

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
**UNIVERSITÉ 20 AOÛT 1955 SKIKDA**



## THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ 20 AOÛT 1955 SKIKDA**

**Spécialité : Électromécanique**

présentée et soutenue publiquement

par

**Ridha KELAIAIA**

le 29/04/2012

Titre :

---

# Contribution à la conception optimale des machines-outils parallèles

---

## JURY :

M. Bouzid BOUDJEMAA	Professeur à l'Université 20 Août 1955 Skikda	<i>Président</i>
M. Hichem TEBBIKH	Professeur à l'Université de 8 Mai 45 Guelma	<i>Examineur</i>
M. Belkacem BARKAT	Professeur à l'Université ELHADJ Lakhdar, Batna	<i>Examineur</i>
M. Lakhdar KHOCHEMANE	Maître de Conférences à l'Université 20 Août 1955 Skikda	<i>Examineur</i>
M. Olivier COMPANYY	Maître de Conférences à l'Université de Montpellier II France	<i>Examineur</i>
M. Abdelouahab ZAATRI	Professeur à l'Université de Mentouri Constantine	<i>Rapporteur</i>



# Remerciements

Mes premiers remerciements vont, et c'est bien normal, à mon directeur de thèse le professeur **Abdelouahab ZAATRI** qui a accepté d'assurer mon encadrement et de m'accueillir au sein de son équipe de recherche. Il m'a encouragé, soutenu et surtout fait confiance durant ces années. J'ai beaucoup appris à son contact et le remercie pour tout ce qu'il m'a apporté. Merci Abdelouahab !

Mes deuxièmes remerciements iront tout naturellement à **Olivier Company**, mon co-encadreur qui m'a accueilli au sein du Laboratoire LIRMM, et qui durant mon séjour en France m'a aidé, conseillé, et m'a permis de travailler dans des meilleures conditions. Merci pour tout Olivier.

Qu'Abdelouahab Zaatri et Olivier Company soient assurés de ma gratitude pour leur disponibilité, leur ouverture et la confiance qu'ils m'ont accordée.

J'exprime toute ma reconnaissance à la direction du Laboratoire d'Informatique, Robotique et Microélectronique (LIRMM) de l'Université Montpellier2, au département de robotique et à l'Equipe-projet DEXTER pour m'avoir accueilli, soutenu et qui m'ont permis d'aborder et d'apprécier le travail de recherche.

Mes remerciements vont également au Président et aux membres du Jury qui ont accepté d'évaluer mes travaux et pour l'intérêt qu'ils leur ont porté.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur **Bouzid BOUDJEMAA**, professeur à l'Université 20 Août 1955 Skikda, pour avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Je remercie très vivement Monsieur **Hichem TEBBIKH**, professeur et directeur du Laboratoire d'Automatique et Informatique de Guelma (LAIG) à l'Université 8 Mai 45 Guelma, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de juger mon travail.

Toute ma reconnaissance va à Monsieur **Balkacem BERKAT** professeur à l'université ELHADJ LAKHDAR Batna, à qui j'exprime mes sincères remerciements pour sa participation dans le jury.

Je tiens à remercier très vivement Monsieur **Lakhdar KHOCHEMANE** maître de conférences à l'Université 20 Août 1955 Skikda, d'avoir accepté de participer dans le jury de ma thèse.

Je tiens à exprimer ma sympathie à tous mes collègues à l'Université de Skikda. Je pense particulièrement à mes collègues du département.

Je ne peux terminer ces remerciements sans mentionner mes proches, à qui je dédie ce travail et dont l'amour et le soutien m'ont été plus que bénéfiques. A la mémoire de ma mère que son âme repose en paix, à mon très cher père Elhadj Boussaha, ce don suprême de Dieu, pour m'avoir aimé, aidé et soutenu tout au long de mon parcours et qui a l'air fier depuis qu'il a un Docteur à la maison, à mes frères Fatiha, Ammar, Abdelkrim, Djamel et M'hamed (et leurs familles) pour leurs précieux conseils, encouragements et leurs soutiens. Tous mes sentiments vont à mon épouse qui m'a accompagné pendant ces années et dont la présence à mes côtés a tout changé, à mes très chers enfants Ilyas, Nada et Mohamed Ali qui par leurs sourires suffisent à effacer tous les soucis. A mes beaux parents.

Je remercie également mes amis qui m'ont constamment soutenu, aidé, encouragé et supporté exceptionnellement Garbaai Salah, Abdessalem, Kamel, Bachir, Zoubir, Toufik, Yassine, Allawa, Hamid, Lotfi, Alfrido, Johann, Ahmed, Kamal, Malik.

Merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de mon travail.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Notations et conventions</b>	<b>5</b>
<b>1 Etat de l'art des machines-outils à cinématique parallèle</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	8
1.2 Préliminaires et définitions . . . . .	8
1.2.1 Les robots industriels d'architecture sérielle . . . . .	8
1.2.2 Les robots parallèles . . . . .	9
1.2.2.1 Les manipulateurs pleinement parallèles . . . . .	10
1.2.2.2 Les manipulateurs hybrides . . . . .	10
1.2.2.2.a Porteur parallèle - poignet série . . . . .	10
1.2.2.2.b Porteur série - poignet parallèle . . . . .	11
1.2.2.2.c Manipulateurs hybrides exotiques . . . . .	12
1.2.2.3 Architecture main droite/main gauche . . . . .	12
1.3 Les robots parallèles versus les robots série . . . . .	13
1.3.1 Avantages des robots parallèles . . . . .	13
1.3.2 Inconvénients des robots parallèles . . . . .	14
1.3.3 Avantages des robots série . . . . .	14
1.3.4 Inconvénients des robots série . . . . .	14
1.3.5 Récapitulatif . . . . .	15
1.4 Evolution des PKMs dans l'industrie . . . . .	15
1.5 Conclusion . . . . .	23
<b>2 Synthèse dimensionnelle des PKMs</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	26
2.2 Etat de l'art de la synthèse dimensionnelle des PKMs . . . . .	26
2.3 Critères et indices de performance . . . . .	29
2.3.1 L'espace de travail . . . . .	29
2.3.2 Performances cinématiques . . . . .	32
2.3.2.1 Précision . . . . .	33
2.3.2.2 Indices des performances cinématiques . . . . .	33
2.3.2.2.a Indice de Manipulabilité . . . . .	33
2.3.2.2.b Indice de la plus petite valeur singulière de $J^{-1}$ . . . . .	34
2.3.2.2.c Indice d'isotropie cinématique . . . . .	34
2.3.2.2.d Choix . . . . .	35
2.3.2.3 Homogénéisation de la matrice jacobienne . . . . .	35
2.3.2.4 Analyse de la singularité . . . . .	35
2.3.2.4.a Les sur-mobilités ( $ J_x  = 0$ ) . . . . .	36

	2.3.2.4.b Les sous-mobilités ( $ J_q  = 0$ ) . . . . .	36
	2.3.2.4.c Les singularités internes ( $ J_q  =  J_x  = 0$ ) . . . . .	37
	2.3.2.4.d Singularités et équilibre mécanique des robots pa- rallèles . . . . .	38
2.3.3	Rigidité . . . . .	38
	2.3.3.1 Cas de la rigidité linéaire . . . . .	39
2.3.4	Performances dynamiques . . . . .	39
	2.3.4.1 Indice d'isotropie dynamique . . . . .	40
2.4	Définition des contraintes . . . . .	40
	2.4.1 Contraintes de l'espace de travail . . . . .	40
	2.4.1.1 Débâtements articulations actionnées . . . . .	40
	2.4.1.2 Débâtements articulations passives . . . . .	41
	2.4.1.3 Evitement des collisions . . . . .	41
	2.4.2 Contraintes cinématiques . . . . .	41
	2.4.3 Contraintes sur la limitation des variations des facteurs de trans- mission des vitesses et efforts . . . . .	41
	2.4.4 Contraintes non géométriques . . . . .	43
2.5	Formulation du problème . . . . .	43
	2.5.1 Formulation basée sur un seul critère de performance . . . . .	43
	2.5.2 Formulation basée sur deux critères de performance . . . . .	45
	2.5.3 Formulation basée sur trois critères de performance . . . . .	46
	2.5.4 Discussion . . . . .	46
2.6	Conclusion . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Méthodologie de synthèse dimensionnelle des PKMs basée sur l'ap- proche d'optimisation multiobjectif</b> . . . . .	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	50
3.2	Formulation générale du problème d'optimisation multiobjectif . . . . .	50
3.3	Proposition d'une méthodologie de conception optimale des PKMs . . . . .	51
3.4	Concepts et définitions . . . . .	51
	3.4.1 Fonction objectif . . . . .	51
	3.4.2 Variables de décision . . . . .	52
	3.4.3 Espace d'état . . . . .	52
	3.4.4 Contraintes . . . . .	52
	3.4.5 Minimum global . . . . .	53
	3.4.6 Minimum local . . . . .	53
	3.4.7 Notion de dominance . . . . .	53
	3.4.8 Dominance au sens de Pareto . . . . .	53
	3.4.9 Convexité . . . . .	53
	3.4.10 Exemple d'un problème d'optimisation multiobjectif . . . . .	55
3.5	Différentes méthodes utilisées pour la résolution des problèmes d'optimisa- tion multiobjectif . . . . .	56
	3.5.1 Les méthodes d'optimisation <i>a priori</i> . . . . .	57
	3.5.1.1 Méthode d'agrégation des fonctions objectifs . . . . .	57
	3.5.1.2 La méthode du compromis (la méthode $\varepsilon$ -contrainte) . . . . .	57
	3.5.1.3 La méthode du but à atteindre (Goal attainment) . . . . .	58
	3.5.1.4 La méthode du but programmé (Goal programming) . . . . .	59
	3.5.1.5 Autres méthodes <i>a priori</i> . . . . .	59

3.5.2	Les méthodes progressives . . . . .	59
3.5.2.1	Méthode de Fandel . . . . .	59
3.5.2.2	Autres méthodes progressives . . . . .	61
3.5.3	Les méthodes d'optimisation <i>a posteriori</i> . . . . .	62
3.5.3.1	Le recuit simulé . . . . .	62
3.5.3.1.a	Algorithme du recuit simulé . . . . .	62
3.5.3.2	La méthode recherche Tabou . . . . .	63
3.5.3.2.a	Algorithme de la méthode recherche Tabou . . . . .	64
3.5.3.3	Les algorithmes génétiques . . . . .	64
3.5.3.4	Quelques algorithmes génétiques multiobjectif . . . . .	65
3.5.3.4.a	NSGA-II (Non-dominated Sorting based Genetic Algorithm) . . . . .	65
3.5.3.4.b	SPEA-II (Strength Pareto Evolutionary Algorithm) . . . . .	67
3.6	Méthodologie de conception dimensionnelle optimale des PKMs . . . . .	68
3.7	Conclusion . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Application à la conception dimensionnelle optimale d'une machine à 3 axes : Le robot parallèle Delta linéaire</b>	<b>71</b>
4.1	Introduction . . . . .	72
4.2	Description et paramétrage géométrique du robot DELTA linéaire . . . . .	72
4.3	Modèle géométrique . . . . .	75
4.4	L'espace de travail . . . . .	76
4.5	Matrice jacobienne et analyse des singularités . . . . .	78
4.5.1	Singularités sérielles ( $ J_q  = 0$ ) . . . . .	78
4.5.2	Singularités parallèles ( $ J_x  = 0$ ) . . . . .	78
4.6	Énergie cinétique du système . . . . .	79
4.7	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	81
4.8	Résultats et discussion . . . . .	82
4.8.1	Analyse de l'espace de travail dextre . . . . .	85
4.9	Conclusion . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Application à la conception dimensionnelle optimale d'une machine à 6 ddl : La plateforme de GOUGH-STEWART type UPS</b>	<b>89</b>
5.1	Introduction . . . . .	90
5.2	Description géométrique de la plateforme de Gough-Stewart . . . . .	90
5.3	Modèle géométrique inverse de la plateforme . . . . .	92
5.4	Construction de la matrice de rotation $R$ . . . . .	92
5.5	Modèle géométrique direct . . . . .	93
5.6	Calcul de la matrice jacobienne . . . . .	94
5.7	Homogénéisation de la matrice jacobienne . . . . .	95
5.8	Analyse de la singularité . . . . .	95
5.8.1	Singularité de type I (Sous-mobilité) . . . . .	95
5.8.2	Singularité de type II (Sur-mobilité) . . . . .	95
5.8.3	Singularité de type III . . . . .	95
5.9	Evaluation de la matrice de masse du système . . . . .	95
5.9.1	Calcul de l'énergie cinétique d'un segment . . . . .	95
5.9.2	Calcul de l'énergie cinétique de la tige (piston) . . . . .	95
5.9.2.0.c	Calcul de $dev_{G2i}^T$ . . . . .	96
5.9.2.1	Calcul de $V_{P_i}$ Dans le repère du segment $\{R_s\}$ . . . . .	97

5.9.2.2	Calcul de la vitesse $[V_{Pi}]_b$ . . . . .	97
5.9.2.3	Détermination de ${}^p\omega_{na}$ . . . . .	97
5.9.2.4	Calcul de $\omega_{a,i}$ dans le repère du segment $\{R_s\}$ . . . . .	98
5.9.3	Calcul de l'énergie cinétique du cylindre . . . . .	98
5.9.4	Calcul de l'énergie cinétique de chaque actionneur $i$ . . . . .	98
5.9.5	Calcul de l'énergie cinétique de la plateforme mobile . . . . .	99
5.9.6	Calcul de l'énergie cinétique du système . . . . .	99
5.10	Formulation du problème d'optimisation . . . . .	100
5.11	Résultats et discussion . . . . .	100
5.11.1	Premier cas . . . . .	101
5.11.2	Deuxième cas . . . . .	102
5.11.3	Troisième cas . . . . .	103
5.11.4	Comparaison entre les architectures obtenues . . . . .	104
5.11.5	Comparaison avec d'autres résultats . . . . .	104
5.12	Conclusion . . . . .	105
	<b>Conclusion générale</b> . . . . .	<b>107</b>
	<b>Publications</b> . . . . .	<b>111</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>113</b>
	<b>A Notation des liaisons dans les graphes d'agencement</b> . . . . .	<b>119</b>
	<b>B Définitions mathématiques</b> . . . . .	<b>121</b>
B.1	Normes matricielles . . . . .	121
B.2	Normes matricielles courantes . . . . .	121
B.3	Conditionnement d'une matrice . . . . .	121

# Table des figures

1.1	Exemple de robot série : Robot IRB 6600ID (ABB).	8
1.2	Schéma d'un manipulateur à structure sérielle.	9
1.3	Schéma d'un manipulateur à structure parallèle.	9
1.4	Plate-forme de Stewart.	10
1.5	Le Tricept de Neos-Robotics et son graphe d'agencement.	11
1.6	Sprint Z3 : image CAO et graphe d'agencement.	11
1.7	Dumbo (IFW) de l'université de Hanovre et son graphe d'agencement.	12
1.8	Machine-outil Verne de Fatronik.	13
1.9	Plate-forme de Gough et son agencement.	16
1.10	Le robot FlexPicker de ABB (Robot Delta) et son graphe d'agencement.	17
1.11	Robot Hexa : photo et graphe d'agencement.	17
1.12	La Variax de Gidding and Lewis : Fraiseuse cinq axes.	19
1.13	Machine Hexapode.	19
1.14	Hexel Tornado 2000.	20
1.15	Machine Hexaglide.	21
1.16	Exemple d'architecture des machines Triaglide.	21
1.17	Machine-outil Tricept TR805.	22
1.18	Machine Georg V.	22
2.1	Décomposition du processus de conception selon [Valasek, 2005]	30
2.2	Comparaison de l'espace de travail d'un mécanisme parallèle planaire et son équivalent série.	30
2.3	Mécanisme en chaîne fermée à 1 ddl.	36
2.4	Illustration d'une sur-mobilité.	37
2.5	Illustration d'une sous-mobilité.	37
2.6	Illustration d'une singularité interne.	38
2.7	Distance entre 2 segments.	41
2.8	Ellipsoïde des vitesses.	42
3.1	Séquence de la méthodologie proposée	52
3.2	Optimalité globale au sens de Pareto.	54
3.3	Optimalité locale au sens de Pareto.	54
3.4	Exemple d'ensemble convexe.	54
3.5	Exemple d'ensemble non convexe.	55
3.6	fonctions à minimiser.	55
3.7	Front optimal Pareto.	56
3.8	Méthode du but à atteindre (cas de 2 fonctions objectifs).	58
3.9	Méthode de Fandel (cas de 2 fonctions objectifs).	61
3.10	Fonctionnement d'un algorithme génétique monobjectif.	65

3.11	Fonctionnement d'un algorithme génétique multiobjectif. . . . .	66
3.12	Schéma de fonctionnement de NSGA-II. . . . .	67
3.13	Méthodologie de synthèse dimensionnelle des PKMs. . . . .	70
4.1	Photo du robot Delta à actionneurs linéaires. . . . .	73
4.2	Description géométrique du robot Delta linéaire. . . . .	73
4.3	Vue de dessous du robot Delta linéaire. . . . .	74
4.4	Graphe d'agencement du robot Delta linéaire. . . . .	74
4.5	représentation des deux solutions de la première équation du système (4.7) .	76
4.6	Intersection des 3 cercles. . . . .	77
4.7	Section de l'espace de travail dextre régulier. . . . .	77
4.8	Représentation d'une chaîne cinématique. . . . .	79
4.9	Simplification d'un parallélogramme. . . . .	79
4.10	Compromis entre le rayon de la section l'espace de travail dextre régulier "rayon $r$ " et les performances cinématiques $\eta_J$ . . . . .	83
4.11	Compromis entre le rayon de la section l'espace de travail dextre régulier "rayon $r$ " et la dextérité dynamique $\eta_M$ . . . . .	83
4.12	Variation of the objective functions with $R_b - R_n$ and $L$ . . . . .	85
4.13	Espace de travail avec contrainte ( $\frac{1}{\kappa_{Jmax}} \geq 0.45$ ) lorsque $L = 0.750m$ . . . . .	87
4.14	Espace de travail avec contrainte ( $\frac{1}{\kappa_{Jmax}} \geq 0.45$ ) lorsque $L = 1.0m$ . . . . .	88
5.1	robot à 6 ddl "F-200i" de Fanuc Robotics. . . . .	91
5.2	Représentation CAO du robot Fanuc Robotics "F-200i". . . . .	91
5.3	Platform de Gough-Stewart. . . . .	92
5.4	Représentation d'un segment $i$ . . . . .	96
5.5	Paramétrage de la plateforme de Gough-Stewart type UPS 6-ddl. . . . .	100
5.6	Représentations des points d'attache avec le 1 <sup>er</sup> paramétrage. . . . .	101
5.7	Positions des points d'attache des actionneurs à la base et à la plateforme mobile. . . . .	101
5.8	Représentations des points d'attache avec le 2 <sup>eme</sup> paramétrage. . . . .	102
5.9	Positions des points d'attache des actionneurs à la base et à la plateforme mobile. . . . .	102
5.10	Représentations des points d'attache avec le 3 <sup>eme</sup> paramétrage. . . . .	103
5.11	Positions des points d'attache des actionneurs à la base et à la plateforme mobile. . . . .	103
5.12	Fronts de Pareto. . . . .	104
A.1	Symboles des graphes d'agencement . . . . .	119

# Liste des tableaux

1.1	Tableau comparatif entre robot série et robot parallèle. . . . .	15
4.1	Paramètres géométriques et fonctions objectif optimisés. . . . .	84
4.2	Limites de l'espace dextre. . . . .	86
5.1	Comparison avec d'autres résultats. . . . .	105



# Introduction générale

Depuis une vingtaine d'années, les robots à structures parallèles ne cessent de se substituer aux robots série particulièrement dans l'industrie de précision, en chirurgie et dans l'usinage à grande vitesse (UGV) où se développent les machines-outils à cinématique parallèle (*PKM : Parallel Kinematic Machine en Anglais*). Les mécanismes à architecture parallèle ont été proposés et étudiés pour la conception et le développement de quelques prototypes afin de résoudre quelques problèmes dans le monde de l'usinage où le besoin de précision et de haute rigidité est un point crucial. Cependant, leur dimensionnement optimal est resté un problème ardu suite aux nombreux critères qui peuvent interférer de façon complexe et être antagonistes (performances cinématiques, rapidité, espace de travail, évitement du voisinage des singularités, performances dynamiques, etc.). Explorer et trouver des approches et des méthodes qui permettent d'effectuer une synthèse dimensionnelle optimale dans un contexte multicritère est donc un challenge qui est d'une importance capitale tant au plan scientifique que technologique.

