotechniques. Cependant, dans le cas général, des modèles capables de décrire le comportement de sol indépendamment d'un chemin de sollicitation particulier doivent être utilisés. Une grande partie de ces modèles est basée sur la théorie de l'élasticité et de la plasticité. Les plus simples correspondent à des modèles de comportement élastiques linéaires (isotropes ou anisotropes) ou élastoplastique parfait (élasticité linéaire associée à un critère de plasticité et à un potentiel plastique)

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux propriétés physiques et géométriques des roches puis nous étudierons leur comportement à la rupture.

2.7.1. Caractéristiques et représentations géométriques des discontinuités des massifs rocheux

Les caractéristiques spécifiques des massifs rocheux sont en grande partie liées à la présence des discontinuités; à leurs caractéristiques géométriques (orientation, densité, persistance...).

2.7.1.1. Différents type de discontinuités

On distingue les discontinuités majeures (d'extension importante)

- faille
- discordance
- contact veine

De discontinuités mineures

- joints de stratifications;
- joints de schistosité;
- diaclases;
- fractures;
- clivages.

2.7.1.2. Propriétés des discontinuités

Outre leur nature; les discontinuités vont pouvoir être identifiées par un certain nombre de caractéristiques (qualitatives, propriétés physiques et mécaniques)

- orientation;
- distance ou espacement;
- persistance, extension ou étendue;
- ouverture et continuité de l'ouverture;
- remplissage (et nature du remplissage) ou absence de remplissage;
- présence d'eau;
- nature et état des épontes (i.e. des parties de la roche de part et d'autre de la discontinuité);
- morphologie des épontes : ondulation et rugosité;
- résistance mécanique et autres propriétés mécaniques.

Toutes ces caractéristiques vont Influences les propriétés du massif rocheux.

Des discontinuités ayant des caractéristiques proches et une orientation semblable et dont on peut penser qu'elles ont été générées au cours d'un même événement tectonique pourront être regroupées au sein d'une même "famille".

2.7.2. Comportement plastique des sols

D'après les essais réalisés sur des matériaux, lorsque la sollicitation dépasse un certain seuil, des déformations irréversibles ou plastiques apparaissent et la courbe chargement-déchargement (au cours d'un cycle) est différente de la courbe de chargement initial (Fig. 2.7).

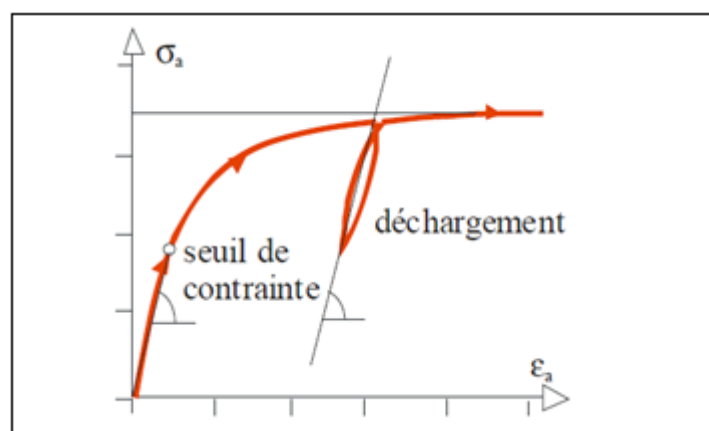


Figure 2.7. Courbe chargement-déchargement

Historiquement, l'existence de déformations plastiques ou permanentes a été mise en évidence par Coulomb, qui publia en 1784 un mémoire intitulé *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal* (cité par Mestat, 1993). Ce type de comportement macroscopique est caractéristique de la plupart des matériaux (métaux, bétons, sols et roches). Au niveau microscopique, l'origine des déformations permanentes dépend du matériau. Dans le cas des sols, celles-ci proviennent de la modification de l'assemblage des grains ou des particules solides.

L'introduction du terme « déformation plastique » nécessite celui de la détermination d'un seuil de contrainte (σ^{seuil}) à partir duquel les déformations irréversibles apparaissent. En adoptant le concept de déformation plastique dans les calculs, la déformation observée est désormais appelée « déformation totale » et peut être décomposée en :

- déformation élastique,
- déformation plastique.

L'expression de la déformation totale s'écrit alors :

$$\varepsilon^{totale} = \varepsilon^{élastique} + \varepsilon^{plastique} \quad 2.39$$

En pratique, il est difficile de mesurer les déformations plastiques. Leur quantification est réalisée par la relation indirecte suivante :

$$\varepsilon^{plastique} = \varepsilon^{totale} - \varepsilon^{élastique} \quad 2.40$$

avec :

- ε^{totale} : la déformation totale mesurée directement lors de l'essai,
- $\varepsilon^{élastique}$: la déformation élastique calculée à partir de la définition des modules.

Dans le cas du comportement élastique linéaire :

$$\varepsilon^{élastique} = \frac{\sigma^{seuil}}{G} \quad 2.41$$

Dans le cas du comportement élastique non-linéaire :

$$\varepsilon^{élastique} = \int_{\sigma_0}^{\sigma^{seuil}} \frac{d\sigma}{G(\gamma, \sigma, p)} \quad 2.42$$

$G(\gamma, \tau, p)$ est l'expression de la dépendance du module en fonction de la pression de confinement (p), du niveau de déformation de cisaillement (γ) ou de la contrainte tangentielle (τ).

2.7.3. Lois de comportement des roches

La configuration exprimable de référence est l'essai de compression simple, essai le plus couramment utilisé par l'étude du comportement mécanique des roches. Il permet de définir la déformabilité de la matrice rocheuse et surtout d'estimer la résistance maximale de celle-ci.

L'allure générale de la courbe contrainte-déformation conduit à distinguer le comportement de la roche avant et après un pic de résistance.

Le comportement des roches est complexe et il est courant de décrire leur comportement comme élastique-plastique avec trois phases quand le chargement est augmenté progressivement.

- Une phase élastique initiale où la déformation est réversible;
- Une phase intermédiaire de plasticité "restreinte" où les déformations restent limitées;
- Une phase de plasticité "illimitée"

Aucun modèle mathématique ne peut complètement décrire le comportement complexe des roches, des simplifications sont nécessaires pour pouvoir effectuer des calculs pratiques.

Les modèles rhéologiques utilisés pour décrire les comportements mécaniques à l'échelle macroscopique peuvent être grossièrement classés en deux catégories: ceux adaptés au comportement de matériaux « *ductiles* », et ceux au comportement de matériaux « *fragiles* ». Dans la première catégorie, on trouve essentiellement les roches tendres, mais aussi les sols (sableux ou argileux), soumises à de fortes contraintes. Dans la deuxième catégorie, on trouve essentiellement les roches dures, mais aussi certaines roches tendres et argiles fortement surconsolidées, soumises à de faibles contraintes.

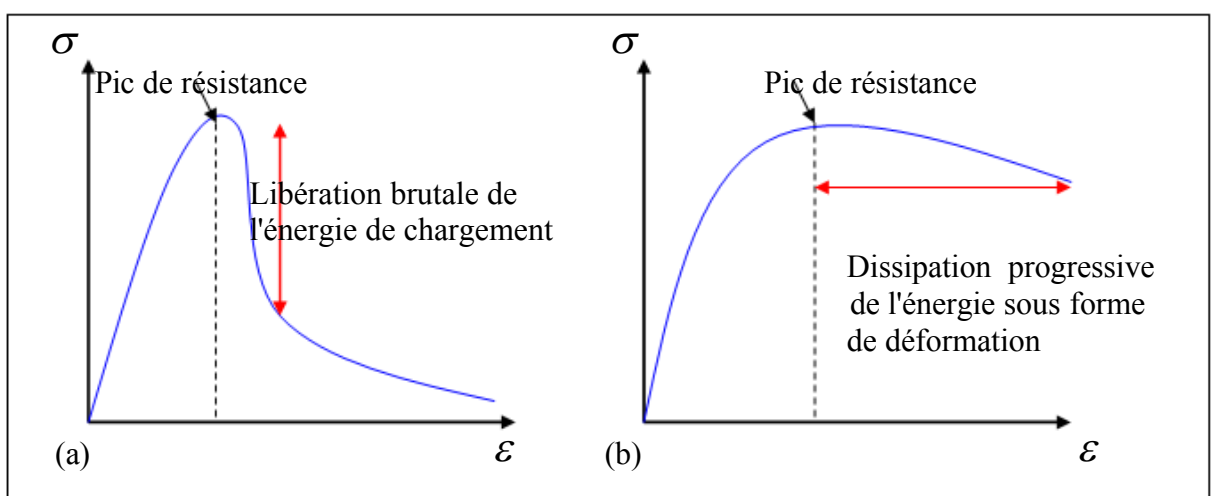


Figure 2.8. Courbe contrainte-déformation pour des roches fragile (a) et ductile (b)

Le mode de rupture par cisaillement est privilégié lorsque l'énergie durant le chargement peut être dissipée sous forme de déformations ou de déplacement. C'est ce qu'il se produit dans les roches initialement fissurées, poreuses ou plastique, qui sont déformables et présentent un comportement ductile.