## Contexte du travail

La synthèse dimensionnelle vise la détermination des dimensions de l'architecture retenue lors de la synthèse structurelle. Elle demeure un objectif indispensable dans la conception optimale des PKMs car les critères de performance d'une architecture donnée dépendent très fortement des dimensions de ses paramètres géométriques. Dans ce travail, nous proposons une méthodologie pour l'obtention des paramètres architecturaux (géométriques) de l'architecture choisie, où le problème s'exprime en termes d'optimisation multiobjectif en prenant simultanément en considération plusieurs critères de performances tels que l'espace de travail, les performances cinématiques, la rigidité et les performances dynamiques. Cette méthodologie est illustrée par deux applications à 3 *ddl* et 6 *ddl*.

## Motivation et contribution

Les PKMs sont caractérisés par une capacité de charge plus imposante en travaillant avec une bonne précision et une faible masse en mouvement, ce qui réduit l'inertie, et par conséquent améliore considérablement la rigidité structurelle et les performances dynamiques. Ils présentent des solutions alternatives aux problèmes dont souffrent leurs homologues les machines classiques (à architecture sérielle), qui sont pénalisées par la masse élevée des éléments à déplacer. Chaque axe motorisé supporte l'axe suivant, ce qui fait apparaître des problèmes de flexion qui nuisent à leur précision.

Les PKMs attirent de plus en plus l'attention des chercheurs et des industriels (ils présentent une alternative des machines classiques) car ils possèdent le potentiel d'offrir une grande précision et de bonnes performances dynamiques. Néanmoins leur conception

présente un problème très complexe qui fait intervenir plusieurs paramètres et critères quantitatifs et parfois qualitatifs. Elle doit faire face aux problèmes liés à ces machines tels que : le faible espace de travail, la non homogénéité des performances cinématiques et dynamiques au sein de l'espace de travail due à la présence des singularités, la non linéarité entre les vitesses opérationnelles et articulaires, etc. et par conséquent leurs performances sont très sensibles à leurs dimensions (paramètres géométriques). Ceci exige à présent une méthodologie de conception dimensionnelle qui vise l'amélioration des performances de la PKM et tient compte de ses différentes contraintes.

La majorité des travaux qui traitent le problème de la synthèse dimensionnelle des PKMs se base sur un ou deux critères de performance au détriment des autres critères. Dans [Merlet, 2006], nous trouvons des travaux où l'on propose des approches pour optimiser un seul critère comme la rigidité, la dynamique, la dextérité et l'espace de travail. Dans cette thèse, nous allons tenir compte et étudier simultanément plusieurs critères de performance qui ont un impact direct sur la synthèse dimensionnelle des PKMs par l'utilisation du concept de l'optimisation multiobjectif par les algorithmes génétiques. Notre contribution se résume dans les points suivants :

- Présentation de l'état de l'art dressé dans le chapitre 2 et qui met en évidence différentes approches utilisées dans la synthèse dimensionnelle des PKMs,
- Analyse détaillée des critères de performance tels que l'espace de travail et ses particularités pour les PKMs, les performances cinématiques, la précision, la rigidité et les performances dynamiques,
- Homogénéisation de la matrice Jacobienne,
- Analyse des différents types de singularité et leurs impact sur les PKMs,
- Analyse des contraintes liées à l'espace de travail, les contraintes cinématiques, les contraintes sur les limitations des variations des facteurs de transmission des vitesses et efforts ainsi que les contraintes non géométrique,
- Formulation du problème de la synthèse dimensionnelle (conception optimale) des PKMs par l'utilisation de l'approche basée sur le concept de l'optimisation multiobjectif,
- Choix des algorithmes génétiques comme technique appropriée de résolution du problème d'optimisation multiobjectif en raison de leur bonne adéquation avec notre problème,
- Proposition d'une méthodologie de conception optimale des PKMs pleinement parallèles,
- Application de cette méthodologie sur une PKM à 3 *ddl* (3 axes) : le robot parallèle Delta linéaire, et pour tester son efficacité, nous l'avons appliquée sur une PKM plus complexe à 6 *ddl* (6 axes) : la plateforme de GOUGH-STEWART type UPS. Les résultats sont encourageants et ont fait l'objet de trois publications.

## Organisation du manuscrit

Ce travail est résumé dans le présent manuscrit, qui est organisé comme suit :

Dans un **premier chapitre** que nous avons intitulé "Etat de l'art des machines-outils à cinématique parallèle", nous présentons, quelques notions de base en robotique, une comparaison entre les robots série et les robots parallèles. Pour clôturer ce chapitre, les

mécanismes et machines-outils à cinématique parallèle existants seront passés en revue.

Nous avons consacré le **deuxième chapitre** à la synthèse dimensionnelle basée sur l'approche d'optimisation multiobjective, en présentant tout d'abord un état de l'art sur la synthèse dimensionnelle. Nous présentons ensuite les critères et les indices de performances qui permettent de définir les fonctions objectif à optimiser. Nous présentons ainsi une méthode d'homogénéisation de la matrice Jacobienne qui permet de donner une signification physique à son nombre de conditionnement suivie d'une analyse de la singularité des PKMS et des différentes contraintes liées à ce type d'architecture. Nous clôturons ce chapitre par la présentation de la formulation du problème d'optimisation multiobjectif.

Dans le **troisième chapitre**, nous donnerons quelques notions et techniques d'optimisation multiobjectif. Une présentation du principe d'optimisation multiobjectif. Nous présentons, pour faciliter la lecture, quelques concepts et définitions en optimisation, puis les différentes méthodes utilisées pour la résolution des problèmes d'optimisation multiobjectif.

Dans le **quatrième chapitre**, nous présentons l'application de la méthodologie développée à la synthèse dimensionnelle d'une machine à 3 axes (le robot parallèle Delta linéaire 3ddl).

Dans le **cinquième chapitre**, nous présentons l'application de la méthodologie développée à la synthèse dimensionnelle d'une machine à 6 axes plus complexe, il s'agit de plateforme de GOUGH-STEWART de type 6 *ddl*-UPS. Ce cas exprime une illustration de la méthodologie adoptée pour traiter des systèmes plus complexes.



# Notations et conventions

**Les notations suivantes seront appliquées dans ce manuscrit :**

- L’abréviation *ddl* signifie degré de liberté.
- L’abréviation MGD signifie Modèle Géométrique Direct
- L’abréviation MGI signifie Modèle Géométrique Inverse
- La norme euclidienne d’un vecteur  $\mathbf{u}$  sera notée  $\|\mathbf{u}\|$ .
- La transposée et l’inverse d’une matrice  $\mathbf{M}$  seront notées respectivement  $\mathbf{M}^T$  et  $\mathbf{M}^{-1}$ .
- $W$  : espace de travail accessible
- $P$  : vecteur des variables de conception
- $X$  : variables opérationnelles
- $q$  : variables articulaires motorisées
- $\psi$  : variables articulaires passives
- $\delta q$  et  $\delta X$  : déplacements infinitésimaux,
- $\dot{q}$  : vitesses articulaires
- $\dot{X}$  : vitesses opérationnelles
- $J$  : matrice jacobienne
- $J^{-1}$  : matrice inverse de la matrice jacobienne
- $J_x$  et  $J_q$  : deux sous-matrices de la matrice jacobienne
- $J_q^{-1}$  : inverse de la matrice  $J_q$
- $\tau$  : forces articulaires
- $f$  : forces généralisées
- $J_{v,i}$  : matrice jacobienne de translation du corps  $i$
- $J_{w,i}$  : matrice jacobienne d’orientation du corps  $i$
- $\kappa_J$  : conditionnement de la matrice  $J$
- $\sigma_{max}(J^{-1})$  : la plus grande valeur singulière de  $J^{-1}$
- $\sigma_{min}(J^{-1})$  : la plus petite valeur singulière de  $J^{-1}$
- $\eta_J$  : indice de dextérité cinématique globale
- $S$  : matrice de rigidité
- $\sigma_{min}(S)$  : la valeur singulière minimum de la matrice de rigidité  $S$
- $\sigma_{max}(S)$  : la valeur singulière maximum de la matrice de rigidité  $S$
- $\kappa_S$  : conditionnement de la matrice  $S$
- $\eta_M$  : indice de dextérité dynamique globale
- $Fe$  : facteurs d’amplification des efforts
- $Fe_{min}$  : valeur minimale du facteur d’amplification des efforts
- $Fe_{max}$  : valeur maximale du facteur d’amplification des efforts
- $Fv$  : facteurs d’amplification de vitesses
- $Fv_{min}$  : valeur minimale du facteur d’amplification des vitesses
- $Fv_{max}$  : valeur maximale du facteur d’amplification des vitesses



# Chapitre 1

## Etat de l'art des machines-outils à cinématique parallèle

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Préliminaires et définitions</b>	<b>8</b>
1.2.1	Les robots industriels d'architecture sérielle	8
1.2.2	Les robots parallèles	9
1.2.2.1	Les manipulateurs pleinement parallèles	10
1.2.2.2	Les manipulateurs hybrides	10
1.2.2.3	Architecture main droite/main gauche	12
<b>1.3</b>	<b>Les robots parallèles versus les robots série</b>	<b>13</b>
1.3.1	Avantages des robots parallèles	13
1.3.2	Inconvénients des robots parallèles	14
1.3.3	Avantages des robots série	14
1.3.4	Inconvénients des robots série	14
1.3.5	Récapitulatif	15
<b>1.4</b>	<b>Evolution des PKMs dans l'industrie</b>	<b>15</b>
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>23</b>

---

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions sur les robots parallèles et la justification de leur emploi dans l'industrie en les comparant avec les robots série. Nous présentons un état de l'art concernant l'emploi des machines-outils à cinématique parallèle (PKMs<sup>1</sup> en Anglais) dans l'industrie.

## 1.2 Préliminaires et définitions

### 1.2.1 Les robots industriels d'architecture sérielle

Selon l'Association Française de Normalisation (AFNOR) "un robot industriel est un manipulateur automatique, asservi en position, reprogrammable, polyvalent, capable de positionner et d'orienter des matériaux, pièces, outils ou dispositifs spécialisés au cours de mouvements variables et programmés pour l'exécution de tâches variées". (NF E 61-100). Un robot manipulateur d'architecture sérielle (figure 1.1) est constitué d'une série



Figure 1.1- *Exemple de robot série : Robot IRB 6600ID (ABB).*

$n$  segments qui sont reliés par un joint assurant une rotation ou une translation relative entre segments. La figure 1.2 illustre la structure d'un robot manipulateur série composé de  $n + 1$  corps, notés  $C_0, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n$  et de  $n$  articulations. Le paramétrage de Denavit-Hartenberg modifié peut être utilisé pour paramétrer ce type d'architecture [Khalil and Dombre, 2002].

---

<sup>1</sup>Abréviation de **P**arallel **K**inematic **M**achines en Anglais

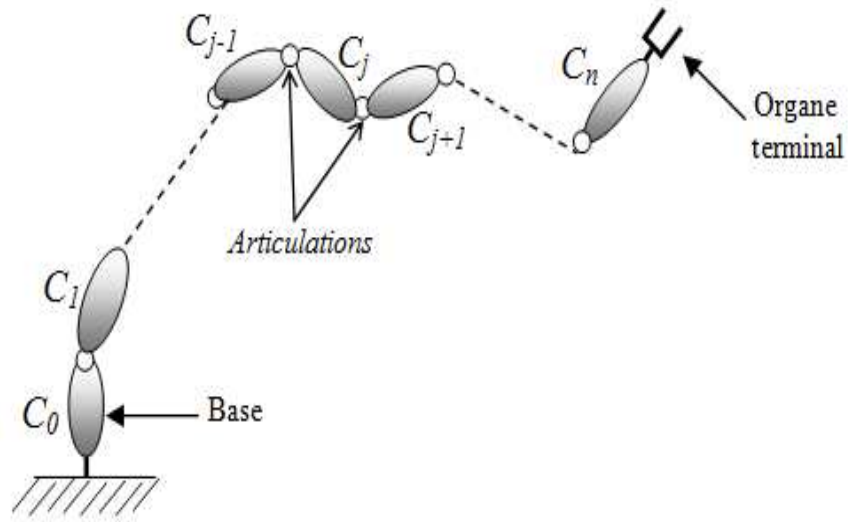


Figure 1.2- Schéma d'un manipulateur à structure sérielle.

### 1.2.2 Les robots parallèles

Un robot parallèle est mécanisme formé par un ensemble de chaînes cinématiques indépendantes dont l'une de leurs extrémités est liée à un corps de référence appelé base et l'autre extrémité à une plate forme mobile (souvent appelée nacelle) qui porte l'organe terminal (figure 1.3). L'ensemble forme une chaîne cinématique fermée.

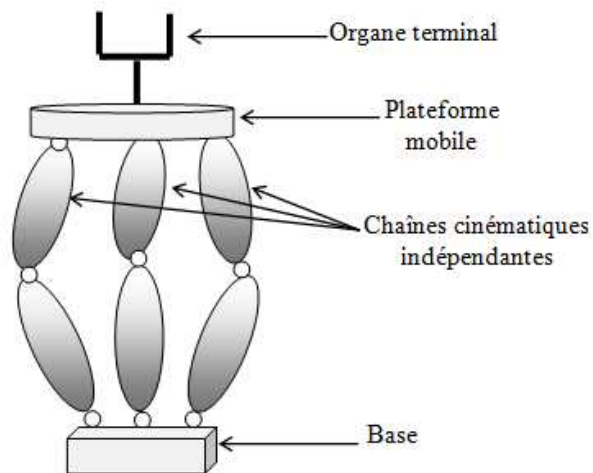


Figure 1.3- Schéma d'un manipulateur à structure parallèle.

### 1.2.2.1 Les manipulateurs pleinement parallèles

Un manipulateur pleinement parallèle est un manipulateur parallèle dont le nombre de chaînes est strictement égal au nombre de degrés de liberté de l'organe terminal, et dont chaque chaîne ne possède qu'un seul actionneur. La plateforme de Gough-Stewart [Gough, 1956] représente un exemple de mécanisme pleinement parallèle (figure 1.4), elle est constituée d'une base reliée à la plateforme mobile via 6 chaînes cinématiques identiques de type UPS (U : Cardan, P : Prismatique, S : Sphérique).



Figure 1.4- Plate-forme de Stewart.

### 1.2.2.2 Les manipulateurs hybrides

Un manipulateur hybride est un manipulateur composé d'un mécanisme à cinématique parallèle et d'un mécanisme à cinématique sérielle. Ce type de manipulateur permet a priori d'allier les atouts des manipulateurs série et parallèles tout en minimisant leurs défauts. Par ailleurs, l'inconvénient principal des manipulateurs hybrides résulte dans le fait qu'une sous-structure en porte une autre. Par conséquent, on retombe dans les travers propres aux robots série, si bien que la dynamique en est pénalisée [Krut, 2003]. Trois catégories peuvent être distinguées :

- Les mécanismes à porteur parallèle et poignet série,
- Les mécanismes à porteur série et poignet parallèle,
- Les manipulateurs hybrides exotiques.

#### 1.2.2.2.a Porteur parallèle - poignet série

Dans ce cas le manipulateur est constitué d'un mécanisme porteur d'architecture parallèle et un poignet d'architecture sérielle, ce qui le permet d'avoir de forts débattements angulaires. La figure 1.5 montre un manipulateur hybride nommé "Tricept" de Neos Robotics [Neumann, 1988] et son graphe d'agencement<sup>1</sup>. Ce manipulateur a été développé pour des applications de machines-outils, il a un porteur parallèle de trois *ddl* (trois translations) et un poignet d'architecture sérielle doté de deux *ddl* (deux rotations). Le Tricept

---

<sup>1</sup>voir annexe1.

est constitué de trois chaînes cinématiques de type UPS et possède une patte centrale passive (non-actionnée) de type UP qui contraint les mouvements du manipulateur.

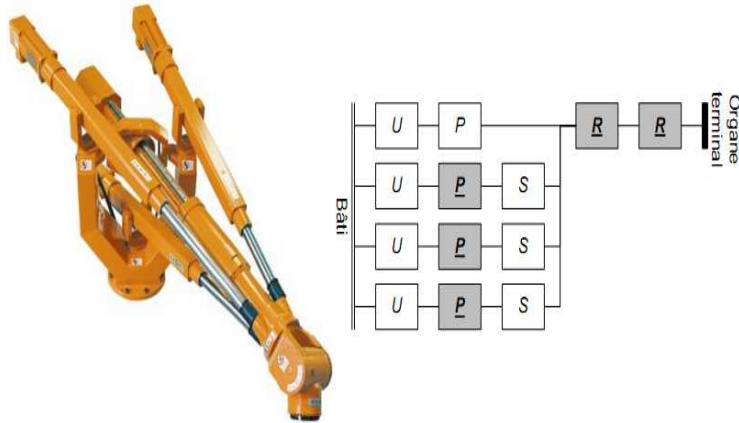


Figure 1.5- *Le Tricept de Neos-Robotics et son graphe d'agencement.*

### 1.2.2.2.b Porteur série - poignet parallèle

Dans ce cas le manipulateur est constitué d'un mécanisme porteur d'architecture sérielle et un poignet d'architecture parallèle. La figure 1.6 montre la machine-outil *Sprint Z3* de *DS Technologies*, qui a été destinée à l'industrie de l'aéronautique, elle possède 3 ddl (2 rotations, 1 translation), cette machine est montée sur un portique d'architecture sérielle à deux translations dont l'une peut avoir jusqu'à 60 mètres. Elle comprend un poignet d'architecture parallèle Z-A-B et trois dispositifs de guidage linéaire qui sont disposés à  $120^\circ$  dans le corps cylindrique formant la structure. Ces dispositifs de guidage sont constitués de chariots accrochés à des bras pivotants, qui sont liés à l'électrobroche avec des cardans. Cette machine possède de bonnes performances cinématiques ( $50 \text{ m.min}^{-1}$ ) avec des possibilités d'orientation de la nacelle jusqu'à  $40^\circ$ .

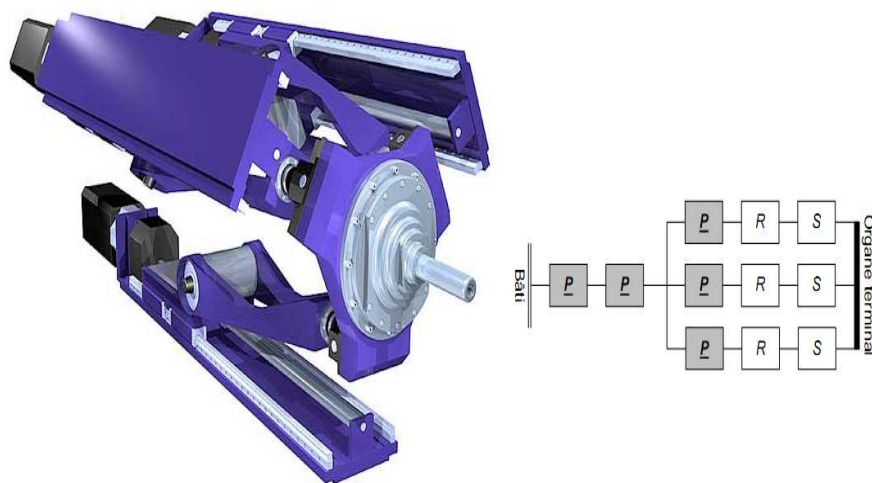


Figure 1.6- *Sprint Z3 : image CAO et graphe d'agencement.*

### 1.2.2.2.c Manipulateurs hybrides exotiques

Se sont des machines qu'on ne peut pas les classer selon un critère cité en haut. La figure 1.7 montre la machine Dumbo de l'IFW à l'université de Hanovre, il s'agit d'une machine hybride à cinq axes (3T2R : trois translations et deux rotations). L'axe vertical supporte un mécanisme parallèle constitué de deux vérins et d'une patte passive. Une liaison de type cardan permet aux deux bras télescopiques de déplacer le poignet d'architecture série.