- **Comportement caractéristique des roches**

Le comportement de l'échantillon divisé en six phases. Chaque phase ainsi définie est plus ou moins apparente ou étendue selon le type de roche, elle dépend des caractéristiques intrinsèques de la roche.

- Phase 1: Serrage

Cette phase concerne les très faibles niveaux de contrainte et s'accompagne d'une compacte de l'échantillon. Cette phase est dite "serrage" car elle traduit la fermeture initiale élastique ou inélastique des fissures préexistantes du matériau, ce dernier devenant de plus en plus rigide quant les lèvres des fissures vient en contact mutuellement.

- Phase 2: phase initiale

Dépassant rarement 40% de la résistance à la rupture, cette phase correspond à la partie linéaire de la courbe contrainte-déformation axiale. La contrainte est supérieure à la pression de fermeture des fissures. Le comportement de l'échantillon testé est encore celui d'une roche vierge. C'est le domaine dans lequel le comportement est "quasi-élastique".

- Phase 3: phase d'endommagement

Le niveau de contraintes correspondant à cette phase se situe généralement entre 30 et 60% de la résistance à la rupture. Cette phase marque l'initiation et la propagation de la fissuration. Pour certains auteurs, à ce stade, la propagation est souvent qualifiée de "stable" car si le chargement reste constant, aucune évolution significative des déformations n'est observée. A ce niveau de déformation, la courbe contrainte-déformation axiale est encore linéaire.

- Phase 4: intensification de la fissuration

Au-delà de 50-55% de la résistance à la rupture, une augmentation importante de l'activité de fissuration est fréquemment enregistrée (augmentation du nombre et de la longueur des nouvelles fissures). La pression de confinement d'un essai triaxial a un effet stabilisateur sur le développement de ces fissures: elle s'oppose et inhibe leur croissance.

- Phase 5: Coalescence des fissures

La coalescence des fissures s'amorce et de nouvelles fissures s'associent aux anciennes. Cette phase se situe entre 70 et 90% de la résistance à la rupture.

- Phase 6: propagation instable de la microfissuration

Cette phase débute à un niveau de contrainte qui varie de 70% de la résistance. Cette phase est associée au développement, usuellement qualifié de "instable" de la fissuration et à une augmentation de la dilatace. La notion d'instabilité traduit le fait que, sous un chargement constant, les déformations de la roche se poursuivent pour mener à la rupture.

CHAPITRE

III

Modélisation numérique par la méthode des
éléments finis (MEF)

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous exposons la stratégie numérique adoptée ainsi que les moyens utilisés pour implémenter la méthode de calcul des fissurations des matériaux ductiles présentée dans les deux chapitres précédents. Cette implémentation s'appuie sur le code de calcul par éléments finis mixte. Sachant que l'interface d'un matériau présente une partie cohérente et une partie fissurée.

Nous avons utilisée un programme pour l'analyse de plusieurs exemples des matériaux ductiles fissurée. Le programme a été développé par le docteur Hamoudi **Bouzerd** [1], notre intervention réside dans l'ajout de certaines sous-routines et principalement l'introduction d'une méthode non linéaire matérielle qui est la *méthode d'intégration d'écoulement (méthode d'Euler explicite)* [2] [6].

H. Bouzerd a proposé un élément fini d'interface mixte RMQ-7 pour résoudre les problèmes interface.

La complexité des problèmes de mécanique a poussé les ingénieurs à penser à concevoir des programmes informatiques de plus en plus puissants et rapide, pour répondre à leurs besoins, qui ne cessent de se développer et aux problèmes qui s'impose de jour en jour. Le code CASMIC est parmi les programmes qui ont évolués et ont fini à ce niveau pour résoudre des problèmes mécaniques. Le code CASMIC est un outil de calcul basé sur la méthode des éléments finis disposant d'un langage jouant le rôle d'interface de communication, qui est le langage Fortran.

Quatre programmes constituent le noyau du CASMIC, Il s'agissait :

- Programme : maillage.for
- Programme : donnée.for
- Programme : elemh.for
- Programme de visualisation des résultats : bifis.for

L'apparition de la méthode des éléments finis a permis d'étudier la mécanique de la rupture d'un point de vue numérique, proposant ainsi des solutions plus précises à des problèmes plus complexes. Apparurent alors une multitude de méthode permettant de calculer les facteurs de contraintes, le taux de restitution d'énergie. Parmi ces nombreuses méthodes, les plus facilement.

Les principales hypothèses de travail sont les suivantes :

- La limite d'élasticité σ_y ;
- Règle d'écroutissage isotrope (Loi de Prandtl Reuss);
- Le critère de plasticité de Von Mises, la fonction de charge: $f(\sigma, a) = J(\sigma) - \sigma_y - R(p)$
- Le type du problème à étudier : contrainte plane ;
- Matériaux standards généralisés (plasticité associée).

Matériau isotrope, on introduit donc classiquement le module de Young E et le coefficient de Poisson ν . Les propriétés élastiques (modules élastiques) étant supposées raisonnablement non modifiées par le très faible taux de plastification subit par le matériau.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Rappelons, dans un premier temps, les équations du modèle élastoplastique.

$$\begin{cases} \sigma = [C] \cdot \varepsilon \\ \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \\ \varepsilon^p = \lambda n = \lambda (\partial f / \partial \sigma) \\ f(\sigma) = 0 \end{cases} \quad 3.1$$

3.2. Le principe variationnel en élastoplastique

- **Le principe à deux champs de Hellinger-Reissner**

L'idée de base de ce principe apparaît pour la première fois dans les travaux de Hellinger. Ses travaux seront repris plus tard, tout d'abord par Prange et finalement par Reissner qui donne sa forme définitive à ce principe variationnel.

Bien qu'historiquement antérieure, la fonctionnelle à deux champs de Hellinger-Reissner peut se déduire de celle de Fraeijs de Veubeke-Hu-Washizu en imposant les relations constitutives comme conditions essentielles. Elle s'écrit :

$$\Pi^{HR}(u, \sigma) = \int_{\Omega} \sigma^T \partial u - \Phi(\sigma) - f^T u d\Omega - \int_{\Gamma_{z_u}} (u - u_{\Gamma})^T N^T \sigma d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{\Gamma}^T u d\Gamma \quad 3.2$$

La densité d'énergie complémentaire: $\Phi(\sigma) = \sigma^T \varepsilon - W(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sigma^T [C]^{-1} \sigma$

Comme précédemment, les conditions de compatibilité et d'équilibre naturelles sont obtenues respectivement par la variation des contraintes et des déplacements.

Le principe de Hellinger-Reissner permet d'introduire une discrétisation fonctionnelle à la fois sur le champ de déplacements et sur le champ de contraintes dans Ω . Cela permet de répartir le poids de l'approximation à la fois sur la satisfaction des conditions d'équilibre et de compatibilité.

Ce principe est à la base des méthodes d'éléments finis de type mixte. Ces méthodes ont été introduites initialement par Hermann en 1967. Il présente pour la première fois dans cette référence un élément de plaque triangulaire dérivant du principe de Hellinger-Reissner.

Depuis lors, de nombreux éléments finis de type mixte ont été développés pour d'autres types de problèmes.

- **Principe des incréments des contraintes à deux champs**

En partant de la forme incrémentale de la fonctionnelle de Hellinger-Reissner (3.1), on relaxe la condition de consistance plastique (1.40) au moyen d'un multiplicateur de Lagrange. En faisant varier cette fonctionnelle par rapport aux incréments de contraintes, il apparaît que ce multiplicateur de Lagrange est équivalent au multiplicateur plastique λ . On obtient ainsi la fonctionnelle à deux champs :

$$\Pi(\dot{\sigma}, \dot{\lambda}) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \dot{\sigma}^T [C]^{-1} \dot{\sigma} + \gamma \dot{\lambda} \left(a^T \dot{\sigma} - \frac{A^T \dot{\lambda}}{2} \right) \right] d\Omega - \int_{\Gamma_u} \left(N^T \dot{\sigma} \right)^T \dot{u}_{\Gamma} d\Gamma \quad 3.3$$

De cette fonctionnelle, on tire le principe variationnel à deux champs des incréments de contraintes: *Parmi tous les $\dot{\sigma}$ SA (statique admissible) et $\dot{\lambda} \geq 0$, la solution est telle que $\delta J_2 = 0$*

On montre en effet très facilement que la variation de cette fonctionnelle par rapport aux incréments de contraintes conduit à l'équation des travaux virtuels et que la variation par rapport au multiplicateur plastique restitue la condition de consistance.

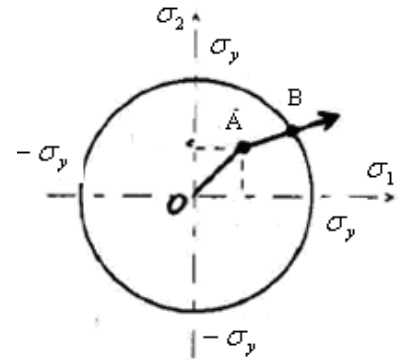
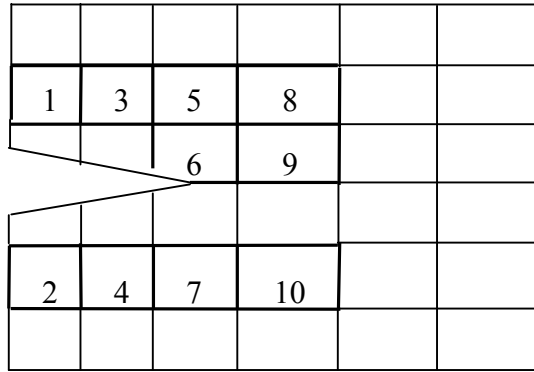
3.3. Structure générale du modèle (calcul élastoplastique)

3.3.1. Calcul élastique :

- Déterminer la matrice du comportement élastique et la matrice de rigidité élastique:

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix}, \quad [K] = \int [B]^T [C] [B] dv$$

- Calculer les degrés de liberté élastiques selon la formule suivant : $\{u, \sigma\} = [K]^{-1} \{F\}$ (sauvegarder dans un fichier sol). Le champ des contraintes élastiques des éléments traversés par la fissure (sauvegarder dans le fichier 12).



Exemple : 10 éléments traversés par la fissure

3.3.2. Calcul plastique :

3.3.2.1. La frontière élastique initiale (la limite d'élasticité **initiale**) $\sigma_{yi} = \sigma_y$

- * Choix d'un point de départ " point A" (à l'intérieur de la surface)

- Le point "A" au fond de la fissure :

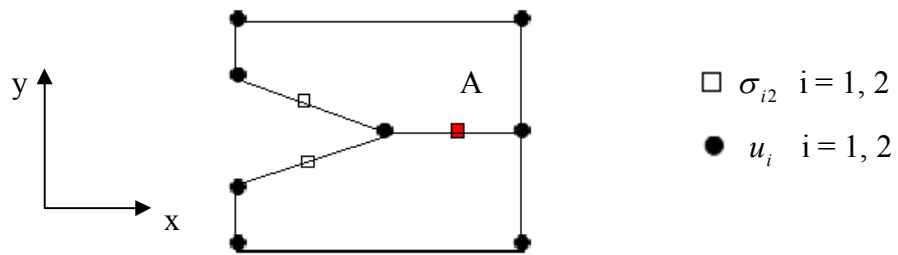


Figure 3.1. Elément RMQ-7

- Calcul des contraintes déviatoriques s_{12}^A, s_{22}^A

$$s_{ij}^A = \sigma_{ij}^A - (I_1/3)I \quad \text{avec} \quad I_1 = \sigma_{11}^A + \sigma_{22}^A$$

$$J(s_A) = \sqrt{(3/2)s_{ij}^A s_{ji}^A}$$

- Détermination du critère de plasticité (Von Mises) tel que :

$$f(\sigma_A) = J(s_A) - \sigma_y < 0$$

- Calcul de la direction d'écoulement n_A .

$$n_A = \frac{\partial f(\sigma_A)}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^A}{J(s_A)}$$

* Détermination du prédicteur élastique (post-élastique) "point C"

Le nouvel état de contrainte est donné par une prédiction élastique diminuée d'une relaxation plastique. La prédiction élastique est donnée par :

$$\Delta \sigma_e = [C] \Delta \varepsilon$$

Déterminer les contraintes à partir des contraintes élastiques du fichier 12.

$$\{\sigma_C\} = \{\sigma_A\} + \{\Delta \sigma_e\}$$

Choix de l'incrément de la déformation totale $\Delta \varepsilon$

Si ce prédicteur se trouve à l'intérieur de la surface de charge, le matériau demeure dans le domaine élastique au cours du chargement. Dans ce cas, il n'y a pas besoin d'intégrer les relations constitutives et les contraintes effectives sont données par : $\{\sigma_C\} = \{\sigma_A\}$

$$f(\sigma_C) = f(\{\sigma_A\} + \{\Delta \sigma_e\}) < 0$$

Si le prédicteur élastique est en dehors de la surface de charge, il faut alors utiliser une procédure d'intégration numérique des équations constitutives qui divise la correction de déformation totale en une partie élastique et une partie plastique. Nous avons utilisée une technique *explicite*.

$$f(\sigma_C) = f(\{\sigma_A\} + \{\Delta \sigma_e\}) > 0$$

* Détermination du point de première plastification "point B" (sur la surface)

On cherche l'intersection de la trajectoire du chargement avec le critère de plasticité au point B, à partir duquel l'écoulement plastique prend effet, il s'agit de trouver la solution de l'équation :

$$f(\sigma_B) = f(\{\sigma_A\} + \alpha \{\Delta\sigma_e\}) = 0 \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$\Delta\sigma_B = \alpha \{\Delta\sigma_e\} \quad \text{donc} \quad \sigma_B = \sigma_A + \Delta\sigma_B$$

$$J(s_B) = \sqrt{(3/2) s_{ij}^B s_{ji}^B}$$

$$\text{Calcul du critère de plasticité : } f(\sigma_B) = J(\sigma_B) - \sigma_y = 0 \quad \Rightarrow J(\sigma_B) = \sigma_y$$

Calcul de la direction d'écoulement n_B .

$$n_B = \frac{\partial f(B)}{\partial \sigma} = \frac{3 s_{ij}^B}{2 J} = \frac{3 s_{ij}^B}{2 \sigma_y}$$

La matrice du comportement élastoplastique $[C]$

$$[C]_B = [C] - \frac{[C]\{n_B\}\{n_B\}^t [C]}{\{n_B\}^t [C]\{n_B\} + h} \quad h = \left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\}^t [L] \left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\}$$

- Détermination de la matrice de rigidité élastoplastique (tangent) $[K] = \int [B]^t [C] [B] dv$, et déterminer les degrés de liberté élastoplastique selon la formule suivant :

$$\{u, \sigma\} = [K]^{-1} \{F\} \text{ (sauvegarder dans un fichier sol).}$$

On détermine alors $\Delta\lambda$ en écrivant la stationnarité de f : $df = 0$.

$$\Delta\lambda_B = \frac{2}{3} n_A : \Delta\varepsilon > 0$$

* Calcul de l'écoulement plastique "point D"

La résolution du système d'équations (1) peut se faire en extrayant soit la correction de multiplicateur plastique $\delta\Delta\lambda$.

$$f(\sigma_D) = f(\{\sigma_B\} + \{\Delta\sigma_D\})$$

Avec :

$$\Delta\sigma_D = [C]_B \{\Delta\varepsilon\} = [C]^e \{\Delta\varepsilon\} - \Delta\lambda_{(D)} [C]^e \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_B$$

Donc :

$$\{\sigma_D\} = \{\sigma_B\} + \{\Delta\sigma^e\} - \Delta\lambda [C]^e \{n_B\}$$

$$f(\sigma_D, a) = J(\sigma_D) - \sigma_{yi}$$

* Calcul la déformation plastique: $\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda_p n$

Cas N°1:

Si $f(\sigma_D) < 0$ et $df(\sigma_D) < 0 \Rightarrow$ Comportement élastique

$$[K] = \int_{V_e} [B]^t [C] [B] dV$$

Cas N°2:

Si $f(\sigma_D) = 0$ et $df(\sigma_D) = 0 \Rightarrow$ écoulement plastique (il faut vérifier)

$$[\bar{K}] = \int_{V_e} [B]^t [\bar{C}] [B] dV$$

Cas N°3:

Si $f(\sigma_D) > 0$ et $df(\sigma_D) < 0 \Rightarrow$ il faut faire un rabattement

$$\{\sigma_E\} = \{\sigma_D\} - \delta\lambda_{PD} [C] \{n_D\}$$

Avec
$$\delta\lambda_{PD} = \frac{f(\{\sigma_D\})}{\left\{ N_D^T [C] \{n_D\} + H \right\}_D}$$

$$[\bar{K}] = \int_{V_e} [B]^t [\bar{C}] [B] dV$$

3.3.2.2. La frontière élastique actuelle (la limite d'élasticité **actuelle**) $\sigma_{yi+1} = \sigma_{yi} + H\varepsilon^p$

Décharger et charger avec un changement de la limite élastique initiale.