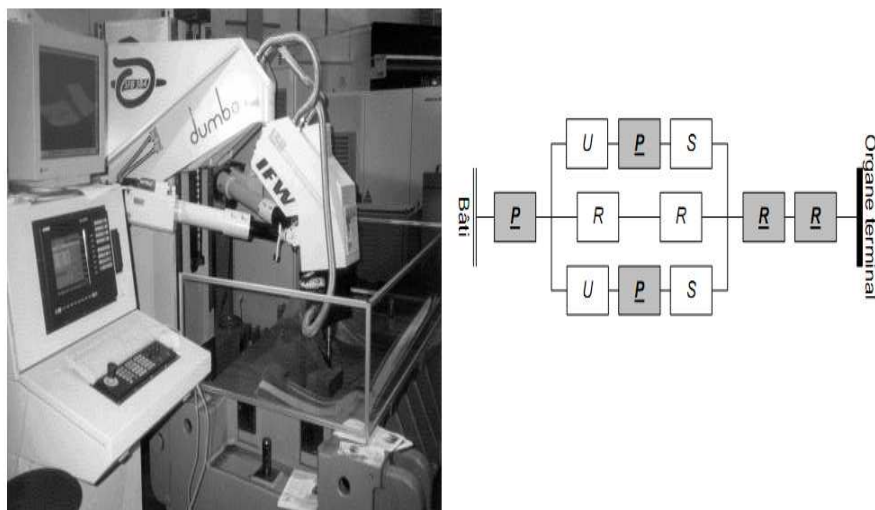


Figure 1.7- Dumbo (IFW) de l'université de Hanovre et son graphe d'agencement.

### 1.2.2.3 Architecture main droite/main gauche

Afin d'obtenir de bonnes capacités de déplacement en position et en orientation, un découplage entre ces deux types de mouvements est un bon compromis, ceci constitue le principe des architectures main gauche et main droite. La machine Verne de Fatronik (figure 1.8) présente un exemple de ce type d'architecture, elle possède un poignet sériel pour la pièce dont le rôle est d'assurer les rotations autour des axes  $Y$  et  $Z$  (respectivement les axes machines  $B$  et  $C$ ) et une plate-forme parallèle pour l'outil. La combinaison des deux modules sériel et parallèle a permis à la machine Verne de disposer de capacités cinématiques élevées et homogènes (vitesse maximale de  $50 \text{ m.min}^{-1}$ , et une accélération par axe de  $15 \text{ m.min}^{-2}$  ainsi que la possibilité de travailler avec des valeurs de Jerk supérieures à  $100 \text{ m.min}^{-3}$  sur chaque axe de translation). Par ailleurs, l'inconvénient de ce concept est qu'il ne peut convenir à des pièces trop lourdes puisque la dynamique est alors pénalisée.



Figure 1.8- *Machine-outil Verne de Fatronik.*

## 1.3 Les robots parallèles versus les robots série

### 1.3.1 Avantages des robots parallèles

Mettre en parallèle plusieurs chaînes cinématiques entraînées chacune par un actionneur offre les avantages suivants [Clavel, 1991] :

- Faible masse mobile, car les actionneurs sont souvent solidaires de la plate-forme fixe contrairement aux robots série qui comportent des actionneurs sur certaines articulations,
- Une bonne rigidité mécanique confère aux structures parallèles une bonne précision,
- Capacité de charge transportable élevée due à sa distribution sur les différentes chaînes cinématiques,
- Les structures parallèles donnent la possibilité d'obtenir des mouvements à haute dynamique (vitesses et accélérations élevées jusqu'à 50 g), car les actionneurs n'auront pas à compenser des poids importants appliqués en porte-à-faux, ils peuvent donc engendrer des vitesses et accélérations beaucoup plus importantes,
- La possibilité de positionner les actionneurs directement sur la base fixe procure de nombreux avantages. Tout d'abord, cela offre un choix important pour les actionneurs car leur masse n'est plus un critère de sélection du fait qu'elle n'intervient pas dans l'inertie. Les problèmes de liaison entre actionneurs, capteurs et contrôleurs sont simplifiés. Les moteurs sont plus facilement isolables de l'espace de travail dans le cas d'application en atmosphère propre,
- Les déformations des segments sont réduites, car ils sont sollicités qu'en traction-compression, ce qui leur offre aussi une bonne rigidité.
- La symétrie des robots parallèles (composés de plusieurs chaînes cinématiques identiques) donne la possibilité de fabrication en série, ce qui permet de réduire : les coûts d'étude unitaire et de construction, les pièces détachées en stock, etc.

- Les erreurs sur les capteurs internes (ceux qui mesurent les longueurs des segments) n'affectent l'erreur sur la position de la plateforme que de manière faible [Dombre, 2001].

#### 1.3.2 Inconvénients des robots parallèles

Par rapport aux robots série, les robots parallèles présentent les inconvénients suivants :

- Espace de travail réduit (restreint),
- Faible ratio volume de travail/encombrement,
- Le modèle géométrique est parfois difficile à obtenir,
- Présence des singularités dans l'espace de travail qui peut conduire à une perte de contrôle de la plateforme mobile (nacelle),
- Non linéarité entre les équations géométriques et cinématiques ce qui entraîne une grande complexité de conception et de commande.

#### 1.3.3 Avantages des robots série

Les robots série constituent la majorité des robots installés dans l'industrie. Leur architecture mécanique est inspirée du bras humain. Ils ne sont pas nécessairement appropriés à toutes les tâches, du fait de ce caractère anthropomorphe. Un robot série est constitué d'une chaîne cinématique ouverte. Il s'agit d'une succession de segments reliés entre eux par des liaisons à un degré de liberté en rotation ou en translation ; chaque articulation est commandée par un actionneur situé à l'articulation ou sur l'un des segments précédents. Parmi les avantages que les robots série présentent, on peut citer :

- Grand volume de travail,
- Simplicité de la synthèse des lois de commande.

#### 1.3.4 Inconvénients des robots série

Les principaux défauts des robots série sont les suivants :

- Une inertie élevée due aux masses réparties sur toute la chaîne cinématique (actionneurs et organes de transmission), peut engendrer des erreurs de positionnement, des vibrations et surtout limiter la rapidité,
- Précision médiocre, ceci est dû à l'accumulation d'erreurs le long de la chaîne cinématique,
- Faible rapport (charge transportable / masse totale du robot) qui n'est jamais supérieur à 0,3 dans le meilleur des cas [Merlet, 2006].
- Manque de rigidité due à la mise en série d'éléments de la chaîne cinématique. Le fait que les éléments soient disposés en série, implique que chaque segment doit supporter la charge, mais aussi la masse des segments suivants, ce qui provoque la flexion,
- Une fatigue et une usure des liaisons de puissance assurant l'alimentation des actionneurs peuvent engendrer des pannes plus fréquentes,
- Une fatigue et une usure des liaisons assurant la circulation des informations entre les capteurs et la commande a des conséquences importantes sur la sécurité car une erreur de transmission peut engendrer des mouvements désastreux du robot,
- Les erreurs de conception mécanique et l'imprécision des capteurs s'accumulent et contribuent à diminuer la précision de l'organe terminal. De plus, il devient difficile

de commander ces robots à des vitesses élevées car certaines forces perturbatrices (inertie, Coriolis et centrifuge) prennent de l'ampleur.

### 1.3.5 Récapitulatif

Les avantages et les inconvénients des robots série et parallèles sont illustrés dans le tableau 1 :

Critères de comparaison	Robots série	Robots parallèles
Charge transportable	Faible	Grande
Masse mobile (inertie)	Grande	Faible
Rigidité	Faible	Grande
Précision	médiocre	Grande
Vitesse et Accélération	Médiocre	Très grandes
Ratio volume de travail/encombrement	Grand	Faible
Volume de travail	Grand	Faible
Singularité dans l'espace de travail	Rare	Présence de singularité
Obtention du modèle géométrique direct	Simple	Difficile
Obtention du modèle géométrique inverse	Difficile	Simple
Synthèse des lois de commande	Difficile	Difficile
Conception	Simple	Difficile

Tableau 1.1- *Tableau comparatif entre robot série et robot parallèle.*

Nous pouvons constater, à partir du tableau 1.1 que les robots parallèles sont plus appropriés pour des tâches qui requièrent soit :

- La manipulation de charges lourdes,
- Une bonne précision de positionnement,
- Une grande rapidité de mouvement.

## 1.4 Evolution des PKMs dans l'industrie

Les limitations inhérentes à l'utilisation des architectures classiques de type série pour la construction de manipulateurs robots ont conduit les chercheurs à s'intéresser à des architectures alternatives parallèles ou hybrides (série-parallèles). En effet, au meilleur de la connaissance des auteurs, le premier système mécanique de ce type rapporté dans la littérature scientifique est la machine construite par Gough [Gough, 1956] en 1955. Il construisit une plate-forme mobile à structure parallèle dont le but était de tester l'usure des pneus des avions (figure 1.9). Il est le premier à avoir mis au point une structure à six chaînes cinématiques que l'on nomme actuellement Hexapodes. La plate-forme mobile de ce mécanisme possède 6 degrés de liberté (les trois translations et les trois rotations de l'espace). La plateforme mobile (partie mobile) est reliée à la base (partie fixe) à l'aide de 6 pattes identiques. Chacune de ces pattes est connectée, d'une part à la base par un joint de cardan et d'autre part à la plateforme mobile par une liaison rotule. La longueur de chacune des pattes est modifiée à l'aide d'un vérin.

Ce principe, légèrement modifié (figure 1.4), a été repris en 1965 par Stewart [Stewart, 1965] pour générer des mouvements sur un simulateur de vol à 6 *ddl*. Cependant, en

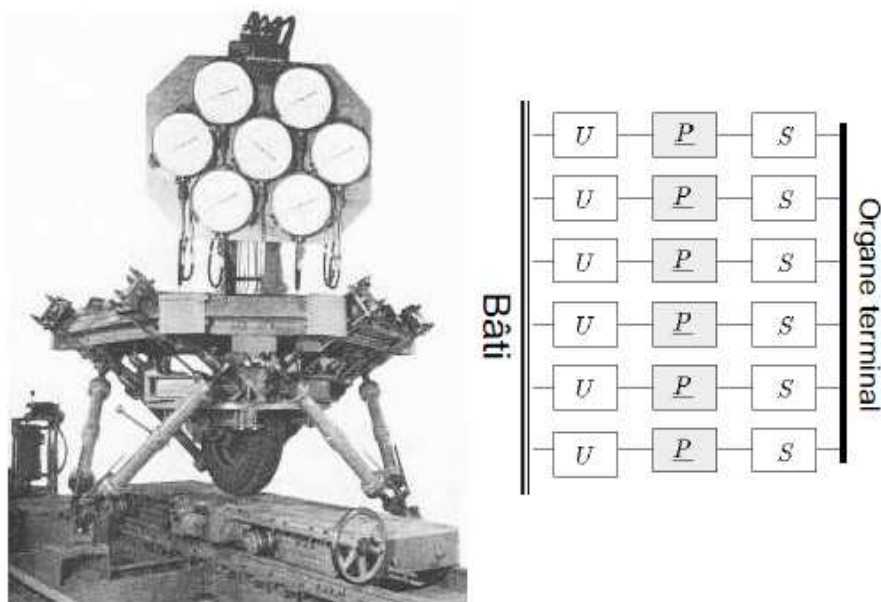


Figure 1.9- Plate-forme de Gough et son agencement.

analysant l'architecture retenue, on constate que l'objectif de la réduction des masses en mouvement n'est pas pleinement atteint. Les plates-formes de Gough et de Stewart, souvent appelées abusivement toutes deux "plate-forme de Stewart", possèdent des actionneurs mobiles et par conséquent une dynamique réduite [Company, 2000], bien que déjà meilleure que celle des robots série.

Ce n'est que vers la fin des années 70 et au début des années 80, que les robots parallèles ont commencé vraiment à attirer l'attention des mécaniciens et des roboticiens en tant qu'alternative possible aux structures sérielles. Hunt introduisait le concept du Manipulateur Parallèle et suggérait dans son livre [Hunt, 1978] l'utilisation de ce type d'architecture en robotique. McCallion [MacCallion and Pham, 1979] sont parmi les premiers à avoir mis au point un dispositif expérimental pour l'étude de l'efficacité de la structure parallèle pour certaines opérations mécaniques. Par ailleurs, Hunt [Hunt, 1983] a identifié certaines architectures qui offrent un potentiel plus important pour les applications en robotique.

L'avènement récent de ces robots parallèles, caractérisés par leurs hautes performances (dynamique très élevée, grande rigidité, bonne précision et de grandes vitesses et accélérations, etc.), a relancé la recherche et la réalisation de nouveaux robots plus productifs. Ainsi, ils sont utilisés dans des domaines variés tels que l'assemblage, la pharmacie, la médecine, la mécanique [Chablat and Wenger, 2003]. Selon la tâche à réaliser, une configuration de l'architecture parallèle sera plus au moins adaptée.

En effet, en 1988, le professeur Clavel [Clavel, 1988] inventa à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne le premier robot parallèle "Robot Delta" (figure 1.10) destiné à des tâches de "pick and place" qui nécessitent uniquement 3 *ddl* en translation (4 *ddl* avec orientation). Ce type de robots possède des performances particulières en terme de vitesse (jusqu'à 10 m/s) et accélération (jusqu'à 20 g), il a connu un grand succès commercial. Dès lors, une deuxième génération des robots parallèles (robots légers) est apparue. Dans

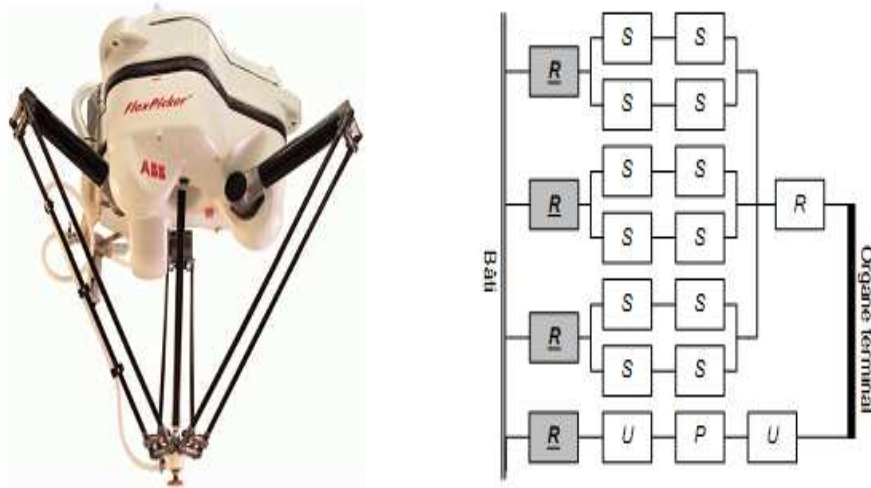


Figure 1.10- Le robot FlexPicker de ABB (Robot Delta) et son graphe d'agencement.

le même contexte et en 1991, François Pierrot [Pierrot et al., 1991] proposa un nouveau concept de 6 axes, qu'il l'a nommé Hexa représenté sur la figure 1.11. Il est composé de 6 chaînes cinématiques actionnées par des moteurs rotatifs reliés chacun par une liaison rotule à une barre de longueur fixe. Chacune de ces barres est reliée à la nacelle par une liaison rotule. Ce robot possède des capacités dynamiques très élevées, il est bien adapté aux applications de manipulation de pick-and place.

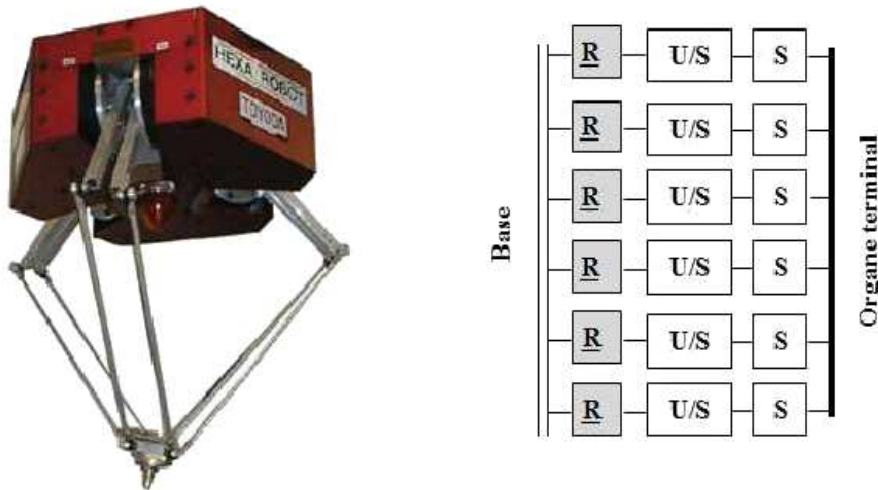


Figure 1.11- Robot Hexa : photo et graphe d'agencement.

A la fin des années 80 à nos jours, plusieurs travaux ont été effectués pour résoudre les problèmes liés à ces nouvelles architectures (calibration, précision, commande, etc.). Parmi les domaines d'application promoteurs des robots parallèles l'usinage (l'usinage à grande vitesse) et l'assemblage de précision. Ces applications exigent des performances dynamiques de plus en plus élevées, grande rigidité et de bonne précision, que les machines-outils à structure cartésienne (classique) ne peuvent plus toujours offrir car elles doivent être massives pour augmenter leur rigidité, elles vont souffrir alors d'inerties très importantes qui limitent leurs performances dynamiques (elles souffrent du même défaut

que les robots série). Étant donné que, pour un effort de poussée donné, l'accélération résultante est inversement proportionnelle à la masse déplacée, l'amélioration des performances dynamiques passe obligatoirement par une réduction des masses en mouvement. Cette dernière constatation est particulièrement difficile à mettre en oeuvre dans le cas des architectures série où on doit concilier la réduction des masses avec une bonne rigidité de la structure [Company, 2000].

Avec les technologies actuelles, notamment en matière de motorisation, les machines à structure cartésienne réalisées tendent à s'approcher des limites (1,2 g d'accélération) en matière de capacité d'accélération et ce, principalement à cause de l'importance des masses transportées. Leur réduction revêt donc une importance capitale. Plusieurs études d'optimisation et de conception en utilisant des logiciels de calcul éléments finis sont faites afin d'obtenir des pièces plus légères et rigides. Dans certains cas, des alliages à base d'aluminium, à la place de la fonte, ont permis aux machines d'améliorer leurs performances dynamiques. Cependant, les limites sont sur le point d'être atteintes. Donc la nécessité d'augmenter les vitesses de travail de ces machines-outils passe soit par l'amélioration des composants des machines actuelles (précédemment expliqué), soit par le changement radical d'architecture de ces machines. D'où le développement des machines dites machines-outils à cinématique parallèle (conçues sur la base des robots parallèles), particulièrement intéressantes pour l'usinage à grande vitesse.

Historiquement, la première présentation officielle d'une machine-outil parallèle remonte à 1994 avec la fraiseuse proposée par la société Giddings et Levis sous le nom de "Variax" au salon de Chicago (figure 1.12). D'après son constructeur, outre le fait que la machine possède 6 *ddl*, elle serait 5 fois plus rigide qu'une machine classique et aurait des vitesses d'avance bien supérieures [Weck and Staimer, 2002]. Cette machine reprenait l'architecture de type plate-forme de Gough-Stewart communément appelée Hexapode (figure 1.13) où l'outil est relié à une base fixe au moyen de six jambes télescopiques montées en parallèle. Les masses en mouvement sont plus faibles que dans une machine-outil conventionnelle puisque chaque moteur ne déplace que le plateau supportant l'outil. De plus, les jambes ne subissent aucune contrainte de flexion, leur structure peut être allégée.

Depuis cette date, plusieurs industriels travaillent sur des prototypes de machines-outils parallèles. La plupart d'entre eux ont repris l'architecture Hexapode, telle que la société Ingersoll, qui propose la fraiseuse "Octahedral Hexapod" et la société Geodetics mettant sur le marché la "G1000". Après une période d'engouement, ces sociétés ont été confrontées à des problèmes (calibration, commande, etc.) pour rendre ces machines réellement opérationnelles. Pour les résoudre les Sandia National laboratoires ont réuni un consortium pour mettre au point un Hexapode destiné à remplacer certaines fraiseuses. Ce projet a déjà abouti à la commercialisation d'une machine dénommée "Tornado 2000" par la société Hexel qui revendique une raideur de 300 N/micromètre et une précision meilleure que 25 micromètre (figure 1.14). La même démarche a été faite en Italie au sein du projet "Acrobat". L'université de Texas à Arlington a proposé d'utiliser un robot parallèle pour une perceuse et un centre d'usinage alors que l'université d'Urbana-Champaign propose un projet "Smartcuts" d'utiliser plusieurs robots parallèles à 3 *ddl* pour des opérations d'usinage.