- Déterminer la limite d'élasticité actuelle σ_{yi+1}

$$\sigma_{yi+1} = \sigma_{yi} + R(p) \quad R(p) = H\varepsilon^p$$

H est une caractéristique du matériau (module d'écroutissage), $H=0$ (comportement élastique parfaitement plastique).

- Déterminer le critère de plasticité avec Écrouissage isotrope (Loi de Prandtl Reuss) tel que :

$$f(\sigma, R) = J(s) - (\sigma_{yi+1}) = 0$$

- Détermination des contraintes et les déformations plastiques à partir des données élastiques du fichier sol, calculer la matrice de rigidité $[K] = \int [B]^T [C] [B] dv$, et déterminer les degrés de liberté plastique selon la formule suivant : $\{u, \sigma\} = [K]^{-1} \{F\}$ Et continue de la même manière jusqu'à le nombre des incréments considérer $\sigma_n = \sigma_{n-1} + H\varepsilon^p$

3.3.3. L'évaluation du taux de restitution d'énergie

L'utilisation de l'élément RMQ-7, associé aux hypothèses que la structure est constituée de matériaux de comportement élastique parfaitement plastique, permet de n'introduire qu'un seul maillage pour le calcul du taux de restitution d'énergie

en effet le nœud déplacement intermédiaire de l'élément RMQ-7 est associée à la pointe de fissure, et par conséquent la longueur de fissure « a » peut être augmentée d'une quantité δa en agissant à l'intérieur strict de l'élément de fissure par translation du nœud pointe de fissure sans perturber le reste du maillage

δa est petite par rapport aux dimensions de l'élément de fissure donc : $v(a) = v(a + \delta a)$

$$G = - \frac{\Pi(a + \delta a) - \Pi(a)}{\delta a}$$

L'énergie de déformation s'écrit :

$$\Pi = \Pi^e + \Pi^p \quad \text{ou} \quad \Pi = \Pi^{ep}$$

$$\Pi^{ep} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{ne} \{v\}_i^t [K] \{v\}_i$$

L'expression du taux de restitution d'énergie G_p devient :

$$G_p = - \frac{1}{2\delta a} \sum_{i=1}^{ne} \{v\}_i^t \left[[K](a + \delta a) \right] - [K](a) \{v\}_i$$

Lors du calcul numérique le choix de la variation de la longueur de fissure Δa est d'une importance capitale le rapport $\Delta a/a$ et nous avons constaté une bonne stabilité entre 1/100 et 1/1000.

Remarque : la matrice du comportement (élastique, tangent) et les ddl sont calculés dans le programme Bifis.for. La matrice de rigidité (élastique, tangent) et le taux de restitution d'énergie sont calculés dans le programme elemh.for.

3.4. Critères d'arrêt :

La boucle de calcul continue jusqu'à ce que la norme du résidu soit inférieure à une valeur de limite. Trois résidus sont donc normalement à vérifier afin de garantir la convergence : résidu l'équation d'écoulement, résidu sur le critère et résidu sur la loi d'écrouissage. Pour contrôler les précisions d'intégration de la loi d'écrouissage, de la loi d'écoulement et du critère, il est donc nécessaire d'introduire trois critères.

Ortiz se limite à un seul critère d'arrêt de Newton défini à partir du résidu sur le critère. Dans Abaqus, ajoute un critère sur la loi d'écoulement non pas défini à partir de la norme du résidu, mais à partir de la norme de la correction de l'incrément de déformation plastique.

Ce critère d'arrêt à deux conséquences : le résidu doit être faible pour que la correction reste petite. Dans Abaqus calculant exactement la loi d'écrouissage n'introduit pas de résidu sur celle-ci (il serait automatiquement nul). Notons que dans le cas d'une prise en compte du résidu de la loi d'écrouissage, l'actualisation de la variable d'écrouissage à partir de la correction n'étant pas à résidu nul, implique un résidu non nul dans le cas non-linéaire.

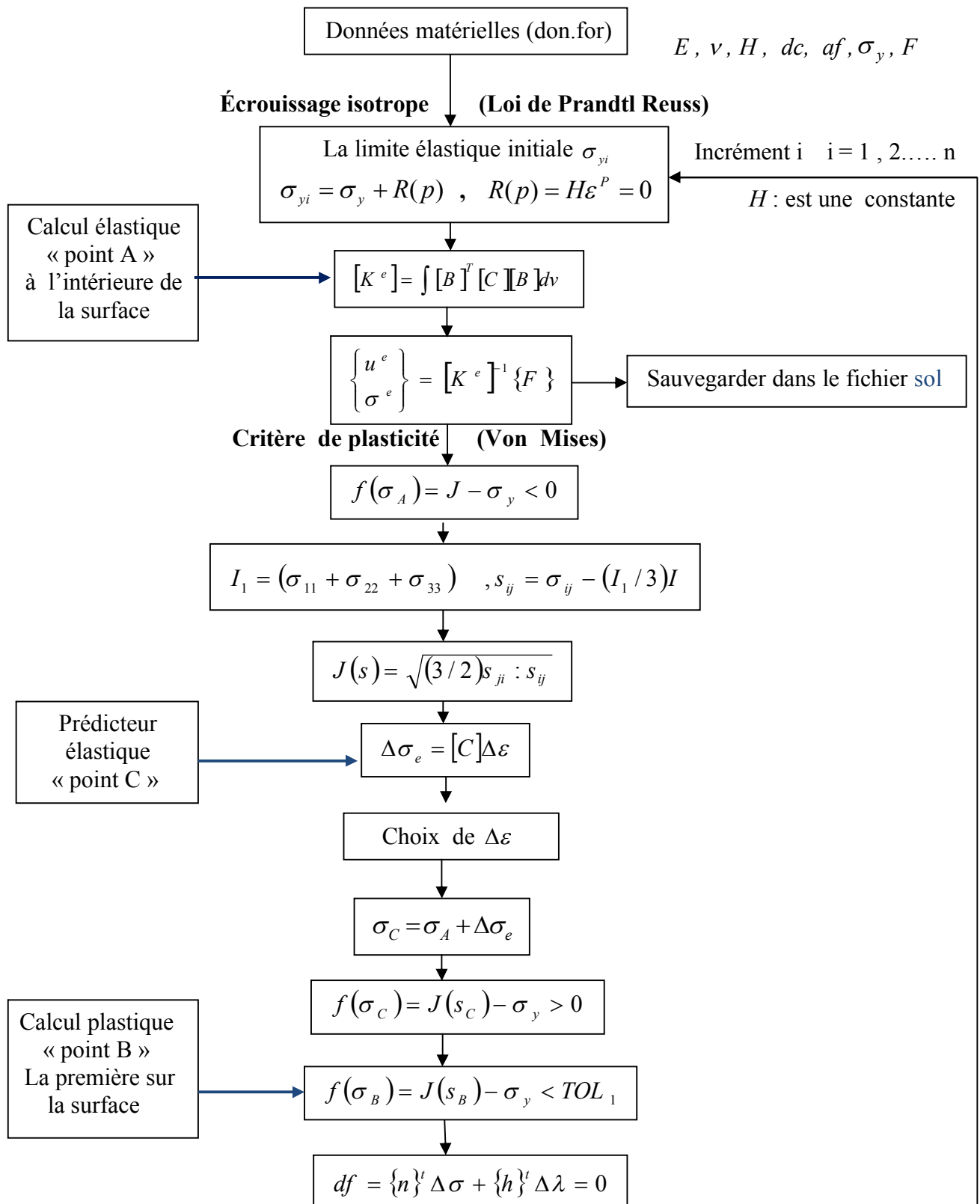
La convergence, dans Abaqus garantit donc le respect d'une précision donnée : le critère, la loi d'écrouissage, la loi d'écoulement et la stabilisation du schéma (l'amplitude de la correction devant rester petite). Ceci peut être exprimé sous la forme suivante :

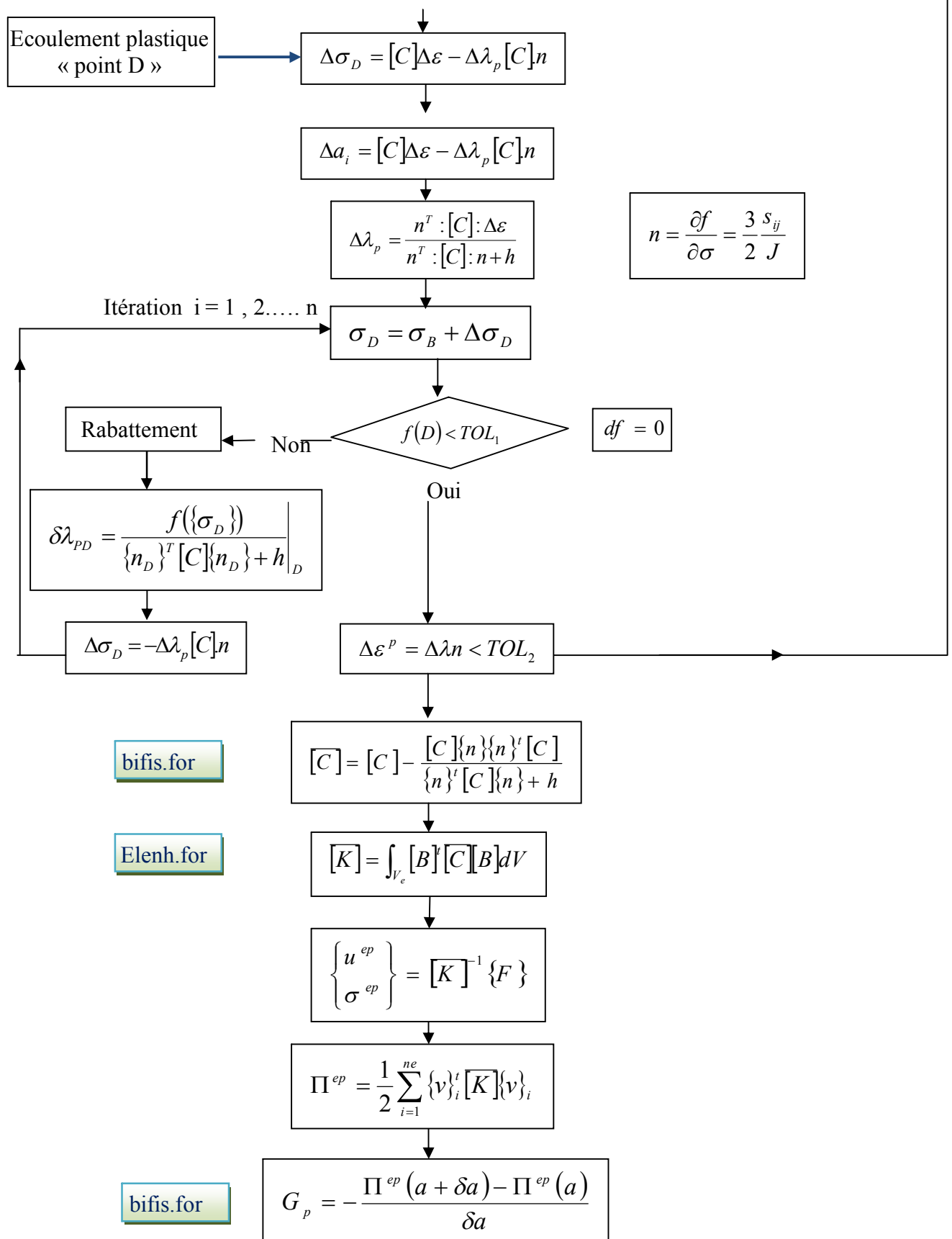
$$|f| < TOL_1 \quad \text{et} \quad \Delta \varepsilon_p < TOL_2$$

TOL_1 est fixée par Viet-Dung LE [14] à 10^{-7} *limite élastique. $TOL_2 = 10^{-7}$ *limite élastique/module d'Young, où TOL_1 et TOL_2 sont des valeurs petites par rapport à la quantité considérée.

Dans ce travail nous avons fixé le TOL_1 à 10^{-6} *limite élastique.

3.5. L'algorithme élastoplastique avec écrouissage isotrope





3.6. Conclusion

Ce chapitre a présenté la technique d'intégration numérique des modèles élastoplastique avec écrouissage isotrope. Les équations constitutives de ce type de modèle ainsi que leurs expressions discrétisées sont tout d'abord présentées. On limite l'étude à des problèmes d'évolution statique dans l'hypothèse des petites perturbations. Nous verrons cependant que le comportement plastique dépend du chemin de chargement (contrainte), c'est-à-dire de l'histoire des déformations plastiques.

Nous rappelons tout d'abord brièvement les concepts et relations fondamentaux liés à la théorie de la plasticité en petites perturbations. La méthode de résolution de problèmes non-linéaire par un processus incrémental.

Nous utilisons ici une approche énergétique de la mécanique de la rupture élastoplastique. On définit un paramètre, appelé « G_p », qui est un taux de restitution d'énergie, valide dans le cadre de l'élastoplasticité incrémentale.

CHAPITRE IV

Validation du modèle choisi

4.1. Exemple d'application

Dans ce travail, on considère une plaque pré entaille, sollicitée à la traction (mode I), provoquant une ouverture de la fissure. La plaque a été discrétisée par éléments finis. La simulation est faite à l'aide du code de calcul CASMIC, en appliquant une procédure de calcul en respectant les étapes de calcul décrites par le code et les résultats sont ensuite validés par des résultats bibliographiques [13].

Les caractéristiques de la plaque (figure 4.1) selon le modèle choisi sont les suivantes:

- ✓ La charge appliquée est : 60N, 120N, 160N, 200N, 240N, 280N, 320N et 360N.
 - ✓ Dimensions de la plaque:
 - Largeur : 10 mm ;
 - Longueur : 30 mm.
 - ✓ Dimensions de la fissure :
 - Longueur $a_f = 5$ mm.
 - ✓ Module de Young : $E = 230$ GPa.
 - ✓ Coefficient de poisson $\nu = 0.293$.
 - ✓ Limite élastique : $\sigma_y = 670$ MPa.
 - ✓ Le rapport $\Delta a/a = 1/1000$ donc : $dc = 1000$.
 - ✓ Le comportement est élastique parfaitement plastique.
-
- **Conditions aux limites :**
 - ✓ CL1 = bloque suivant X DP₁, AP₂, CP₄, BP₄;
 - ✓ CL2 = bloque UY P₄ ;
 - ✓ CL3 = bloque déplacements u_1 et u_2 , rotations u_{12} AB;
 - ✓ CL4 = bloque contraintes σ_1 et σ_2 P₁P₃, P₂P₃ ;
 - ✓ CLTotale = CL1, CL2, CL3 et CL4.

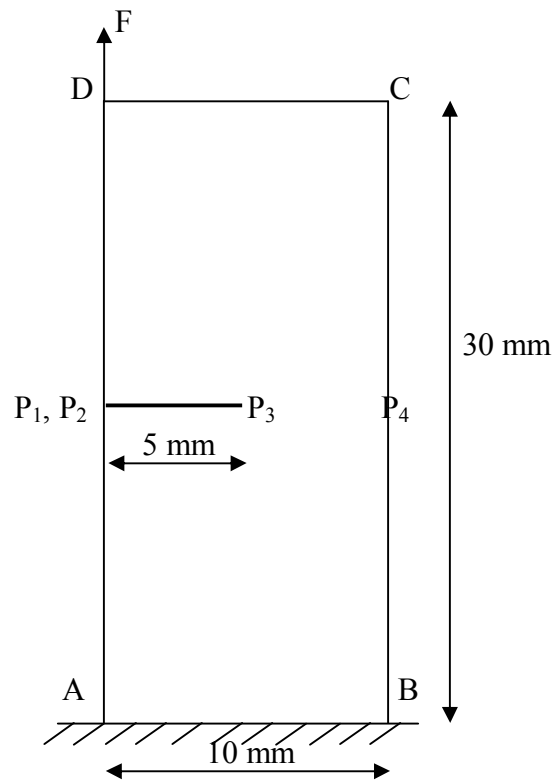


Figure. 4.1. Définition de la plaque et du chargement

- **Construction du maillage de la plaque:** nous utilisons l'élément RMQ-7 (figure 3.1).