Notons aussi que l'architecture Hexapode n'est pas la seule architecture parallèle pos-



Figure 1.12- *La Variax de Gidding and Lewis : Fraiseuse cinq axes.*



Figure 1.13- *Machine Hexapode.*

sible pour l'usinage, car il existe des solutions pour lesquelles les jambes de longueur fixe glissent sur des rails, cas de l'architecture Hexaglide qui représente une alternative à l'architecture Hexapode, elle a été présentée par l'ETH Zürich (figure 1.15). L'avantage de cette architecture réside dans le fait que les moteurs sont fixes, ce qui diminue les inerties et permet l'emploi de moteurs linéaires. De plus, la dissipation thermique des moteurs est facilitée.

Des versions 3 axes de l'Hexaglide ont été proposées par la suite avec l'architecture Triaglide (figure 1.16), le Linapod (ISW Uni Stuttgart), le Quickstep (Krause et Mauser) et l'Urane SX (Renault-Automation). Ces machines reprennent en fait une architecture déjà proposée en robotique avec par exemple le "Delta linéaire" et le "Y-Star" permettant de maintenir une orientation fixe de l'outil. Les machines Hexaglide et Triaglide ont pour avantage supplémentaire d'offrir un volume de travail présentant une dimension ajustable à la demande (il suffit d'augmenter la longueur des liaisons glissières pour augmenter d'autant la longueur du volume de travail).



Figure 1.14- *Hexel Tornado 2000.*

D'autres structures de machines, ont été proposées, en se basant sur l'idée d'allier les atouts des robots série et parallèles tout en minimisant leurs défauts (volume de travail restreint et complexe, non linéarité des équations qui relient les déplacements de l'outil à ceux des moteurs, grande variation des performances au sein du volume de travail), se sont les architectures hybrides parallèle-sérielles à l'image de la machine 5 axes Tricept 805 (figure 1.17) et du Tricept 1005 du suédois Neos-Robotics. C'est une machine dont l'architecture parallèle porte un poignet série. Il est utilisé pour des opérations de forage, d'ébarbage et de fraisage à précision limitée (utilisation dans le domaine de l'automobile et aéronautique, un exemple de constructeurs ayant investi dans un système de production faisant appel à des modules Tricept 805 pour l'usinage de pièces en alliage d'aluminium



Figure 1.15- *Machine Hexaglide.*

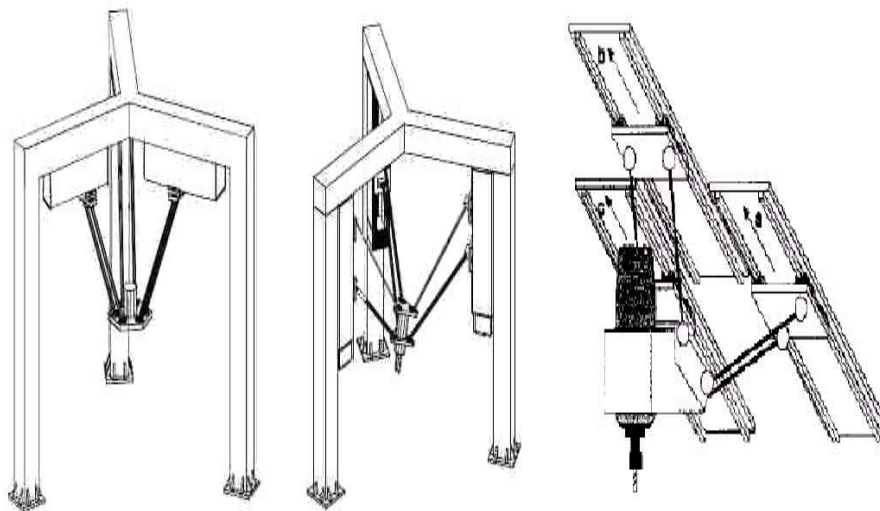


Figure 1.16- *Exemple d'architecture des machines Triaglide.*

le groupe Allemand BMW).

On trouve aussi la machine Dyna-M du WZL (Aix-la-Chapelle), Il s'agit d'une machine 3 axes constituée d'un mécanisme plan à 2 ddl complété par un axe linéaire porté et la machine Georg V de l'IFW (Université de Hanovre) (figure 1.18). Elle diffère du Tricept par le simple fait que les vérins ont été remplacés par des moteurs linéaires directement fixés sur la bâti. Il s'agit de la même distinction que celle existant entre un Hexapode et un robot de type Hexa, faisant de Georg V un robot de type parallèle léger.



Figure 1.17- *Machine-outil Tricept TR805.*



Figure 1.18- *Machine Georg V.*

Certains obstacles freinent le succès commercial attendu de ces machines [Merlet, 2006]. Nous pouvons les citer comme suit :

- La méfiance des utilisateurs par rapport à ces machines caractérisées par la non linéarité des déplacements (les axes ne sont plus physiques mais résultant de la combinaison de plusieurs mouvements non linéaires),
- Le ratio "empreinte au sol / volume de travail" est mauvais.
- Les systèmes de commandes type numérique commencent à peine à intégrer les architectures parallèles.
- Les procédures d'étalonnage sont complexes.
- La présence d'articulations passives à plusieurs *ddl*, etc.
- Aptitude d'orientation limitée à cause de la présence des singularités au sein de l'espace de travail [Krut, 2003].

Plusieurs travaux et projets de recherche relatifs au développement de ces architectures ont été lancés, parmi eux nous pouvons citer les Projets ROBEA MAX et MP2 dans les quels IRCCyN, INRIA, LaRAMA, LASMEA, LIRMM se sont réunis. Il existe plusieurs manières de classer les machines-outils à cinématique parallèle : sur le plan de leurs structures, sur le plan métrologique, sur le plan des performances dynamiques et sur le plan de l'autonomie. L'objectif à moyen terme de ces différents laboratoires est de proposer une démarche, reposant sur un champ de compétences pluridisciplinaire, qui permette de prendre en compte les notions de performance et d'autonomie dès le stade de la conception, mais également de considérer les problèmes fondamentaux d'identification géométrique et dynamique, Pour aboutir à des principes de commande garantissant les performances. Ces projets ont offert une ouverture vers des capacités d'auto étalonnage, d'autocorrection, voire d'auto maintenance, dans une approche s'inspirant des concepts de dépendabilité.

Une collaboration entre l'équipe-projet DEXTER (équipe de recherche française du LIRMM) spécialisée dans la conception, la manipulation, la robotique parallèle et la robotique médicale (sous la direction de Philippe Pognet) et le centre de *R & D de Toyota Machine Works au Japon*, a pu définir une nouvelle architecture de machines (de la famille H4) qui potentiellement, pourraient être intéressantes pour des opérations d'usinage.

Par ailleurs, une étude réalisée au Royaume-Uni, dans le cadre du projet européen RAMOULDIE, a récemment comparé les performances de l'Hexapode Variax avec une machine sérielle 3-axes et une machine sérielle 5-axes [Hervé, 1992] montre la difficulté de comparer des machines-outils dont les structures et les commandes numériques sont différentes. La conclusion de cette étude est que, pour la pièce test utilisée et pour les critères choisis, l'Hexapode a un niveau de précision similaire aux deux autres machines mais pas meilleur, ce qui constitue déjà un grand pas en avant.

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les définitions des robots industriels d'architecture sérielle. Nous avons donné dans une autre partie, quelques définitions des robots parallèles et leurs avantages et inconvénients par rapports aux robots série. Nous avons présenté aussi un historique des machines-outils à cinématique parallèle. Dans le chapitre qui suit nous proposons une synthèse dimensionnelle des PKMs basée sur l'approche d'optimisation multiobjectif.



# Chapitre 2

## Synthèse dimensionnelle des PKMs

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>26</b>
<b>2.2</b>	<b>Etat de l'art de la synthèse dimensionnelle des PKMs</b>	<b>26</b>
<b>2.3</b>	<b>Critères et indices de performance</b>	<b>29</b>
2.3.1	L'espace de travail	29
2.3.2	Performances cinématiques	32
2.3.2.1	Précision	33
2.3.2.2	Indices des performances cinématiques	33
2.3.2.3	Homogénéisation de la matrice jacobienne	35
2.3.2.4	Analyse de la singularité	35
2.3.3	Rigidité	38
2.3.3.1	Cas de la rigidité linéaire	39
2.3.4	Performances dynamiques	39
2.3.4.1	Indice d'isotropie dynamique	40
<b>2.4</b>	<b>Définition des contraintes</b>	<b>40</b>
2.4.1	Contraintes de l'espace de travail	40
2.4.1.1	Débattements articulations actionnées	40
2.4.1.2	Débattements articulations passives	41
2.4.1.3	Evitement des collisions	41
2.4.2	Contraintes cinématiques	41
2.4.3	Contraintes sur la limitation des variations des facteurs de transmission des vitesses et efforts	41
2.4.4	Contraintes non géométriques	43
<b>2.5</b>	<b>Formulation du problème</b>	<b>43</b>
2.5.1	Formulation basée sur un seul critère de performance	43
2.5.2	Formulation basée sur deux critères de performance	45
2.5.3	Formulation basée sur trois critères de performance	46
2.5.4	Discussion	46
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>47</b>

---

## 2.1 Introduction

La conception optimale de machines-outils à cinématique parallèle passe par deux étapes fondamentales. La première concerne la synthèse topologique (*la topologie est la description de la chaîne cinématique, c'est à dire le graphe représentant la façon dont sont interreliés les corps constituant le robot manipulateur : types, caractéristiques et disposition des couples cinématiques*), elle permet *a priori*, la détermination du choix des familles d'architectures les plus adaptées aux applications désirées (par exemple : opérations d'usinage 3 axes ou 5 axes), en faisant appel à plusieurs techniques telles que : théorie des visseurs (screw theory) [Leguay-Durand, 1997] [Frisoli, 2000] [Kong, 2001], les groupes de Lie [Ledermann, 1973] [Hervé, 1991] [Hervé, 1999], la théorie de graphes [Dobrzanskyj and Freudenstein, 1967] [Freudenstein and Woo, 1974] [Freudenstein and Maki, 1979], etc. Tandis que la deuxième concerne la synthèse dimensionnelle (géométrique) et vise à dimensionner et optimiser les dimensions de l'architecture retenue lors de la synthèse topologique (structurelle), cette étape demeure une tâche très importante vu que les critères de performance d'une architecture donnée dépendent très fortement des dimensions de ses paramètres géométriques.

En effet, la synthèse dimensionnelle est un problème d'optimisation multiobjectif : étant donnée l'architecture (topologie) d'une machine-outil à cinématique parallèle, il s'agit de trouver son dimensionnement de sorte que ses performances (espace de travail, précision, performances cinématiques, rigidité, performances dynamiques, etc.) soient optimisées.

Dans ce chapitre, nous présentons un état de l'art de la synthèse dimensionnelle des PKMs, ensuite nous étudions les critères et les indices de performance et les contraintes liées aux PKMs. Nous présentons à la fin de ce chapitre quelques formulations du problème de dimensionnement des PKMs (obtention des paramètres géométriques optimisés) basées sur un, deux et trois critères de performance.

## 2.2 Etat de l'art de la synthèse dimensionnelle des PKMs

Les machines à cinématique parallèle (PKMs) font l'objet de beaucoup de travaux de recherche théorique ou appliquée [Merlet, 2006] [Merlet, 1997] [Schönherr, 2000]. Les architectures parallèles présentent certains avantages ce qui leur vaut d'être utilisées dans diverses applications (assemblage, manutention, opérations d'usinage, etc.). Ces avantages sont dus principalement à la connexion entre la base et l'outil (organe terminal), qui est assurée par plusieurs chaînes cinématiques, ce qui permet d'obtenir une meilleure rigidité et une bonne répartition des efforts sur toutes les chaînes cinématiques. Un autre avantage est la possibilité de mettre tous les actionneurs près de la base pour minimiser les masses en mouvement. Il en résulte une grande capacité de charge pour une faible inertie. En effet, le ratio entre la charge utile et le poids du robot est habituellement d'environ  $\frac{1}{10}$  pour les robots série, contre  $\frac{1}{2}$  pour les robots parallèles [Merlet, 2006]. Malgré les avantages que présentent les PKMs par rapport aux machines-outils à structure sérielle classique (conventionnelles), les PKMs n'ont pas encore vraiment percé dans le milieu industriel. Ceci peut s'expliquer par les raisons suivantes :

- Limitation du volume de travail
- Présence des singularités à l'intérieur du volume de travail, ce qui entraîne une variabilité des performances (volume de travail non isotropique),

- Complexité des transformations entre l'espace opérationnel et l'espace articulaire (la complexité des modèles géométriques, le modèle géométrique direct peut ne pas exister sous forme analytique),
- Difficulté de découplage des mouvements en translation et en rotation.

Ces raisons présentent le point de départ pour beaucoup de chercheurs qui s'intéressent à la conception, l'optimisation et l'analyse des PKMs.

Dans leurs travaux, Gosselin et Angeles [Gosselin and Angeles, 1988] analysent la conception optimale d'un manipulateur planaire à 3 *ddl*, leurs objectifs étant la maximisation de l'espace de travail global et l'obtention d'une matrice jacobienne isotrope. [Gosselin and Lavoie, 1993] analysent les configurations isotropiques d'un manipulateur parallèle sphérique à 3 *ddl*, et ont montré que les paramètres géométriques du manipulateur peuvent être choisis de façon à obtenir une conception isotropique. Une approche utilisant un algorithme génétique a été proposée par [Boudreau and Gosselin, 2001] pour obtenir les paramètres architecturaux d'une plate-forme de Gough-Stewart. Cet algorithme détermine l'intersection entre l'espace atteignable réel de la plate-forme et l'espace prescrit. 26 paramètres architecturaux ont été ainsi optimisés pour minimiser les aires des régions non communes.

Dans son travail de doctorat, Majou [Majoux, 2004] a proposé une nouvelle notion l'EDR "*l'Espace Dextre Régulier : c'est une partie de l'espace de travail dont la forme est régulière (cube, cylindre) et dans laquelle les performances cinéostatiques (conditionnement, amplification des vitesses) sont limitées*". A partir de cette notion, il a construit de nouveaux indices de performance cinéostatiques adaptés aux PKMs à translations pour optimiser leur géométrie ou les comparer entre elles. Il a aussi proposé une méthode pour améliorer la rigidité de ces PKMs en analysant l'influence des paramètres géométriques qui ne modifient pas le volume de l'EDR. Pour la conception et la comparaison des PKMs à 3 *ddl*, [Chablat et al., 2004] ont utilisé deux critères : l'Espace Dextre Régulier et un critère cinéostatique. Un algorithme décrivant cette méthode a été présenté.

D'autres travaux comme [Zanganeh and Angeles, 1997], utilisaient le conditionnement de la matrice jacobienne comme un critère d'optimisation. Quand le nombre de conditionnement est égal à 1, la configuration est dite isotrope. Cet indice a été introduit pour la première fois par Yoshikawa [Yoshikawa, 1985b, Yoshikawa, 1990] pour les robots manipulateurs série, et il a été appliqué aux PKMs par [Gosselin and Angeles, 1990]. ensuite ils l'ont utilisé pour définir l'indice performance global [Gosselin and Angeles, 1991]. [Pittens and Podhorodeski, 1993] utilisaient uniquement le nombre de conditionnement de la matrice jacobienne pour quantifier la dextérité d'un manipulateur. Ils ont étudié plusieurs configurations de la plate forme de Stewart pour optimiser la dextérité locale et ainsi déterminer l'architecture optimale et l'espace de travail effectif. Dans leurs travaux [Jinsong and Xiaoqiang, 2003], analysent les effets des paramètres géométriques sur la dextérité et l'espace de travail. Ils discutent également l'effet de ces paramètres sur le nombre de conditionnement.

D'autres chercheurs concentrent leur travaux sur l'amélioration de la rigidité comme Bhattacharya [Bhattacharya et al., 1995] qui définit une méthode d'optimisation où la rigidité est le critère de performance.

D'autres travaux [Han et al., 1989] [Ryu and Cha, 2003] s'intéressent à la précision, qui est aussi un critère majeur de conception pour des tâches très fines de mouvement telles que les opérations d'usinage, la mesure. Dans leur travail, [Wang and Masory, 1993] présentent un modèle cinématique d'erreur pour une plateforme de Stewart qui utilise le paramétrage D-H. Ce modèle est utilisé afin de minimiser les effets des erreurs de fabrication et d'assemblage sur l'exactitude de pose de plateforme. Dans le même contexte, [Patel and Ehmann, 1997] présentent un modèle d'erreur pour la machine-outil basée sur une plateforme de Stewart qui prend en compte plusieurs sources d'erreur dont la fabrication, la déformation (thermique et élastique), l'erreur de commande, etc. Ils ont alors tracé la sensibilité de gain d'erreur comme outil de conception pour l'attribution de tolérances lors de la fabrication.

D'autres travaux montrent que, pour améliorer les performances d'un manipulateur parallèle, il est nécessaire de tenir compte de la dynamique. MA et Angeles [MA and Angeles, 1993] déterminent les dimensions d'une architecture avec ses paramètres inertiels. Ils proposent la notion de l'isotropie de la dynamique. Asada [Asada, 2006] présentait la dynamique d'un manipulateur dans l'espace opérationnel en construisant un ellipsoïde généralisé d'inertie à chaque point de l'espace de travail. Le changement de la forme et de l'orientation de cet ellipsoïde a été lié aux forces et au couplage non linéaire dans la dynamique du manipulateur. Toumi [Toumi and Asada, 1985] et Yang [Yang and Tzeng, 1986] posent des conditions qui doivent être satisfaites par les paramètres cinématiques et les propriétés d'inertie des robots manipulateurs pour obtenir un tenseur d'inertie découplé et invariant. Yoshikawa [Yoshikawa, 1985a] a développé l'ellipsoïde de manipulabilité dynamique basée sur l'accélération de l'effecteur et a utilisé son volume pour la mesure de la manipulabilité dynamique.

Généralement, les approches traitant le problème de la synthèse dimensionnelle peuvent être classées en deux principales catégories :

- La première approche est basée sur l'atlas des performances (performance chart). Son principe est premièrement de réduire le nombre des paramètres dans un espace limité par représentation graphique des indices de performance comme atlas. Après cette étape le concepteur peut utiliser ces atlas pour choisir les paramètres de conception [Merlet, 2006] [X.-J. Liu and Wang., 2004]. Cette approche a été utilisée par Liu et al. [Liu and Wang., 2007] afin de proposer, pour la conception d'un mécanisme parallèle ayant moins de 5 paramètres linéaires, une méthodologie de conception cinématique optimale nommée PCbDM (Performance-Chart based Design Methodology) et par Badescu [Badescu, 2004] pour l'optimisation des mécanismes à 3 *ddl* de type UPU et UPS (U : universal joint, P : prismatic joint, S : ball-and-socket joint). Il a appliqué cette méthode dans le cas d'un espace de travail avec contraintes et sans contrainte (i.e., contraintes sur les limites des variables articulaires). Pour chaque configuration de conception, il utilise la méthode de Monte Carlo pour le calcul de trois indices de performance : le volume de l'espace de travail, la moyenne de l'inverse du nombre de conditionnement et le GDI (Global Conditioning Index), et puis il trace chaque indice de performance en fonction des paramètres de conception. Il conclut que lors de l'introduction de la contrainte sur les variables articulaires, l'isotropie globale du mécanisme est améliorée et que l'espace de travail est réduit.

L'inconvénient principal de cette approche est que les résultats d'optimisation sont flous.

- La deuxième approche est basée le concept des fonctions objectif (cost-function). Son principe est premièrement d'établir une fonction objectif (par la somme de tous les fonctions objectif (performances) pondérées dans une seule fonction objectif) avec des contraintes spécifiques et puis utiliser les algorithmes d'optimisation pour chercher les résultats. Cette approche a été utilisée par plusieurs chercheurs [Miller., 2004] [Huang., 2004] [S-D. Stan, 2007]. Stock [Stock and Miller, 2003], pour la réalisation de la synthèse géométrique d'une architecture de type Delta linéaire. Il a formulé une fonction qui représente la somme de deux indices basés sur la manipulabilité et l'espace de travail. Zhang [Zhang et al., 2002], utilisait un algorithme génétique pour maximiser la rigidité et le volume de travail d'une architecture de type tripode. D'autres travaux [Klein and Blaho, 1987] utilisaient l'indice de dextérité et l'évitement des singularités pour trouver la conception optimale. Stan et al. [S-D. Stan, 2007] optimisaient un robot parallèle à 2 *ddl* en considérant deux critères de performance l'indice de la qualité de transmission des vitesses et l'espace de travail par l'utilisation des algorithmes génétiques. Dans leur travail, Hao and Merlet [F. Hao, 2005] proposent une méthodologie de conception optimale basée sur l'analyse par intervalles pour déterminer les paramètres géométriques en satisfaisant deux critères de performance : l'espace de travail et la précision. L'inconvénient majeur de cette approche est la consommation du temps.

Par ailleurs, peu de travaux ont proposé des approches globales de la conception de cas particuliers de PKM. Pritschow [Pritschow and Wurst, 1997] a proposé une démarche globale en 6 étapes pour la conception d'une PKM de types Hexaglide ou Hexapode. Company [Company and Pierrot, 2002], à la suite d'une démarche globale ont optimisé une machine (UraneSX) pour des opérations d'usinage 3 axes pour des opérations de type perçage-lamage-taraudage. Valasek [Valasek, 2005] a décomposé le processus de la conception optimale d'une structure et ses paramètres géométriques en trois niveaux (Figure 2.1)

La majorité de ces travaux traite du problème de la synthèse dimensionnelle des PKMs en se basant sur un ou deux critères de performance au détriment des autres critères. Dans cette thèse, nous allons essayer de tenir compte simultanément et d'étudier les critères de performance qui ont un impact direct sur la synthèse dimensionnelle des PKMs par l'utilisation du concept de l'optimisation multiobjectif par les algorithmes génétiques.

## 2.3 Critères et indices de performance

### 2.3.1 L'espace de travail

L'espace de travail  $W$  est l'un des facteurs les plus importants pour la conception des PKMs. car les robots parallèles souffrent souvent de leur volume de travail faible, par rapport à celui des robots série. La figure 2.2 illustre ce problème dans un cas de robots planaires dont les chaînes cinématiques auraient les mêmes butées articulaires [Dombre, 2001].

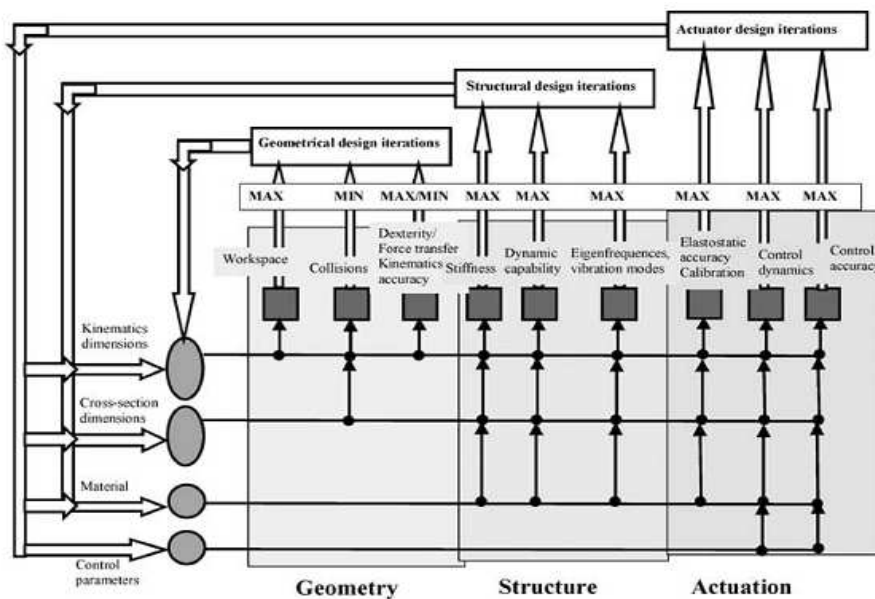


Figure 2.1- Décomposition du processus de conception selon [Valasek, 2005]

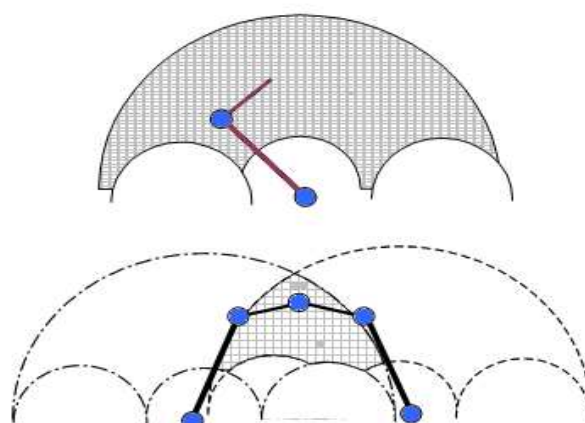


Figure 2.2- Comparaison de l'espace de travail d'un mécanisme parallèle planaire et son équivalent série.

Différents types de l'espace de travail existent pour les robots parallèles [Merlet, 2006] :

- **L'espace de travail maximal** :  
Défini comme l'ensemble des positions accessibles par l'organe terminal pour au moins une orientation de celui-ci.
- **L'espace de travail à orientation constante** :  
Défini comme l'ensemble des positions accessibles par l'organe terminal pour une orientation donnée de celui-ci.
- **L'espace de travail dextre** :  
Défini comme l'ensemble des positions accessibles par l'organe terminal pour toutes les orientations de celui-ci.

D'une manière plus générale, et du point de vue mathématique, l'espace de travail est défini par l'application  $f$  de l'espace articulaire ( $EA$ ) de dimension  $n$  dans l'espace opérationnel ( $EO$ ) de dimension  $m \leq 6$  :

$$q \in (EA) \longrightarrow X = f(q) \in (EO) \quad (2.1)$$

Le domaine ( $Q$ ) admissible pour les variables articulaires est en général un hyperparallélépipède défini par :

$$Q = \{q \in (EA), \forall j \leq n, (q_j)_{min} \leq q_j \leq (q_j)_{max} \quad j = 1 \dots n\} \quad (2.2)$$

Où  $(q_j)_{min}$  et  $(q_j)_{max}$  sont les butées sur l'articulation  $A_j$ . Nous supposons ici qu'il n'y a pas d'obstacles dans l'espace de travail.

Donc, Il s'agit de l'ensemble des situations de l'espace que l'organe terminal peut atteindre (configurations accessibles par l'organe terminal). Cet espace est défini par ses limites imposées par les débattements articulaires (actives et passives), les longueurs des segments et les collisions internes.

Par ailleurs, un sous espace de travail bien conditionné (absence de singularités internes, homogénéité des performances cinématique, etc.) de l'espace accessible doit être déterminé. Pour ce faire, une méthode basée sur un critère d'optimisation qui est le conditionnement de la matrice jacobienne (voir point suivant) est utilisée pour ne conserver seulement que les points garantissant une valeur minimale de ce critère, autrement dit, seuls les points accessibles ayant un nombre de conditionnement inférieur à un seuil imposé seront conservés pour représenter le sous espace de travail. Cette procédure permet d'avoir un espace de travail dextre  $W_{dextre}$  (l'ensemble des positions du point de référence de l'organe terminal pour lesquels toutes les orientations sont permises [Merlet, 2006]).

Par conséquent la problématique que nous pouvons poser ici est :

**Quel est le meilleur dimensionnement (vecteur des paramètres géométriques optimisé  $P^*$ ) d'une PKM qui permet d'avoir le plus grand espace de travail dextre ?**

Pour ce faire, nous proposons d'utiliser selon le type de la PKM étudiée l'une des deux procédures suivantes :

### Procédure 1 :

- Nous considérons un volume régulier  $V$  (sphère, cube, parallélépipède, etc.) qui contient *a priori* le volume de travail réel accessible du robot.
- Nous appliquons un 1<sup>er</sup> test d'appartenance des points aléatoirement choisis  $n_{total}$  (en utilisant la méthode de Monte Carlo ou de balayage) basé sur la résolution du modèle géométrique inverse.
- Nous appliquons un 2<sup>ème</sup> test basé sur un critère d'optimisation qui est généralement le conditionnement de la matrice jacobienne pour conserver seulement les points garantissant une valeur minimale imposé de ce critère. Les points qui vérifient les tests 1 et 2 sont notés  $n_v$ .
- Une estimation de l'espace de travail dextre peut être obtenu par :  $W_{dex} = \frac{n_v}{n_{total}} V$

Donc la fonction objectif visualisée ici est :

$$W_{dex} \rightarrow max \quad (2.3)$$

### Procédure 2 :

Il s'agit de trouver un vecteur de paramètres géométriques  $P^*$  qui maximise l'espace de travail du robot parallèle tout en respectant une contrainte basée sur un critère cinétostatique (exemple : conditionnement de la matrice jacobienne). D'où la fonction objective :

$$W_{dex} = \{points \in W \mid \kappa_J \leq \kappa_J^{max}\} \quad (2.4)$$

Pour les deux procédures citées ci-dessus, Nous appliquons une autre procédure d'optimisation sur l'espace de travail dextre  $W_{dex}$  obtenu, pour avoir un autre espace de travail dextre prescrit régulier  $W_{dex_R}$  (cylindre, cube, parallélépipède, etc.). La forme souhaitée de cet espace est déterminée selon les besoins du client (utilisateur), d'où :

$$W_{dex_R} \rightarrow max \quad (2.5)$$

## 2.3.2 Performances cinématiques

Le terme performance cinématique désigne à la fois la dextérité cinématique et la dextérité statique. La dextérité cinématique est définie par l'aptitude de l'organe terminal du robot à effectuer avec précision et facilité des petits déplacements arbitraires autour d'un point dans l'espace de travail [Dombre, 2001], et la dextérité statique est définie par l'aptitude de l'organe terminal à appliquer dans toutes les directions de l'espace de travail, des forces et des moments.

Ces performances cinématiques sont étroitement liées au rapport entre les vitesses opérationnelles et les vitesses articulaires (en vertu du principe de dualité déplacement/effort, au rapport entre les efforts statiques appliqués sur l'organe terminal et les couples mesurés sur les actionneurs). Elles permettent de mesurer :

- La précision, avec laquelle le mouvement de l'organe terminal et les forces de contact peuvent être commandés par les forces et les mouvements des articulations,
- La proximité d'une configuration singulière.

### 2.3.2.1 Précision

C'est l'un des critères les plus importants des PKMs. Les erreurs au niveau des actionneurs se transforment au niveau de l'outil via la matrice jacobienne par la relation suivante :

$$\delta X = J\delta q \quad (2.6)$$

Cette relation permet de calculer les erreurs de positionnement de l'outil produites par les erreurs articulaires. Les facteurs d'amplification de  $\delta q$  sont les valeurs singulières de la matrice jacobienne. Garantir une bonne précision de la PKM, se traduit mathématiquement par :

$$\sigma_{max}(J) \rightarrow min \quad (2.7)$$

Et comme :

$$\sigma_{max}(J) = \frac{1}{\tau_{min}(J^{-1})} \quad (2.8)$$

Alors :

$$\sigma_{min}(J^{-1}) \rightarrow max \quad (2.9)$$

$\sigma_{min}(J^{-1})$  et  $\sigma_{max}(J^{-1})$  sont respectivement les valeurs singulières minimum et maximum de la matrice  $J^{-1}$ .

### 2.3.2.2 Indices des performances cinématiques

Les performances peuvent être évaluées en étudiant les relations sur les vitesses et les efforts :

$$\begin{cases} \dot{q} = J^{-1}\dot{X} \\ f = J^{-T}\tau \end{cases} \quad (2.10)$$

Avec :

$$J^{-1} = J_q^{-1}J_x \quad (|J_q| \neq 0) \quad (2.11)$$

Trois indices basés sur la matrice jacobienne inverse  $J^{-1}$  peuvent être utilisés pour mesurer les performances cinématiques :

#### 2.3.2.2.a Indice de Manipulabilité

Le concept de manipulabilité, est décrit comme étant la capacité à se mouvoir dans toutes les directions, donc, une mesure de la capacité en vitesse du manipulateur à déplacer son organe terminal à partir d'une configuration articulaire donnée. Ce concept permet également d'obtenir une information sur la proximité d'une configuration singulière (une mesure de l'aptitude de l'organe terminal à se déplacer à partir de cette configuration). Son indice noté  $w$  a été défini par Yoshikawa [Yoshikawa, 1985b]. La définition de cet indice est donnée par :

$$w = \sqrt{\det(J^{-T}J^{-1})} \rightarrow max \quad (2.12)$$

Si la matrice jacobienne inverse  $J^{-1}$  est carrée, Nous obtenons :

$$w = |\det(J^{-1})| \rightarrow max \quad (2.13)$$

### 2.3. Critères et indices de performance

Nous remarquons ici en analysant  $\det(J^{-1}) = \frac{\det(J_x)}{\det(J_q)}$ , si  $J_q$  est singulière alors  $w$  tend vers l'infini ce qui indique la proximité d'une singularité de type série (voir la section d'analyse de la singularité). Dans ce cas, maximiser  $w$  n'a pas de sens. Nous concluons que l'utilisation de cet indice pour optimiser les performances cinématiques n'est pas toujours judicieuse.

#### 2.3.2.2.b Indice de la plus petite valeur singulière de $J^{-1}$

La plus petite valeur singulière (demi-longueur du plus petit axe de l'ellipsoïde des vitesses) est une mesure bien plus fiable de la proximité d'une singularité que l'indice de manipulabilité. Elle est particulièrement recommandée dans les applications où nous cherchons à s'éloigner des configurations singulières. Autrement dit, elle évalue l'aptitude du déplacement de l'organe terminal dans la direction la plus défavorable :

$$\sigma_{min}(J^{-1}) \rightarrow \max \quad (2.14)$$

#### 2.3.2.2.c Indice d'isotropie cinématique

En robotique, le conditionnement  $\kappa_J$  de la matrice  $J^{-1}$  est souvent utilisé pour mesurer l'isotropie cinématique. De plus, à cause de la dualité effort-vitesse, il est utilisé pour témoigner de l'isotropie en efforts également. Autrement dit, il mesure la qualité de transformation (uniformité de la distribution) des vitesses et des efforts autour d'une configuration de l'organe terminal et du point de vue de la commande il est conseillé que  $\kappa_J$  soit le plus petit possible, pour garantir que l'erreur due à la commande soit propagée sur la position de l'organe terminal de la manière la plus faible possible [Merlet, 2006]. Il est défini par le rapport entre sa plus grande et sa petite valeur singulière qui sont respectivement  $\sigma_{max}(J^{-1})$  et  $\sigma_{min}(J^{-1})$  :

$$\kappa_J = \|J^{-1}\| \cdot \|J\| = \frac{\sigma_{max}(J^{-1})}{\sigma_{min}(J^{-1})} \in [1, \infty[ \quad (2.15)$$

$\|J^{-1}\|$  : La norme Euclidienne de  $J^{-1}$

Lorsque le conditionnement  $\kappa_J$  tend vers l'infini, la matrice jacobienne inverse  $J^{-1}$  devient une matrice singulière, physiquement, cela signifie que le robot est en configuration singulière (voir section : Analyse de la singularité), et lorsque  $\kappa_J = 1$  elle devient une matrice parfaitement conditionnée (l'ellipsoïde des vitesses prend la forme d'une sphère), dans ce cas les configurations sont dites isotropes. Cela signifie que la vitesse et la rigidité statique de l'organe terminal sont égales dans toutes les directions. Autrement dit, l'organe terminal aura la même facilité pour se déplacer dans toutes les directions, ce qui est fortement désirable. D'où, la fonction objectif visualisée ici :

$$\kappa_J \rightarrow \min \quad (2.16)$$

Il est à noter que la dextérité cinématique dépend sensiblement de la configuration et des paramètres géométriques du robot parallèle. Elle évolue à l'intérieur de l'espace de travail, c'est donc une propriété locale [Huang et al., 1998], [Angeles, 2001], [Koteswara et al., 2003]. Pour la caractériser sur l'ensemble de l'espace accessible par le robot, nous utilisons l'indice de dextérité globale  $\eta_J$  [Gosselin and Angeles, 1991] (très utilisé pour comparer des diverses structures entre elles), qui est défini par la moyenne de la dextérité locale sur l'espace atteignable :

$$\eta_J = \frac{\int_W \kappa_J dW}{\int_W dW} \rightarrow \min \quad (2.17)$$

### 2.3.2.2.d Choix

L'indice d'isotropie cinématique est retenu comme indice de mesure des performances cinématiques du robot parallèle, car l'isotropie est une propriété importante dans les applications qui nécessitent la précision (l'usinage par exemple) et surtout lorsqu'il faut tenir compte simultanément des facteurs d'amplification des vitesses  $F_v$  et efforts  $F_e$  (voir section contraintes).

### 2.3.2.3 Homogénéisation de la matrice jacobienne

La conséquence directe lorsque les éléments qui composent la matrice jacobienne  $J$  sont de différentes unités (relatifs aux positions et aux orientations) est que le nombre de conditionnement n'a plus de signification physique claire. Pour s'affranchir de ce problème, il est nécessaire d'homogénéiser ses éléments. Pour ce faire, plusieurs propositions ont été faites par les chercheurs : Angeles [Angeles, 2001] a suggéré d'utiliser "la longueur caractéristique" c'est-à-dire en divisant les éléments liés aux positions par une longueur caractéristique  $L_c$ , cette dernière est obtenue en résolvant le problème d'optimisation  $\min k_J$ , sous les contraintes géométriques de la structure étudiée.

Une autre procédure proposée par [Fassi et al., 2005] est introduite pour trouver la longueur caractéristique. La matrice jacobienne inverse est décomposée en deux sous matrices  $J^{-1} = [J_1, J_2]$  tel que :  $J_1, J_2$  sont deux sous matrices de dimensions  $6 \times 3$ .  $J_2$  contient les termes des longueurs. Ses éléments sont divisés par la longueur caractéristique :

$$J^{-T} J^{-1} = \begin{bmatrix} J_1^T J_1 & \frac{1}{L} J_1^T J_2 \\ \frac{1}{L} J_2^T J_1 & \frac{1}{L^2} J_2^T J_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Pour trouver cette longueur, la condition d'isotropie est utilisée ( $J^{-T} J^{-1} = \sigma I_{6 \times 6}$ ), ce qui implique :  $J_1^T J_1 = \frac{1}{L^2} J_2^T J_2$  et  $\text{trace}(J_1^T J_1) = \text{trace}(\frac{1}{L^2} J_2^T J_2)$

D'où la longueur caractéristique :

$$L = \sqrt{\frac{\text{trace}(J_2^T J_2)}{\text{trace}(J_1^T J_1)}} \quad (2.19)$$

### 2.3.2.4 Analyse de la singularité

Les configurations singulières sont des postures particulières de l'organe terminal où le comportement des robots se dégrade [Dombre, 2001] [Krut, 2003]. Autrement dit, les configurations singulières sont des configurations où les performances des PKMs se détériorent et la structure risque d'être endommagée. Leur détermination devient donc une tâche indispensable pour pouvoir les éviter et ceci avant la détermination des critères de performance.

L'analyse des singularités des robots parallèles est beaucoup plus complexe et les singularités sont plus nombreuses que pour les robots série. En effet, pour un robot parallèle, les configurations singulières peuvent se situer aussi bien à l'intérieur que sur les frontières de son espace de travail. Celles situées à l'intérieur de l'espace de travail sont les plus inconfortables pour la génération de trajectoires car le robot peut se bloquer dans de telles configurations. Il faut noter qu'au voisinage de ces configurations singulières, les problèmes suivants [Chablat, 1998] sont habituellement rencontrés :

### 2.3. Critères et indices de performance

- Une augmentation importante des efforts dans les articulations pouvant endommager la structure du robot,
- Une perte de rigidité du robot qui peut se traduire par une instabilité de son organe terminal. Ceci correspond à l'apparition de mobilités non contrôlables de l'organe terminal lorsque les articulations motorisées sont bloquées.

La recherche des configurations singulières peuvent être faite en se basant sur deux approches :

- Méthode géométrique : proposée par Merlet [Merlet, 2006], c'est une méthode qui utilise la géométrie de Grassmann qui repose sur l'utilisation des vecteurs de Plücker.
- Méthode algébrique : repose sur l'équation de la cinématique qui établit une relation linéaire entre les vitesses articulaires  $\dot{q}$  et les vitesses opérationnelles  $\dot{X}$  :

$$J_x \dot{X} = J_q \dot{q} \quad (2.20)$$

La dégénérescence des deux matrices  $J_q$  et  $J_x$ , nous permet de distinguer 3 cas de singularité [Gosselin and Angeles, 1990] :

#### 2.3.2.4.a Les sur-mobilités ( $|J_x| = 0$ )

Si  $J_x$  est singulière, alors nous pouvons avoir une vitesse  $\dot{X}$  non nulle sans changement de position des moteurs (vitesse articulaire nulle) : nous parlons alors de singularité parallèle ou de sur-mobilité (figure 2.3 et 2.4). Ce type de singularité survient à l'intérieur de l'espace de travail. Au voisinage d'une telle configuration, le robot peut effectuer des mouvements infinitésimaux sans modification de la commande. En conséquence, certains degrés de libertés deviennent non commandables. Le robot gagne un ou plusieurs degrés de liberté et il ne peut pas résister à des forces dans quelques directions.