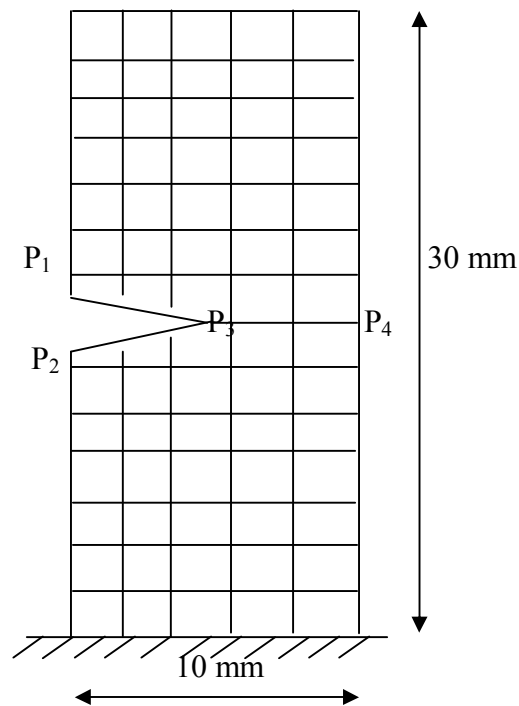


Figure. 4.2. Maillage N°01 : 70 éléments (5 colonne, 14 ligne), 205 nœuds.

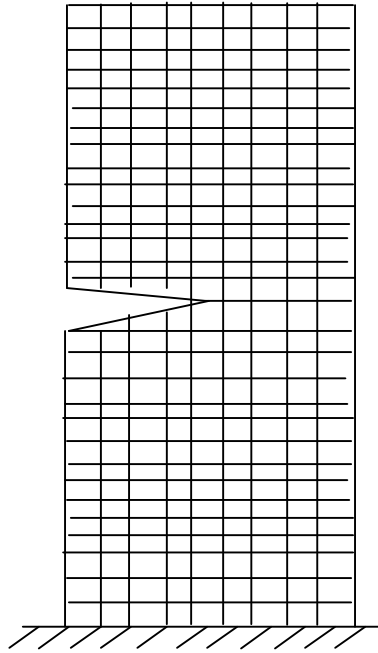


Figure. 4.3. Maillage N°02 : 270 éléments (9 colonne, 30 ligne), 733 nœuds.

Le champ de contrainte normale au nœud (au fond de la fissure) 391 $\{\sigma_A\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}_A$

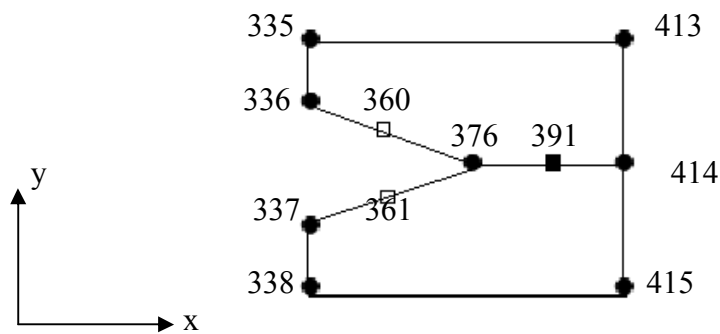


Figure 4.4. Eléments de point de fissure

Le comportement de la plaque est élastique parfaitement plastique selon les hypothèses données dans **F.Wang et al.** Le modèle mathématique est choisi, conformément aux comportements de la plaque avec les propriétés du matériau nécessaires, (E module de Young, limite d'élasticité, coefficient de poisson ν).

4.2. Commentaires des résultats

La courbe du taux de restitution d'énergie élastoplastique en fonction de la charge présentée sur la figure 4.5, croît progressivement. Les résultats trouvés sont proches de ceux calculés par **F.Wang et al.** (Tableau n° 1).

CHARGE (N)	60	120	160	200	240	280	320	360
Intégrale-J (N/mm) TR6 et Q8 selon Wang 10^3	0.1767	0,7042	1.3297	2,0893	2.7680	3,8164	5.1006	6.1521
Intégrale -J Selon Moussaoui 10^3	0,1785	0,7143	1,2700	1,9844	2,8575	3,88948	5,0801	6,4295
G (N/mm) élastique RMQ-7 calculée	0.0338	0.1355	0.2345	0.3665	0.5278	0.7184	0.9383	1.1876
G (N/mm) élastoplastique RMQ-7 calculée 10^3	0.1739	0.6956	1.2367	1.9323	2.7825	3.7874	4.9468	6.2608
Erreur (%)	1.610	1.236	7.520	8.125	0.521	0.765	3.109	1.736

Tableau N° 1. Les valeurs du taux de restitution d'énergie (G).

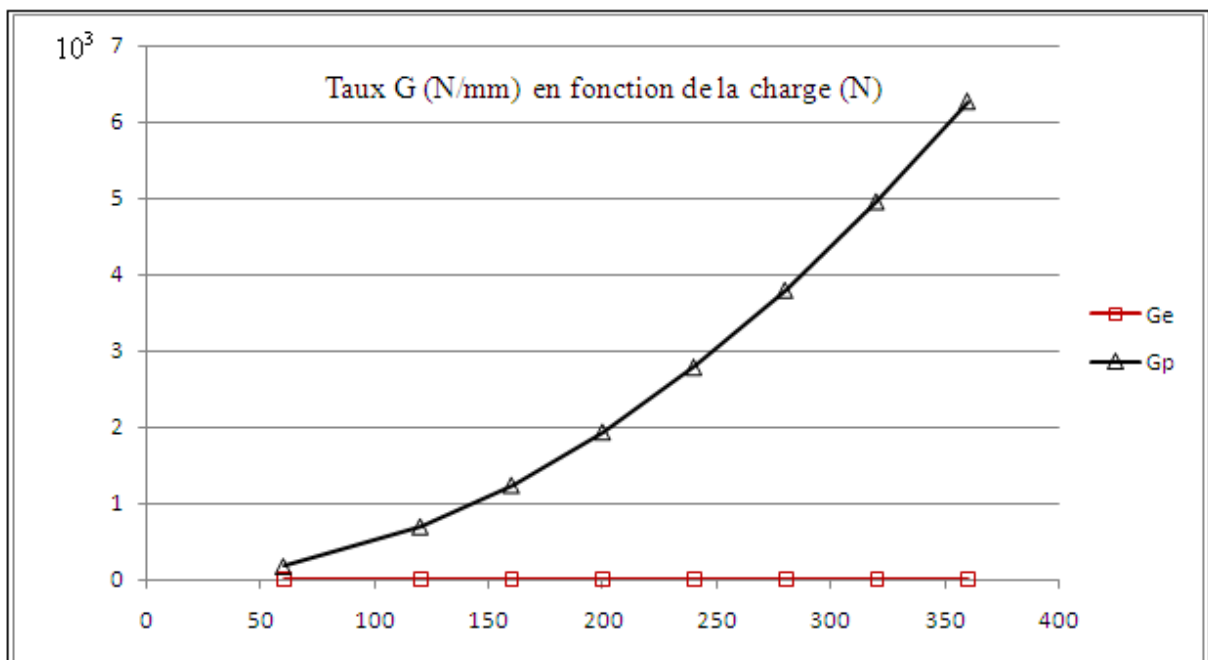


Figure 4.5. Courbe du taux de restitution d'énergie élastique et élastoplastique en fonction de la charge calculée.

CHARGE (N)	60	120	160	200	240	280	320	360
Contrainte élastique (MPa)	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -1.593 \\ 5.228 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -3.186 \\ 10.457 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -4.32 \\ 14.15 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -5.40 \\ 17.49 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -6.37 \\ 20.91 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -7.43 \\ 24.40 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -8.49 \\ 27.88 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -9.72 \\ 31.84 \end{Bmatrix}$
Contrainte totale (MPa)	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -169.31 \\ 62.906 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -338.63 \\ 125.81 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -451.51 \\ 167.74 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -564.39 \\ 209.6870 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -677.27 \\ 251.62 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -790.15 \\ 293.56 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -903.03 \\ 335.49 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -1015.9 \\ 377.43 \end{Bmatrix}$

Tableau N° 2. Les valeurs des contraintes élastique et plastique au voisinage de la pointe de la fissure (σ).

Pour chacun des modèles, on retrouve la courbe caractéristique de l'évolution du déplacement en fonction de la charge en régime élastoplastique.

CHARGE (N)	60	120	160	200	240	280	320	360
Déplacement totale u_1 (mm) 10^{-2}	-0.264	-0.529	-0.705	-0.882	-1.058	-1.235	-1.411	-1.588

Tableau N° 3. Les valeurs des déplacements plastique de la pointe de la fissure (σ).

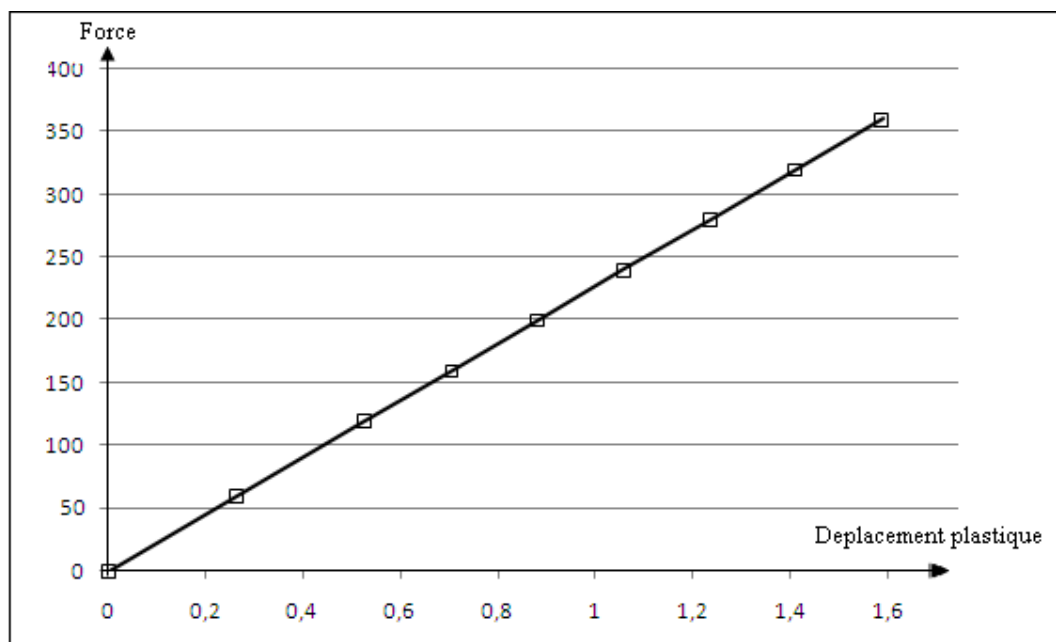


Figure 4.6. L'évolution du déplacement total du point A.

La figure 4.7 montre l'évolution de la déformation totale du point P₃ dans la direction de la charge avec une augmentation des contraintes. La pièce commence à se plastifier à partir d'incrément de déformation totale : $\Delta\varepsilon = 3 \times 10^{-3}$.

ε_{eq} : scalaire permettant de comparer un état de déformation triaxial à un état de déformation uniaxial équivalent. $\varepsilon_{eq} = \sqrt{(3/2)e_{ij}e_{ji}}$ avec e_{ij} : déformation déviatorique.

(F = 360N)	A (à l'intérieur de la surface)	B (sur le critère)
Contrainte normale σ	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ -9.625 \\ 31.254 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.00 \\ 733.19 \\ 265.087 \end{Bmatrix}$
Déformation 10^{-3}	$\begin{Bmatrix} 0.0122 \\ -0.0418 \\ 0.354 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -1.231 \\ 4.201 \\ 3.354 \end{Bmatrix}$
Contrainte équivalente σ_{eq}	43.436	670.00
Déformation équivalente $\varepsilon_{eq} 10^{-3}$	0.448	5.59

Tableau n°4. Les contraintes (déformations) normales et équivalente

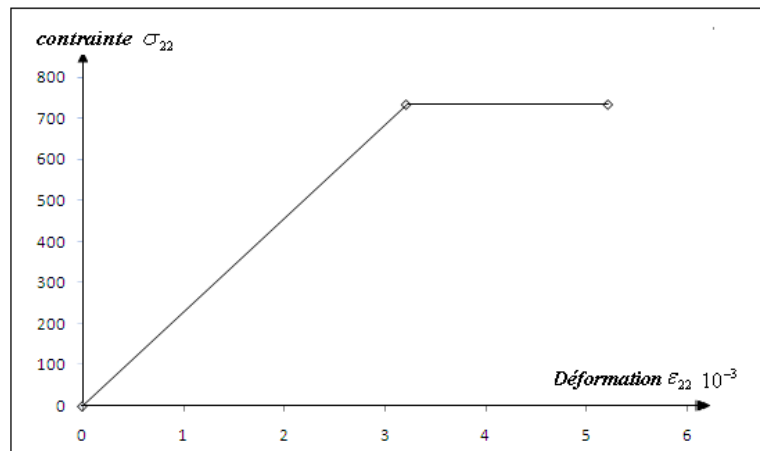


Figure 4.7 Variation de la contrainte σ_{22} en fonction de la déformation au fond de la fissure.

La matrice du comportement élastique : $[C]$ (MPa)

$$[C] = \begin{bmatrix} 251599.57 & 73718.674 & 0.00 \\ 73718.674 & 251599.57 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 88940.44 \end{bmatrix}$$

La matrice du comportement élastoplastique : $[C]$ (MPa)

$$[C] = \begin{bmatrix} 243833.91 & 120136.71 & 810.449 \\ 120136.71 & 60209.22 & -3341.63 \\ 810.449 & -3341.63 & 88882.104 \end{bmatrix}$$

Le champ de déformation plastique au point B est : $\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda_p n \Rightarrow \Delta\varepsilon^p = \begin{Bmatrix} -1.002 \\ 2.004 \\ 0.0402 \end{Bmatrix} 10^{-3}$

La boucle du calcul continue jusqu'à ce que le critère de plasticité au point B (point de première plastification) soit inférieur à : $TOL_1 = \sigma_y \times 10^{-6} = 6.7 \times 10^{-4}$

$f = 3.67 \times 10^{-4} < TOL_1$ L'écoulement plastique prend effet, la valeur de α est : $(0 < \alpha = 0.761 < 1)$

Pour déterminer la zone de plastification (taille de la zone) à fond de fissure on vérifie le critère de plastification (Von Mises) à tout les point, nous avons trouvé :

Nœud de contrainte	Le critère f	Nœud de contrainte	Le critère f
311	5.25×10^{-2} (NV)	392	3.89×10^{-3} (NV)
314	5.25×10^{-2} (NV)	436	1.045×10^{-4}
359	4.42×10^{-4}	437	6.36×10^{-4}
360	-670 (NV)	438	5.28×10^{-4}
361	-670 (NV)	466	4.68×10^{-3} (NV)
362	5.67×10^{-4}	467	6.36×10^{-4}
390	4.54×10^{-4}	468	1.12×10^{-3} (NV)
391	3.67×10^{-4}		

Tableau n°5. Vérification du critère de plasticité Von Mises.

Le critère de plasticité au nœud N°311, N°314, N°360, N°361, N°392, N°466 et N°468 (figure 4.9) : non vérifie donc la zone de plasticité reste confinée dans une zone de faible taille par rapport aux dimensions des fissures.

On peut déterminer aussi la zone de plastique en fonction de la déformation équivalente au sens de Von Mises (tableau N°5 et figure.4.9).

Nœud de contrainte	Déformation équivalente au sens de Von Mises	Nœud de contrainte	Déformation équivalente au sens de Von Mises
311	9.15×10^{-3}	392	3.15×10^{-3}
314	7.13×10^{-3}	436	1.70×10^{-2}
359	8.43×10^{-3}	437	1.39×10^{-2}
360	0.00	438	1.29×10^{-3}
361	0.00	466	1.84×10^{-2}
362	1.21×10^{-2}	467	4.27×10^{-3}
390	9.85×10^{-2}	468	1.62×10^{-2}
391	5.59×10^{-3}		

Tableau n°6. Les déformations équivalentes.

La zone de plasticité reste confinée dans une zone de faible taille par rapport aux dimensions des fissures.

Les deux figures suivantes représentent la zone plastique du modèle comparé et calculée (en visualisant les déformations équivalentes).