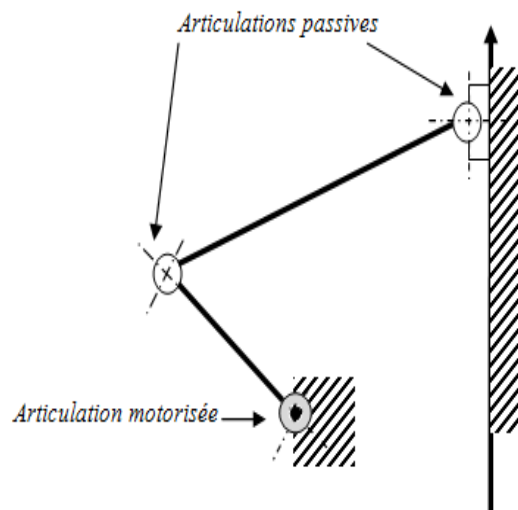


Figure 2.3- Mécanisme en chaîne fermée à 1 ddl.

#### 2.3.2.4.b Les sous-mobilités ( $|J_q| = 0$ )

Si  $J_q$  est singulière, alors nous pouvons avoir une vitesse articulaire  $\dot{q}$  non nulle ne créant pas de mouvement de la plate-forme (la plate-forme ne bouge pas) : ceci correspond à une

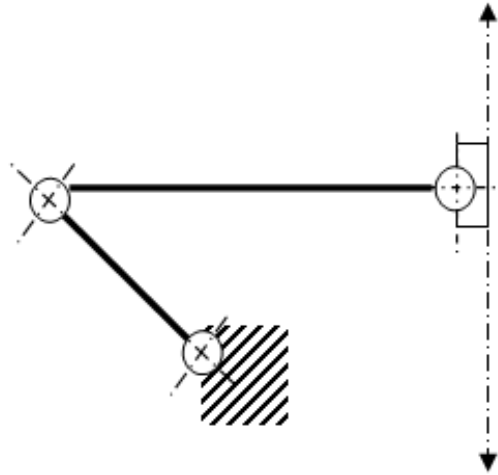


Figure 2.4- *Illustration d'une sur-mobilité.*

singularité dans la structure série d'une des chaînes et nous parlons alors de singularité série ou de sous-mobilité (figure 2.5). Elle représente les limites de l'espace de travail (limite structurale). Le robot perd un ou plusieurs degrés de liberté.

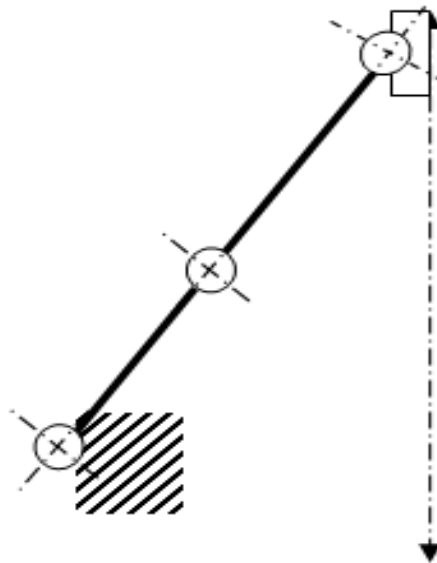


Figure 2.5- *Illustration d'une sous-mobilité.*

#### 2.3.2.4.c Les singularités internes ( $|J_q| = |J_x| = 0$ )

Si  $J_q$  et  $J_x$  sont singulières, nous avons à la fois des singularités série et parallèle (figure 2.6). Ce type de singularité survient lorsqu'il est possible de déplacer de manière infinitésimale l'organe terminal, alors que les articulations motorisées (actionneurs) sont bloquées et réciproquement.

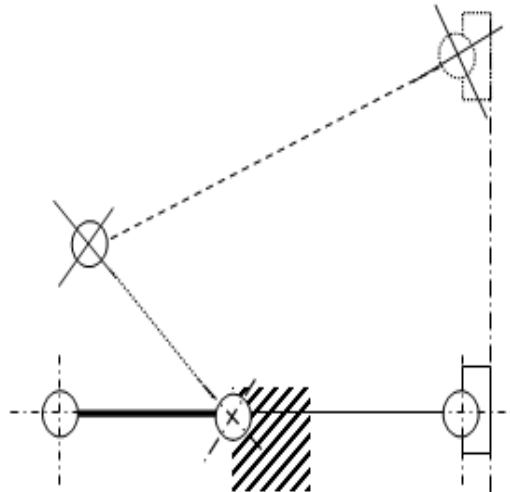


Figure 2.6- *Illustration d'une singularité interne.*

#### 2.3.2.4.d Singularités et équilibre mécanique des robots parallèles

L'équilibre mécanique d'un robot parallèle [Merlet, 2006] peut être analysé en utilisant la relation entre les efforts articulaires notés  $\tau$  et le torseur des efforts externes appliqué sur l'organe terminal (effecteur) noté  $f$ , donnée par :

$$f = J^{-T} \tau \quad (2.21)$$

L'équation (2.21) montre que pour avoir un équilibre mécanique du système, il faut que le vecteur  $\tau$  admette une solution pour tout  $f$  à condition que la matrice  $J^{-T}$  ne soit pas dégénérée, dans ce cas le système n'est plus en équilibre mécanique. Cela signifie physiquement que l'organe terminal se déplace sans qu'il y ait des mouvements au niveau des actionneurs.

### 2.3.3 Rigidité

La rigidité est définie comme la résistance à la déformation élastique en régime statique ou dynamique, de machines, de sous-ensembles ou d'éléments, sous l'effet des efforts extérieurs [Majoux, 2004]. La notion réciproque est la complaisance ou la flexibilité. La valeur de la rigidité évolue en fonction de la géométrie, la topologie de la structure et de la position et l'orientation de la broche à l'intérieur du volume de travail de la machine. La rigidité d'une PKM à un point donné de son espace de travail peut être caractérisée par sa matrice de rigidité. Cette matrice associe les forces et les couples appliqués à l'outil. Si nous dénotons par  $\sigma_{min}(S)$  la valeur singulière minimum de la matrice de rigidité  $S$  et  $\kappa_S$  son nombre de conditionnement, la fonction objectif peut être exprimée comme suit :

$$\sigma_{min}(S) \rightarrow max \Leftrightarrow \kappa_S \rightarrow min \quad (2.22)$$

Pour la caractériser sur l'ensemble de l'espace accessible par le robot, nous utilisons l'indice  $\eta_S$ , donné par l'expression suivante :

$$\eta_S = \frac{\int_W \kappa_S dW}{\int_W dW} \rightarrow min \quad (2.23)$$

### 2.3.3.1 Cas de la rigidité linéaire

Dans le cas où nous ne prenons en compte que de la rigidité linéaire des actionneurs (les autres parties sont considérées comme des corps rigides), la matrice de rigidité peut être obtenue en utilisant les équations de la cinématique et la statique, une modification de la variable articulaire  $\delta q$  correspond à une variation de la force articulaire  $\delta \tau$  [Merlet, 2006] telle que :

$$\delta \tau = k \delta \rho \quad (2.24)$$

où  $k$  représente la rigidité d'un actionneur.

$$\delta \rho = J^{-1} \delta X \quad (2.25)$$

$$\delta f = J^{-T} \delta \tau \quad (2.26)$$

si nous remplaçons (2.24) et (2.25) dans (2.26) nous trouvons :

$$\delta f = k J^{-T} J^{-1} \delta X \quad (2.27)$$

La matrice de rigidité  $S$  est donc :

$$S = k J^{-T} J^{-1} = k (J J^T)^{-1} \quad (2.28)$$

La majorité des PKMs ont des chaînes cinématiques semblables (ce qui permet de réduire les coûts) c'est-à-dire, ils ont les mêmes actionneurs d'où :  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$ . L'amélioration de la rigidité peut être faite par l'analyse de la matrice  $(J J^T)^{-1}$ . Il est donc possible de faire une estimation des minimum et maximum des valeurs de cette rigidité, par le calcul des valeurs propres de la matrice  $(J J^T)^{-1}$ , la plus petite valeur et la grande valeur correspondent respectivement au minimum et au maximum de la rigidité. L'objectif visé ici est d'avoir la meilleure rigidité possible, ceci est obtenu par :

$$\lambda_{min}((J J^T)^{-1}) \rightarrow max \Leftrightarrow \kappa_J \rightarrow min \quad (2.29)$$

Sur l'ensemble de l'espace de travail, nous utilisons l'indice global  $\eta_J$  défini par la relation (2.17).

### 2.3.4 Performances dynamiques

Comme dans beaucoup de mécanismes de type autre que cartésien, la non linéarité et le couplage des équations de mouvement rend plus difficile la commande des machines. Cependant, avec les moyens technologiques actuels, il n'existe plus de verrou. La variation de l'inertie vue par les actionneurs rend plus complexe le choix des actionneurs ainsi que le réglage des gains de la commande lorsque nous cherchons à atteindre des accélérations élevées. Afin d'augmenter les performances dynamiques, l'inertie doit être réduite au minimum. Dans la cas présent (synthèse dimensionnelle), nous nous intéressons uniquement à l'optimisation de la matrice d'inertie qui est un critère important pour augmenter les capacités dynamiques des PKMs.

Par conséquent, dans notre cas, nous entendons par les performances dynamiques, la dextérité dynamique. Elle est meilleure lorsqu'à partir d'un point quelconque de l'espace de travail, le mouvement de l'organe terminal est facile (plus grande capacité d'accélération) le long de toutes les directions dans l'espace de travail. Pour mesurer les performances dynamiques nous utilisons :

### 2.3.4.1 Indice d'isotropie dynamique

Le modèle dynamique inverse d'un robot parallèle, généralement donné par :

$$\Gamma = I(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) \quad (2.30)$$

Tel que :

$\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2 \dots \Gamma_n]^T$  : Vecteur couple généralisé (force)

$q(t) = [q_1(t), q_2(t) \dots q_n(t)]^T$  : Vecteur des variables articulaires de position

$\dot{q}(t) = [\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t) \dots \dot{q}_n(t)]^T$  : Vecteur des vitesses articulaires

$\ddot{q}(t) = [\ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t) \dots \ddot{q}_n(t)]^T$  : Vecteur des accélérations articulaires

$I(q)$  : Matrice d'inertie du robot

$V(q, \dot{q})$  : Vecteur comprenant les effets centrifuges et Coriolis,

$G(q)$  : Vecteur contenant les termes de gravité.

L'évaluation des performances dynamiques, est faite en se basant sur le concept de l'Ellipsoïde d'Inertie Généralisé (Generalized Inertia Ellipsoid) proposé par [Asada, 2006], qui indique que le mouvement de l'organe terminal est facile (plus grande capacité d'accélération) dans la direction du grand axe principal de cet ellipsoïde, et plus difficile (plus petite capacité d'accélération) dans la direction du petit axe principal. Si la longueur des deux axes est identique, la performance des accélérations est isotrope, ce qui rend la dextérité dynamique meilleure.

La différence entre les deux longueurs des deux axes principaux représente l'anisotropie de la performance des accélérations. Rendre l'accélération isotrope le long de toutes les directions est fortement recommandée pour obtenir une meilleure dextérité dynamique. Le conditionnement de la matrice de masse ( $M = J^{-T}I(q)J^{-1}$ ), noté  $\kappa_M$  est utilisé pour mesurer cette dextérité, il est défini par :

$$\kappa_M = \frac{\sigma_{max}(M)}{\sigma_{min}(M)} \quad (2.31)$$

Les configurations où  $\kappa_M = 1$  sont appelées des configurations isotropes, d'où :

$$\kappa_M \rightarrow min \quad (2.32)$$

La dextérité dynamique comme la dextérité cinématique dépend de la configuration et des paramètres géométriques du robot. La dextérité dynamique varie à l'intérieur de l'espace de travail. Pour la décrire sur l'ensemble de l'espace accessible par le robot, nous utilisons l'indice de dextérité dynamique globale  $\eta_M$  [Gosselin and Angeles, 1991] [Jun et al., 2008] qui est défini par la moyenne de la dextérité dynamique locale sur l'espace atteignable) :

$$\eta_M = \frac{\int_W \kappa_M dW}{\int_W dW} \rightarrow min \quad (2.33)$$

## 2.4 Définition des contraintes

### 2.4.1 Contraintes de l'espace de travail

#### 2.4.1.1 Débattements articulations actionnées

$$q_t^{min} \leq q_t \leq q_t^{max} \quad (2.34)$$

$t$  : nombre des articulations motorisées.

### 2.4.1.2 Débattements articulations passives

$$\xi_v^{min} \leq \xi_v \leq \xi_v^{max} \quad (2.35)$$

$v$  : nombre des articulations passives.

### 2.4.1.3 Evitement des collisions

L'évitement des collisions assure l'aptitude d'orientation du robot. Si nous désignons par  $R_j$ ,  $R_{j+1}$  (figure 2.7) les rayons et les longueurs de deux segments  $A_j B_j$  et  $A_{j+1} B_{j+1}$  supposés de forme cylindrique, nous pouvons nous assurer qu'il n'y a aucune interférence mécanique si la distance entre n'importe quelle paire segments vérifie la condition suivante :

$$dist(A_j B_j, A_{j+1} B_{j+1}) \geq R_j + R_{j+1} \quad (2.36)$$

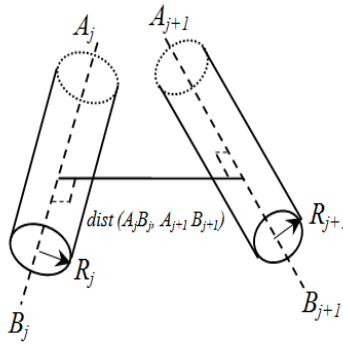


Figure 2.7- Distance entre 2 segments.

## 2.4.2 Contraintes cinématiques

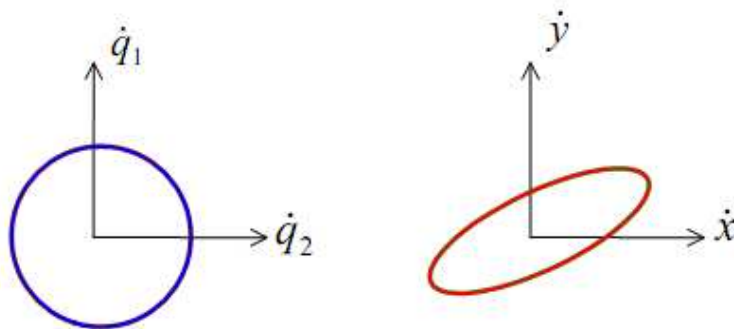
$$\begin{cases} \dot{q}_t^{min} \leq \dot{q}_t \leq \dot{q}_t^{max} \\ \ddot{q}_t^{min} \leq \ddot{q}_t \leq \ddot{q}_t^{max} \end{cases} \quad (2.37)$$

## 2.4.3 Contraintes sur la limitation des variations des facteurs de transmission des vitesses et efforts

Les facteurs de transmission de vitesse d'un robot manipulateur sont définis à partir de l'ellipsoïde des vitesses opérationnelles [Yoshikawa, 1985b] donné par :

$$\dot{X}^T (J J^T)^{-1} \dot{X} \leq 1 \quad (2.38)$$

Les axes principaux de cet ellipsoïde sont les vecteurs propres de  $(J J^T)^{-1}$  et les longueurs de ses demi-axes sont les valeurs singulières  $\sigma_i(J^{-1}) = \sqrt{\lambda_i(J J^T)^{-1}}$ .


 Figure 2.8- *Ellipsoïde des vitesses.*

La figure 2.8 illustre ceci pour un robot plan à deux articulations rotoïdes, dont la tâche est définie par deux coordonnées de positions  $x$  et  $y$  dans le plan.

Pour assurer une homogénéité des performances cinématique sur l'ensemble de l'espace de travail, nous imposons une limitation sur les variations des facteurs de transmission (d'amplification) des vitesses  $F_v$  et efforts  $F_e$ , car ils peuvent varier de façon inattendue (relation entre les vitesses articulaires et opérationnelles est fortement non linéaire) surtout au voisinage des singularités. Ils sont définis par les relations suivantes :

$$F_v = \frac{1}{F_e} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(JJ^T)^{-1}}} \quad (2.39)$$

où  $F_e$  représente une approximation du rapport entre les efforts au niveau des liaisons cinématique actionnées et les efforts au niveau de la plateforme mobile [Majoux, 2004].

Dans le cas où la matrice jacobienne inverse  $J^{-1}$  est carrée, nous pouvons écrire :

$$F_{v_{min}} = \frac{1}{F_{e_{max}}} = \frac{1}{\sigma_{max}(J^{-1})} \quad (2.40)$$

$$F_{v_{max}} = \frac{1}{F_{e_{min}}} = \frac{1}{\sigma_{min}(J^{-1})} \quad (2.41)$$

Le contrôle des  $F_v$  et  $F_e$  permet d'assurer deux critères fondamentaux de performance la précision et la rigidité du robot, d'où :

$$\begin{cases} F_{v_{min}} \leq F_v \leq F_{v_{max}} \\ F_{e_{min}} \leq F_e \leq F_{e_{max}} \end{cases} \quad (2.42)$$

### 2.4.4 Contraintes non géométriques

Généralement se sont des contraintes technologiques telles que la course des actionneurs, les dimensions géométriques de la plateforme mobile, la disposition du robot dans une chaîne de production, l'encombrement du robot, etc.

## 2.5 Formulation du problème

Après analyse des différents critères de performance (l'espace de travail, performances cinématiques, rigidité, performances dynamiques.), leurs fonctions objectif associées et les différentes contraintes, nous pouvons constater que plusieurs formulations peuvent être établies selon l'importance des critères de performance dans une application bien définie (parfaitement connue). Nous pouvons les classer selon le nombre des critères de performances (fonctions objectif) comme suit :

### 2.5.1 Formulation basée sur un seul critère de performance

Dans cette formulation, le critère de performance est choisi selon l'application désirée :

- Un grand espace de travail dextre et de forme géométrique régulière (pick and place, simulateurs, etc.). Dans ce cas, nous pouvons privilégier ce critère au détriment des autres critères en transformant le problème multiobjectif en un problème d'optimisation monobjectif en prenant comme fonction objectif les performances cinématiques et en transformant les autres fonctions en contraintes (une technique d'optimisation parmi plusieurs technique utilisées pour transformer un problème d'optimisation multiobjectif en un problème monobjectif), par conséquent le problème peut être formulé comme suit :

Trouver un vecteur  $P^*$  (vecteur des variables de conception) tel que :

$$\max W_{dextre}$$

sous les contraintes :

$$\eta_J \leq \varepsilon_2$$

$$\eta_S \leq \varepsilon_3$$

$$\eta_M \leq \varepsilon_4$$

$$q_t^{min} \leq q_t \leq q_t^{max}$$

$$\xi_v^{min} \leq \xi_v \leq \xi_v^{max}$$

$$dist(A_j B_j, A_{j+1} B_{j+1}) \geq R_j + R_{j+1}$$

$$\dot{q}_t^{min} \leq \dot{q}_t \leq \dot{q}_t^{max}$$

$$\ddot{q}_t^{min} \leq \ddot{q}_t \leq \ddot{q}_t^{max}$$

$$F_{v_{min}} \leq F_v \leq F_{v_{max}}$$

$$F_{e_{min}} \leq F_e \leq F_{e_{max}}$$

+ d'autres contraintes spécifiques à la PKM étudiée

Les contraintes  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) sont des valeurs imposées par le concepteur.