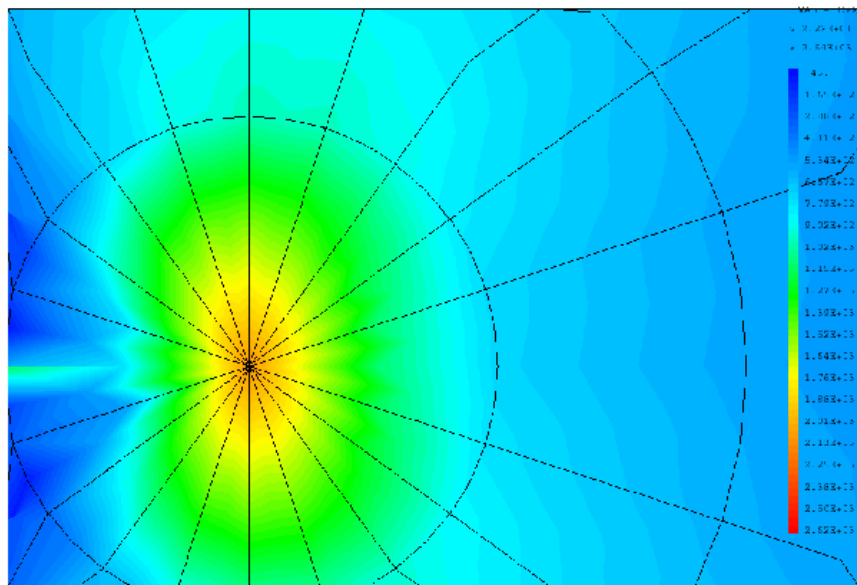


Figure 4.8. Forme de la zone plastique au voisinage de la pointe de la fissure d'exemple traité.

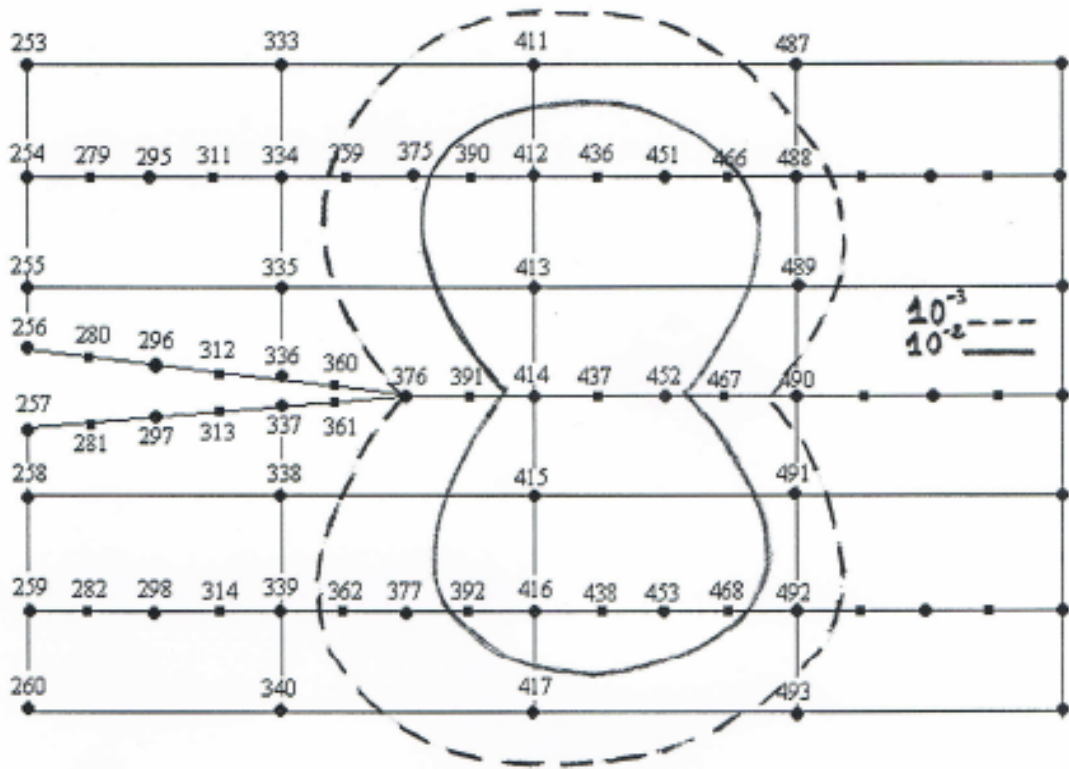


Figure 4.9. Forme de la zone plastique au voisinage de la pointe de la fissure calculée.

Conclusions et perspectives

Conclusions et perspectives

L'objectif de cette étude est d'appréhender la nocivité des fissures dans les matériaux ductiles soumis à une traction (la rupture non linéaire). L'étude, menée dans le domaine élastique parfaitement plastique avec le critère de Von Mises sur un modèle de simulation ayant une faible épaisseur, bidimensionnel.

Durant l'étude, un programme de calcul a été élaboré sur le code CSMIC, basé sur la méthode des éléments finis mixtes. Le programme a été développé par Hamoudi **Bouzerd**, notre intervention réside dans l'ajout de certaines sous-routines et principalement l'introduction d'une méthode non linéaire matérielle qui est la *méthode d'intégration d'écoulement (méthode explicite d'Euler)*.

La méthode explicite d'Euler possède des avantages économiques parce que la matrice de rigidité est calculée uniquement une seule fois. Son inconvénient principal est qu'elle requiert usuellement un large nombre d'itérations.

Le taux de restitution d'énergie qui est l'objet de notre étude, est utilisé comme un paramètre caractéristique de l'état de contrainte et de déformation au voisinage de l'extrémité d'une fissure. Lors de la simulation, les valeurs calculées en fonction de la charge montrent une croissance du taux d'énergie plastique G_p durant l'augmentation de la charge et une zone plastique se développe à l'extrémité de la fissure déterminée par le critère de Von Mises, les contraintes autour de la fissure sont augmentées.

Les résultats obtenus, composés avec ceux donnés par la littérature concernant le taux de restitution d'énergie sont en bonne concordance. La zone plastique prédit par le présent modèle apparaît plus confinée que celle présentée dans le modèle de comparaison basé sur les travaux de Wang.

Les raisons de cette différence peuvent trouver leurs résumés dans le type d'élément utilisé (RMQ-7) qui renvoie en arrière plan les contraintes σ_{11} et ne gardent comme contraintes actives que celle de l'interface, à savoir σ_{12} et σ_{22} .

Divers développements sont envisageables dans le futur, à savoir :

- Premièrement prise en compte de l'écroutissage isotrope ou cinématique et améliorer la convergence de la méthode ou encore d'intégrer d'autres critères que celui de Von Mises.
- Une seconde perspective serait d'étendre l'approche d'écoulement plastique à d'autres types de calcul tels que la non-linéarité géométrique, de la dynamique, de la thermique.
- Enfin une troisième direction de recherches serait d'étendre la rupture ductile en grande déformations.

REFERENCE

- [1] H. Bouzerd. "Element Fini Mixte Pour Interface Coherente ou Fissurée", thèse de doctorat d'université, université de Claude Bernard – Lyon I, 02 octobre 1992.
- [2] Alaa Chateaneuf. "Comprendre les éléments finis. Principes, formulations et exercices corrigés", Livre, de Institut Français de Mécanique Avancée, 2005.
- [3] Peter Wriggers. "Nonlinear Finite Element Methods", Livre, Hannover, springer.com, Juin 2008.
- [4] Jean-Claude Charmet. "Mécanique du solide et des matériaux, Elasticité-Plasticité-Rupture", Documents concernant l'enseignement (Cours, TD, Préceptorats, TP), Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique.
- [5] Broek David. "Elementary engineering fracture mechanics", Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1984.
- [6] Hai-Sui YU. "Plasticity & Geotechnics", advances in Mechanic and Mathematics *Volume 13*, University of Nottingham, UK, 2007. P 488 -
- [7] Arun Shukla. "Practical Fracture Mechanics in Design. Second Edition", University of Rhode Island *U.S.A*, 2005.
- [8] H.M. Tawancy, A Ul-Hamid, N.M. Abbas. "Practical Engineering Failure Analysis", Institute Dhahran, Saudi Arabia, 2004.
- [9] M. Kempeneers. " Elément finis statiquement admissibles et estimation d'erreur par analyse duale", thèse de doctorat d'université, université de liège, 31 Mars 2006.
- [10] M. Kempeneers. " Analyse elasto-plastique des structures par éléments finis membranaires 2D", thèse de doctorat d'université, université de liège, 31 Mars 2006.
- [11] Alexandra. Kleine " Modélisation numérique du comportement des ouvrages souterrains par une approche viscoplastique", thèse de doctorat de l'institut national polytechnique de Lorraine, 14 Novembre 2007.
- [12] G. Cailletau, M. Tijani et all" Mécanique des matériaux solides", Notes de cours (1^{ère} année) de Mines ParisTech, Mars 2011.
- [13] Moussaoui Mustapha, "Modélisation et simulation élastoplastique des aciers de construction". thèse de magister, université Mohamed Boudiaf – de M'SILA.
- [14] Viet-Dung LE, " Modélisation et identification du comportement plastique visco-élastique endommageable d'un matériau agrégataire ", thèse de doctorat d'université, université François Rabelais de Tours, 29 Novembre 2007.