- Bonne performances cinématiques comme l'usinage à grande vitesse : D'une façon analogue, le problème d'optimisation peut être reformulé comme suit :

Trouver un vecteur  $P^*$  (vecteur des variables de conception) tel que :

$$\min \eta_J$$

sous les contraintes :

$$W_{dextre} \leq \varepsilon_1$$

$$\eta_S \leq \varepsilon_3$$

$$\eta_M \leq \varepsilon_4$$

$$q_t^{min} \leq q_t \leq q_t^{max}$$

$$\xi_v^{min} \leq \xi_v \leq \xi_v^{max}$$

$$dist(A_j B_j, A_{j+1} B_{j+1}) \geq R_j + R_{j+1}$$

$$\dot{q}_t^{min} \leq \dot{q}_t \leq \dot{q}_t^{max}$$

$$\ddot{q}_t^{min} \leq \ddot{q}_t \leq \ddot{q}_t^{max}$$

$$F_{v_{min}} \leq F_v \leq F_{v_{max}}$$

$$F_{e_{min}} \leq F_e \leq F_{e_{max}}$$

+ d'autres contraintes spécifiques à la PKM étudiée

- Une grande précision et par conséquent une grande rigidité (usinage, assemblage, chirurgie, etc.). Le problème peut être reformulé comme suit :

Trouver un vecteur  $P^*$  (vecteur des variables de conception) tel que :

$$\min \eta_S$$

sous les contraintes :

$$W_{dextre} \leq \varepsilon_1$$

$$\eta_J \leq \varepsilon_2$$

$$\eta_M \leq \varepsilon_4$$

$$q_t^{min} \leq q_t \leq q_t^{max}$$

$$\xi_v^{min} \leq \xi_v \leq \xi_v^{max}$$

$$dist(A_j B_j, A_{j+1} B_{j+1}) \geq R_j + R_{j+1}$$

$$\dot{q}_t^{min} \leq \dot{q}_t \leq \dot{q}_t^{max}$$

$$\ddot{q}_t^{min} \leq \ddot{q}_t \leq \ddot{q}_t^{max}$$

$$F_{v_{min}} \leq F_v \leq F_{v_{max}}$$

$$F_{e_{min}} \leq F_e \leq F_{e_{max}}$$

+ d'autres contraintes spécifiques à la PKM étudiée

- Des grandes performances dynamiques. le problème d'optimisation peut être reformulé comme suit :

Trouver un vecteur  $P^*$  (vecteur des variables de conception) tel que :

$$\min \eta_M$$

sous les contraintes :

$$W_{dextre} \leq \varepsilon_1$$

$$\eta_J \leq \varepsilon_2$$

$$\eta_S \leq \varepsilon_3$$

$$q_t^{min} \leq q_t \leq q_t^{max}$$

$$\xi_v^{min} \leq \xi_v \leq \xi_v^{max}$$

$$dist(A_j B_j, A_{j+1} B_{j+1}) \geq R_j + R_{j+1}$$

$$\dot{q}_t^{min} \leq \dot{q}_t \leq \dot{q}_t^{max}$$

$$\ddot{q}_t^{min} \leq \ddot{q}_t \leq \ddot{q}_t^{max}$$

$$F_{v_{min}} \leq F_v \leq F_{v_{max}}$$

$$F_{e_{min}} \leq F_e \leq F_{e_{max}}$$

+ d'autres contraintes spécifiques à la PKM étudiée

### 2.5.2 Formulation basée sur deux critères de performance

Dans cette formulation, l'application désirée nécessite la considération de deux critères de performance, nous pouvons citer comme exemples :

- Dans le cas où un grand espace de travail dextre régulier et de bonne performances cinématiques sont fortement recommandés : dans ce cas nous pouvons privilégier deux critères au détriment des autres critères en transformant les autres fonctions objectif en contraintes, par conséquent le problème peut être formulé comme suit :

Trouver un vecteur  $P^*$  (vecteur des variables de conception) tel que :

$$\min F(P) = \min \begin{bmatrix} f_1 = -W_{dextre} \\ f_2 = \eta_J \end{bmatrix}$$

sous les contraintes :

$$\eta_S \leq \varepsilon_3$$

$$\eta_M \leq \varepsilon_4$$

$$q_t^{min} \leq q_t \leq q_t^{max}$$

$$\xi_v^{min} \leq \xi_v \leq \xi_v^{max}$$

$$dist(A_j B_j, A_{j+1} B_{j+1}) \geq R_j + R_{j+1}$$

$$\dot{q}_t^{min} \leq \dot{q}_t \leq \dot{q}_t^{max}$$

$$\ddot{q}_t^{min} \leq \ddot{q}_t \leq \ddot{q}_t^{max}$$

$$F_{v_{min}} \leq F_v \leq F_{v_{max}}$$

$$F_{e_{min}} \leq F_e \leq F_{e_{max}}$$

+ d'autres contraintes spécifiques à la PKM étudiée

- Dans le cas où de bonne performances cinématiques et de bonnes performances dynamiques sont exigées à la fois : dans ce cas, et de la même façon, nous pouvons privilégier deux critères au détriment des autres critères en transformant les autres fonctions objectif en contraintes, par conséquent le problème peut être formulé comme suit :

Trouver un vecteur  $P^*$  (vecteur des variables de conception) tel que :

$$\min F(P) = \min \begin{bmatrix} f_1 = \eta_J \\ f_2 = \eta_M \end{bmatrix}$$

sous les contraintes :

$$W_{dextre} \leq \varepsilon_1$$

$$\eta_S \leq \varepsilon_3$$

$$q_t^{min} \leq q_t \leq q_t^{max}$$

$$\xi_v^{min} \leq \xi_v \leq \xi_v^{max}$$

$$dist(A_j B_j, A_{j+1} B_{j+1}) \geq R_j + R_{j+1}$$

$$\dot{q}_t^{min} \leq \dot{q}_t \leq \dot{q}_t^{max}$$

$$\ddot{q}_t^{min} \leq \ddot{q}_t \leq \ddot{q}_t^{max}$$

$$F_{v_{min}} \leq F_v \leq F_{v_{max}}$$

$$F_{e_{min}} \leq F_e \leq F_{e_{max}}$$

+ d'autres contraintes spécifiques à la PKM étudiée

### 2.5.3 Formulation basée sur trois critères de performance

Dans cette formulation, l'application désirée nécessite la considération de trois critères de performance, nous pouvons citer un cas parmi plusieurs cas qui peuvent être établis :

- Dans le cas où un grand espace de travail dextre régulier, de bonne performances cinématiques et avec une grande rigidité (une grande précision) sont fortement recommandés. Nous pouvons privilégier trois critères au détriment de l'autre critère (fonction objectif) en le transformant en une contrainte, par conséquent le problème peut être formulé comme suit :

Trouver un vecteur  $P^*$  (vecteur des variables de conception) tel que :

$$\min F(P) = \min \begin{bmatrix} f_1 = -W_{dextre} \\ f_2 = \eta_J \\ f_3 = \eta_S \end{bmatrix}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \eta_M &\leq \varepsilon_4 \\ q_t^{min} &\leq q_t \leq q_t^{max} \\ \xi_v^{min} &\leq \xi_v \leq \xi_v^{max} \\ dist(A_j B_j, A_{j+1} B_{j+1}) &\geq R_j + R_{j+1} \\ \dot{q}_t^{min} &\leq \dot{q}_t \leq \dot{q}_t^{max} \\ \ddot{q}_t^{min} &\leq \ddot{q}_t \leq \ddot{q}_t^{max} \\ F_{v_{min}} &\leq F_v \leq F_{v_{max}} \\ F_{e_{min}} &\leq F_e \leq F_{e_{max}} \\ &+ \text{d'autres contraintes spécifiques à la PKM étudiée} \end{aligned}$$

### 2.5.4 Discussion

Lors de l'application des formulations citées ci-dessus, nous pouvons constater que :

1. La transformation d'une fonction objectif en une contrainte exige une connaissance parfaite des variations du critère de performance (fonction objectif).
2. Par conséquent, le passage (transformation) d'un problème multiobjectif en un problème monobjectif en utilisant la méthode des contraintes, nécessite une connaissance parfaite du problème. Sans cette connaissance, nous risquons de perdre le meilleur dimensionnement de la PKM.
3. Les fonctions objectif n'ont pas les mêmes dimensions physiques, ce qui rend très difficile d'utiliser la technique de pondération (méthode d'agrégation des fonctions objectif) pour transformer le problème d'optimisation multiobjectif en un problème d'optimisation monobjectif.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art de la synthèse dimensionnelle des machines à cinématique parallèle (PKMs). Ensuite, nous avons détaillé les critères et les indices de performance tels que : l'espace de travail, les performances cinématique, la rigidité et les performances dynamiques. Nous avons montré l'intérêt de l'homogénéisation de la matrice jacobienne ainsi que l'analyse de la singularité. Ensuite, nous avons présenté les contraintes liées aux machines à cinématique parallèle. A la fin du chapitre, nous avons présenté une formulation du problème de conception optimale des PKMs (synthèse dimensionnelle) basée sur un seul critère, puis sur deux critères et enfin sur trois critères de performance. Dans le chapitre qui suit, nous présentons une formulation plus générale du problème, et par conséquent, nous proposons une méthodologie de synthèse dimensionnelle des PKMs basée sur l'approche d'optimisation multiobjectif ainsi que le choix de la technique la plus appropriée pour la résolution du problème.



# Chapitre 3

## Méthodologie de synthèse dimensionnelle des PKMs basée sur l'approche d'optimisation multiobjectif

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>50</b>
<b>3.2</b>	<b>Formulation générale du problème d'optimisation multiobjectif</b>	<b>50</b>
<b>3.3</b>	<b>Proposition d'une méthodologie de conception optimale des PKMs</b>	<b>51</b>
<b>3.4</b>	<b>Concepts et définitions</b>	<b>51</b>
3.4.1	Fonction objectif	51
3.4.2	Variables de décision	52
3.4.3	Espace d'état	52
3.4.4	Contraintes	52
3.4.5	Minimum global	53
3.4.6	Minimum local	53
3.4.7	Notion de dominance	53
3.4.8	Dominance au sens de Pareto	53
3.4.9	Convexité	53
3.4.10	Exemple d'un problème d'optimisation multiobjectif	55
<b>3.5</b>	<b>Différentes méthodes utilisées pour la résolution des problèmes d'optimisation multiobjectif</b>	<b>56</b>
3.5.1	Les méthodes d'optimisation <i>a priori</i>	57
3.5.1.1	Méthode d'agrégation des fonctions objectifs	57
3.5.1.2	La méthode du compromis (la méthode $\varepsilon$ -contrainte)	57
3.5.1.3	La méthode du but à atteindre (Goal attainment)	58
3.5.1.4	La méthode du but programmé (Goal programming)	59
3.5.1.5	Autres méthodes <i>a priori</i>	59
3.5.2	Les méthodes progressives	59
3.5.2.1	Méthode de Fandel	59
3.5.2.2	Autres méthodes progressives	61
3.5.3	Les méthodes d'optimisation <i>a posteriori</i>	62
3.5.3.1	Le recuit simulé	62
3.5.3.2	La méthode recherche Tabou	63
3.5.3.3	Les algorithmes génétiques	64
3.5.3.4	Quelques algorithmes génétiques multiobjectif	65
<b>3.6</b>	<b>Méthodologie de conception dimensionnelle optimale des PKMs</b>	<b>68</b>
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>70</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons formulé quelques problèmes en termes d'optimisation multiobjectif. Compte tenu de la complexité du problème, certains critères ont été considérés comme contraintes limites. Néanmoins, cette formulation présente le risque de perte de solutions optimales. Dans le présent chapitre, nous proposons une formulation générale du problème d'optimisation multiobjectif qui prend en compte les critères de performance souhaités.

## 3.2 Formulation générale du problème d'optimisation multiobjectif

Mathématiquement, un problème d'optimisation multiobjectif est plus souvent donné sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver un vecteur } P^* = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*]^T \\ \text{qui Minimise/Maximise } F(P) = [f_1(P), f_2(P), \dots, f_n(P)]^T \\ \text{Avec :} \\ g_m(P) \leq 0 \text{ (} m \text{ contraintes d'inégalité)} \\ h_l(P) = 0 \text{ (} l \text{ contraintes d'égalité)} \\ P^* \in \mathbb{R}^n : \text{Vecteur des variables de décision} \\ F(P^*) \in \mathbb{R}^k : \text{Vecteur des fonctions objectives} \end{array} \right.$$

Dans le cas général, nous allons considéré le problème de la synthèse dimensionnelle des PKMs basé les quatre critères de performance. Par conséquent, le problème peut être formulé comme suit :

**Quel est le meilleur vecteur des paramètres géométriques  $P^*$  d'une machine à cinématique parallèle qui permet d'avoir simultanément :**

1. Le plus grand espace de travail dextre régulier,
2. Les meilleures performances cinématiques,
3. La meilleure rigidité,
4. Les meilleures performances dynamiques.

Ceci est traduit mathématiquement sous la forme suivante :

Trouver un vecteur  $P^*$  (vecteur des variables de conception) tel que :

$$\min F(P) = \min \begin{bmatrix} f_1 = -W_{dextre} \\ f_2 = \eta_J \\ f_3 = \eta_S \\ f_4 = \eta_M \end{bmatrix}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} q_t^{min} &\leq q_t \leq q_t^{max} \\ \xi_v^{min} &\leq \xi_v \leq \xi_v^{max} \\ dist(A_j B_j, A_{j+1} B_{j+1}) &\geq R_j + R_{j+1} \\ \dot{q}_t^{min} &\leq \dot{q}_t \leq \dot{q}_t^{max} \\ \ddot{q}_t^{min} &\leq \ddot{q}_t \leq \ddot{q}_t^{max} \\ F_{vmin} &\leq F_v \leq F_{vmax} \\ F_{emin} &\leq F_e \leq F_{emax} \\ &+ \text{d'autres contraintes spécifiques à la PKM étudiée} \end{aligned}$$

Les fonctions objectif d'une PKM sont multiples et sont regroupées dans le vecteur :

$$F(P) = \begin{bmatrix} f_1 = -W_{dextre} \\ f_2 = \eta_J \\ f_3 = \eta_S \\ f_4 = \eta_M \end{bmatrix} \text{ de dimension 4.}$$

### 3.3 Proposition d'une méthodologie de conception optimale des PKMs

Compte tenu des résultats du chapitre 2 et de la formulation basée sur l'approche d'optimisation multiobjectif, nous pouvons proposer une méthodologie de conception optimale (synthèse dimensionnelle) des PKMs pleinement parallèle. Elle est présentée par la figure 3.1. Afin de la compléter, et répondre à l'étape 12 (voir figure 3.1), nous étudions les techniques les plus utilisées pour la résolution de ce type de problèmes.

Par conséquent, nous explorons ces techniques, leurs avantages et inconvénients pour bien choisir la technique la plus appropriée.

### 3.4 Concepts et définitions

#### 3.4.1 Fonction objectif

Représente le but à atteindre pour le décideur, c'est-à-dire, ce que nous désirons améliorer dans un dispositif (minimisation de coût, de durée, d'erreur, etc.). Elle est aussi appelée critère d'optimisation, fonction coût, fonction d'adaptation, ou encore performance (fitness function).

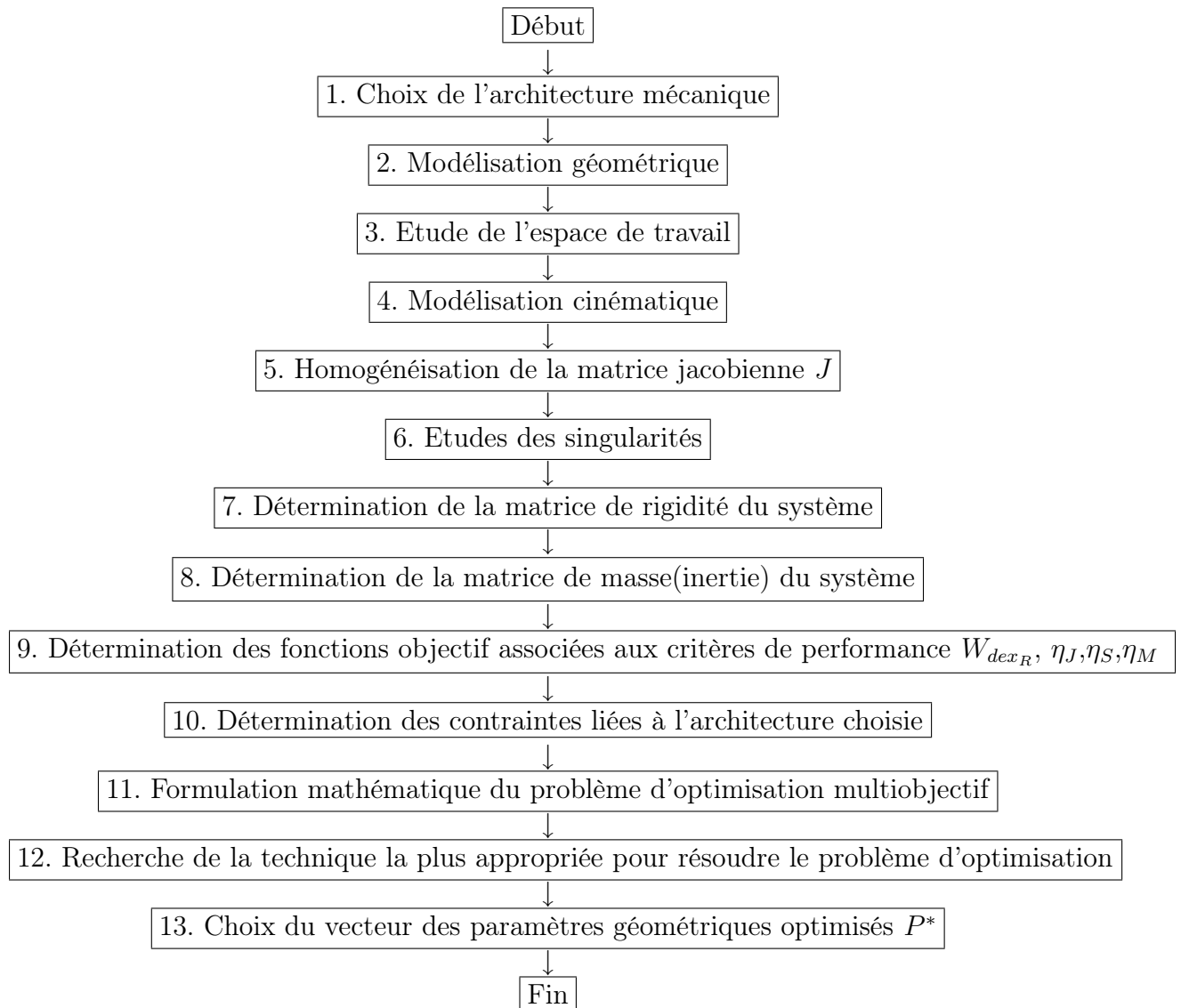


Figure 3.1- Séquence de la méthodologie proposée

### 3.4.2 Variables de décision

Correspondent aux variables de la fonction objectif. Elles sont ajustées pendant le processus d'optimisation, pour obtenir les solutions optimales. Elles peuvent être de nature diverse (réelle, entière, booléenne, etc.). Elles sont aussi appelées aussi variables d'optimisation, variables de conception ou de projet.

### 3.4.3 Espace d'état

Il est défini par l'ensemble de domaines de définition des variables du problème.

### 3.4.4 Contraintes

Ce sont les spécifications du problème, qui définissent des conditions sur l'espace d'état que les variables doivent satisfaire. Ces contraintes sont souvent des contraintes d'inégalité ou d'égalité et permettent en général de limiter l'espace de recherche.

### 3.4.5 Minimum global

Un point  $\vec{x} \in \chi$  est un minimum global du problème si et seulement si :

$$\forall \vec{x}' \in \chi, f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}') \quad (3.1)$$

Un  $\chi$  : définit un ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$

### 3.4.6 Minimum local

Un point  $\vec{x} \in \chi$  est un minimum local du problème si et seulement si :

$$\forall \vec{x}' \in \mathbb{V}(\chi), f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}') \quad (3.2)$$

$\mathbb{V}(\chi)$  : définit un voisinage de  $\vec{x}$

### 3.4.7 Notion de dominance

Le vecteur  $\vec{x}_1$  domine le vecteur  $\vec{x}_2$  si :

- $\vec{x}_1$  est au moins aussi bon que  $\vec{x}_2$  dans tous les objectifs,
- $\vec{x}_1$  est strictement meilleur que  $\vec{x}_2$  dans au moins un objectif.

$x_1 \succ x_2$  si :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : f_i(\vec{x}_1) \leq f_i(\vec{x}_2) \quad (3.3)$$

et :

$$\exists j \in \{1, 2, \dots, k\} : f_j(\vec{x}_1) < f_j(\vec{x}_2) \quad (3.4)$$

### 3.4.8 Dominance au sens de Pareto

Vilfredo Pareto [Pareto1896], formula le concept suivant : "*dans un problème multiobjectif, il existe un équilibre tel que l'on ne peut pas améliorer un critère sans détériorer au moins un des autres critères*". Cet équilibre a été appelé optimum de Pareto.

Les solutions qui dominent d'autres solutions et ne se dominent pas entre elles sont appelées solutions optimales au sens de Pareto (solutions non dominées) [Collette and Siarry, 2002].

Par conséquent un vecteur  $\vec{x}_1$  est dit un optimum global au sens de Pareto s'il n'existe aucun vecteur  $\vec{x}_2$  qui le domine dans l'espace des critères  $E$ .

La figure 3.2 illustre une représentation graphique de l'optimalité globale au sens de Pareto dans le cas d'un espace à deux critères  $f_1$  et  $f_2$ . Un vecteur  $\vec{x}_1$  est dit un optimum local au sens de Pareto s'il n'existe, dans le voisinage de  $\vec{x}_1$  aucun vecteur  $\vec{x}_2$  qui domine  $\vec{x}_1$ .

La figure 3.3 illustre une représentation graphique de l'optimalité locale au sens de Pareto dans le cas d'un espace à deux critères  $f_1$  et  $f_2$ .

### 3.4.9 Convexité

L'ensemble  $E$  est dit convexe si tout segment joignant deux points quelconques de  $E$  est inclus dans  $E$ . Les figures 3.4 et 3.5 représentent un exemple d'ensembles convexe et non convexe.

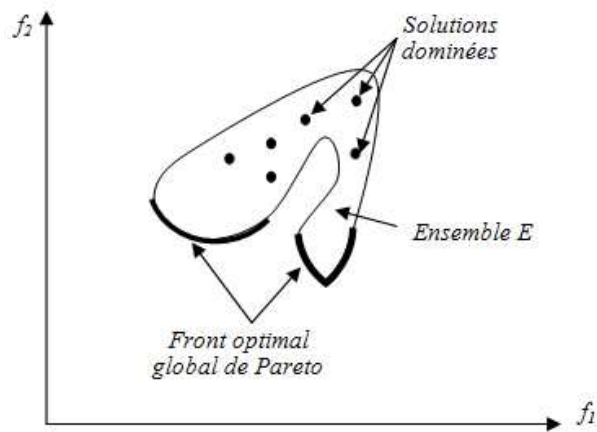


Figure 3.2- *Optimalité globale au sens de Pareto.*

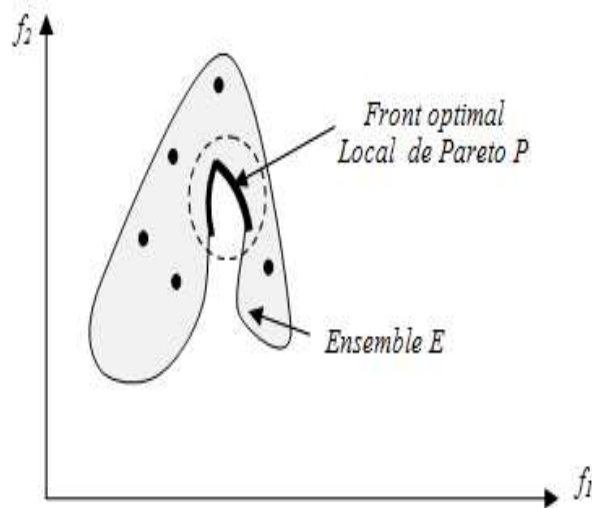


Figure 3.3- *Optimalité locale au sens de Pareto.*

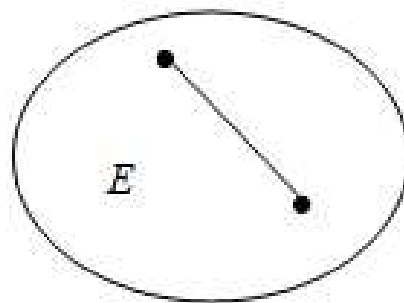


Figure 3.4- *Exemple d'ensemble convexe.*

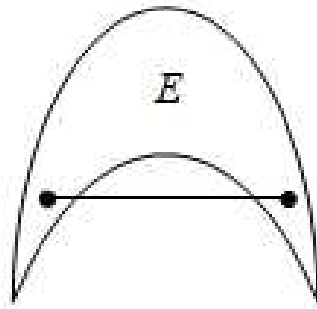


Figure 3.5- Exemple d'ensemble non convexe.

### 3.4.10 Exemple d'un problème d'optimisation multiobjectif

Le problème de Schaffer [Schaffer, 1985] est très utilisé dans la littérature pour la représentation des problèmes multiobjectif, il est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min F(x) \text{ tel que } F(x) = & \begin{bmatrix} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = (x - 2)^2 \end{bmatrix} \\ \text{avec } x \in & [-1, 3] \end{aligned} \quad (3.5)$$

La figure 3.6 représente les 2 fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  par rapport à  $x$ , dans l'intervalle où  $x \in [0, 2]$ . Nous remarquons que  $f_1(x)$  s'éloigne de sa valeur minimale en  $x = 0$ , tandis que  $f_2(x)$  décroît vers sa valeur minimale en  $x = 2$ . Par conséquent, il n'est pas possible dans cet intervalle d'améliorer une fonction sans détériorer l'autre. L'ensemble des solutions appartenant à l'intervalle  $x \in [0, 2]$  constituent le meilleur compromis à la minimisation simultanée des deux fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$ . La figure 3.7 représente, dans l'espace des objectifs,  $f_1(x)$  par rapport à  $f_2(x)$  ce qui permet de représenter l'allure du front optimal de Pareto correspondant au problème de Schaffer.

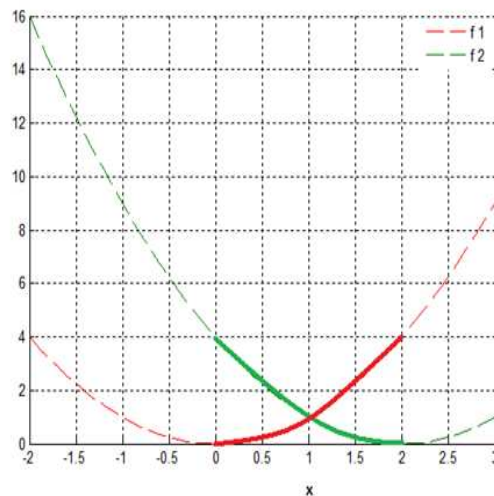


Figure 3.6- fonctions à minimiser.

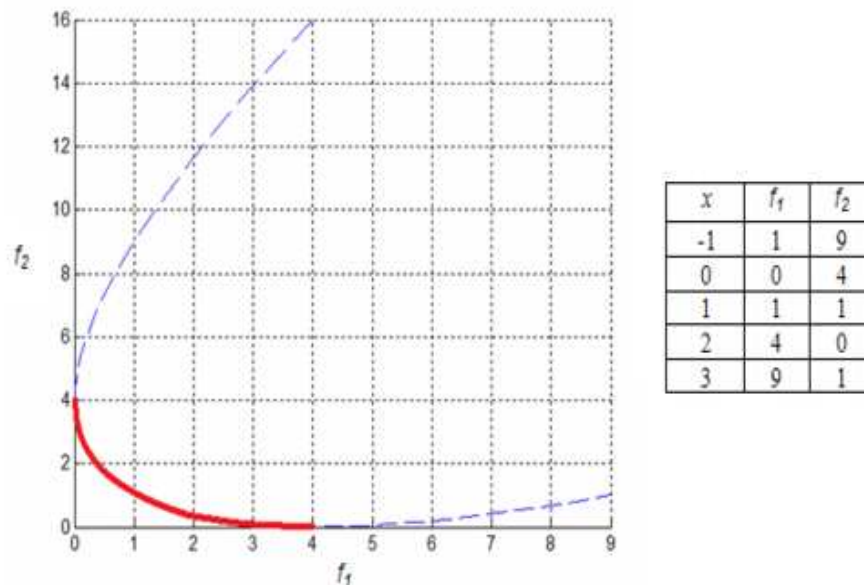


Figure 3.7- *Front optimal Pareto.*

### 3.5 Différentes méthodes utilisées pour la résolution des problèmes d'optimisation multiobjectif

Un problème multiobjectif est caractérisé par l'inexistence d'une solution optimale. Le décideur peut choisir à partir d'un ensemble de solutions optimales une solution qui n'est pas meilleure que toutes les autres. Dès lors, la résolution d'un problème d'optimisation multiobjectif, ne consiste pas à trouver une solution optimale mais l'ensemble des compromis optimaux possibles entre les différents objectifs (les solutions de Pareto) qui contient les solutions satisfaisantes pour lesquelles il n'est pas possible de faire un classement. Les principales méthodes (techniques) utilisées pour traiter les problèmes d'optimisation multiobjectif, peuvent être classées en trois grandes familles :

- **Les méthodes d'optimisation *a priori*** : dans ces méthodes, nous définissons le compromis que nous désirons effectuer avant de lancer la méthode de résolution. Cette famille regroupe la majorité des méthodes scalaires (agrégatives).
- **Les méthodes d'optimisation *progressives*** : dans ces méthodes, nous affinons notre choix des compromis au fur et à mesure du déroulement du processus d'optimisation c'est à dire que nous pouvons réorienter la recherche vers des zones susceptibles de contenir des solutions qui satisfont les compromis que nous désirons avoir entre les différentes fonctions objectifs. Ces méthodes requièrent une grande attention de suivi de la part de l'utilisateur tout au long du processus d'optimisation. Cet aspect peut être gênant surtout si l'évaluation de fonctions objectifs est longue.
- **Les méthodes d'optimisation *a posteriori*** : ces méthodes ne requièrent pas une modélisation des préférences de l'utilisateur, elles nous produisent un ensemble de solutions dont le quel nous pouvons choisir une solution de compromis parmi les autres solutions obtenues.

### 3.5.1 Les méthodes d'optimisation *a priori*

#### 3.5.1.1 Méthode d'agrégation des fonctions objectifs

Cette approche est la plus évidente. Elle consiste à transformer le problème d'optimisation multiobjectif en un problème d'optimisation mono-objectif en affectant un poids à chaque fonction objectif, ce poids représente l'importance relative que le décideur attribue à chaque fonction objectif, et à définir comme une nouvelle fonction objectif du problème scalaire équivalent, la somme pondérée des fonctions objectifs :

$$f_{eq}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n w_k f_k(\vec{x}) \quad (3.6)$$

$w_k \geq 0$  désigne le poids affecté à la fonction objectif  $f_k(\vec{x})$   
Et ils peuvent être normalisés de sorte que :

$$\sum_{k=1}^n w_k = 1 \quad (3.7)$$

Les principaux défauts de cette méthode résident dans :

- La difficulté d'affecter les valeurs des poids associés à chaque fonction objectif,
- La normalisation des fonctions objectifs lorsque celles-ci n'ont pas les mêmes dimensions physiques (les fonctions objectifs doivent être commensurables), donc il est donc très difficile d'utiliser ces techniques lorsque l'ensemble des critères est composé à la fois de critères qualitatifs et quantitatifs.
- Cette méthode n'est pas adaptée aux espaces non convexes ce qui pose un problème de convergence de la méthode vers l'optimum global.

#### 3.5.1.2 La méthode du compromis (la méthode $\varepsilon$ -contrainte)

Son principe est basé sur la transformation du problème multiobjectif en un problème mono-objectif en choisissant une fonction objectif prioritaire à optimiser, et nous transformons les autres fonctions objectifs en contraintes d'inégalités suivant la relation :

$$\text{minimiser } f_1(\vec{x}) \quad (3.8)$$

Avec :

$$\left| \begin{array}{l} f_2(\vec{x}) \leq \varepsilon_2 \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \leq \varepsilon_k \\ \vec{g}(\vec{x}) \leq 0 \\ \vec{h}(\vec{x}) = 0 \end{array} \right.$$

Le principal défaut de cette méthode réside dans le choix des valeurs maximales associées à chaque objectif. Donc elle exige une connaissance parfaite du problème à traiter ce qui n'est pas le cas toujours, autrement dit, si ces valeurs sont prises trop grandes, la solution du système sera sensiblement la solution du problème mono-objectif avec la fonction objectif utilisée  $f_1(\vec{x})$ . Par contre, lorsque ces valeurs sont trop faibles, les contraintes risquent de ne pas être satisfaites simultanément.

### 3.5.1.3 La méthode du but à atteindre (Goal attainment)

Dans cette approche, nous spécifions le vecteur des fonctions objectifs initial  $F_k$  et les poids associés  $w_k$ . La solution optimale est trouvée en résolvant le problème suivant :

$$\text{minimiser } \lambda \tag{3.9}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\vec{x}) - w_1\lambda \leq F_1 \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) - w_k\lambda \leq F_k \\ \vec{g}(\vec{x}) \leq 0 \\ \vec{h}(\vec{x}) = 0 \\ \sum_{k=1}^n w_k = 1 \end{array} \right.$$

Si nous considérons un problème d'optimisation à deux objectifs comme dans la figure 3.8 les points  $A$  et  $B$  représentent successivement l'objectif de référence et le but à atteindre, le vecteur  $w$  représente une direction de recherche. L'objectif de cette méthode est de trouver une valeur  $\lambda$  (qui représente la distance entre le point  $A$  et  $B$ ) telle que le point  $B$  faisant partie de la surface de compromis (la frontière de l'ensemble  $E$ ) et que la distance entre le point  $A$  et  $B$  soit minimisée.

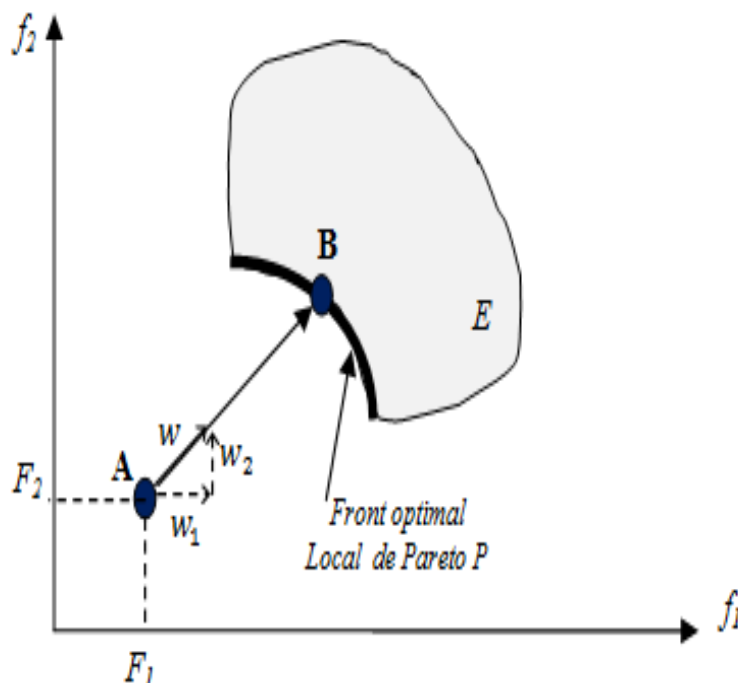


Figure 3.8- Méthode du but à atteindre (cas de 2 fonctions objectifs).

Pour que cette méthode donne de bons résultats il faut que les paramètres  $w$  et  $F$  soient bien choisis. Dans le cas échéant les résultats seront non cohérents.

### 3.5.1.4 La méthode du but programmé (Goal programming)

Cette méthode se rapproche beaucoup de la méthode du but à atteindre. La principale différence est qu'après avoir transformé la forme du problème d'optimisation, nous nous retrouvons avec des contraintes d'égalité et non plus des contraintes d'inégalité. Dans cette méthode, nous fixons un but  $F_k$  à atteindre pour chaque fonction objectif  $f_k$  [Charnes and Cooper, 1961]. Ces valeurs sont ensuite ajoutées au problème comme des contraintes supplémentaires. La nouvelle fonction objectif est modifiée de façon à minimiser la somme des écarts entre les résultats et les buts à atteindre :

$$\text{minimiser } \sum_{k=1}^n |f_k(\vec{x}) - F_k| \quad (3.10)$$

$F_k$  : Représente la valeur à atteindre pour le  $k^{eme}$  objectif

### 3.5.1.5 Autres méthodes *a priori*

Il existe d'autres méthodes *a priori* permettant de traiter des problèmes d'optimisation multicritère. Nous pouvons citer par exemple : la méthode de Keeney-Raiffa, la méthode de Lin-Tabak , la méthode de Lin-Gies, l'agrégation des objectifs à l'aide de la logique floue, etc.

Pour plus de détails sur ces méthodes, le lecteur est invité à consulter [Collette and Siarry, 2002].

## 3.5.2 Les méthodes progressives

### 3.5.2.1 Méthode de Fandel

Le but de cette méthode est de déterminer les meilleurs poids affectés aux fonctions objectives (voir méthode d'agrégation des fonctions objectives). Pour ce faire le problème d'optimisation est modifié de la manière suivante :

$$\text{minimiser } \sum_{k=1}^n w_k f_k(\vec{x}) \quad (3.11)$$

Avec :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{g}(\vec{x}) \leq 0 \\ \vec{h}(\vec{x}) = 0 \\ w_k \geq 0 \\ \sum_{k=1}^n w_k = 1 \end{array} \right.$$

La variation des  $w_k$  permet de trouver les points de la surface de compromis. Dans cette méthode les poids  $w_k$  sont supposés inconnus. Pour les trouver nous procédons comme suit :

### 3.5. Différentes méthodes utilisées pour la résolution des problèmes d'optimisation multiobjectif

- Nous calculons le minimum de chaque fonction objectif et nous le notons  $\bar{f}_k$  en respectant les contraintes du problème. Autrement dit, il faut résoudre le problème suivant :

$$\text{minimiser } f_k(\vec{x}) \quad (3.12)$$

Avec :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{g}(\vec{x}) \leq 0 \\ \vec{h}(\vec{x}) = 0 \\ k = [1, 2, \dots, n] \end{array} \right.$$

nous notons :

- $\bar{x}_k$  la solution de ce problème cité ci-dessus,
- $F_k^* = F(\bar{x}_k) = [f_1(\bar{x}_k), \dots, f_k - 1(\bar{x}_k), f_k(\bar{x}_k), f_k + 1(\bar{x}_k), \dots, f_n(\bar{x}_k)]$  : la valeur du vecteur des fonctions objectif correspondant à cette solution.
- $\bar{F} = [\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n]^t$  : le vecteur objectif idéal que nous ne pouvons pas obtenir en réalité.
- $B = [F_1^*, \dots, F_n^*]^t$  : la matrice  $B$  contient les valeurs  $\bar{f}_k$  sur sa diagonale si  $i = j$  et  $f_k(\bar{x}_k)$  si  $i \neq j$
- Ensuite nous calculons le vecteur  $F^M$  qui servira à réduire l'espace de recherche, il s'écrit comme suit :

$$F^M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k^* \quad (3.13)$$

- L'espace de recherche va être réduit en ajoutant les contraintes qui dépendent du nouveau vecteur  $F^M$  introduit, d'où la reformulation du problème de la manière suivante :

$$\text{minimiser } f_k(\vec{x}) \quad (3.14)$$

Avec :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{g}(\vec{x}) \leq 0 \\ \vec{h}(\vec{x}) = 0 \\ F(\vec{x}) \leq F^M \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

nous notons :

- $\hat{x}_k$  : la solution du problème cité ci-dessus,
- $\hat{f}_k = f_k(\hat{x}_k)$
- $F_k^* = F(\hat{x}_k) = [f_1(\hat{x}_k), \dots, f_k - 1(\hat{x}_k), f_k(\hat{x}_k), f_k + 1(\hat{x}_k), \dots, f_n(\hat{x}_k)]$
- $\hat{B} = [\hat{F}_1^*, \dots, \hat{F}_n^*]^t$

La matrice  $\hat{B}$  définit un hyperplan (une droite dans le cas d'un problème à deux fonctions objectif) qui a pour équation :

$$\hat{B} a = c e \quad (3.15)$$

Avec :

$$\left| \begin{array}{l} a = (a_1, \dots, a_n)^t \\ a > 0, \sum_{k=1}^n a_k = 1 \\ c : \text{constant}, \\ e = (1, \dots, 1)^t \end{array} \right.$$

La dernière étape est de trouver le vecteur  $a$  et la constante  $c$  qui sont les inconnus du système d'équations de telle sorte que l'hyperplan défini par l'équation précédente vienne

tangenter l'espace des valeurs des fonctions objectives. L'intersection des points forme le compromis des solutions.

La figure 3.9 illustre la méthode de *Fandel* dans le cas minimisation de deux fonctions objectif où :

$$\begin{aligned} F_1^* &= (f_{1min}, f_2(\bar{x}_1)) \\ \bar{x}_1 &= \operatorname{argmin} f_1 \\ F_2^* &= (f_2(\bar{x}_1), f_{2min}) \\ \bar{x}_2 &= \operatorname{argmin} f_2 \\ F^M &= \frac{1}{2}(F_1^* + F_2^*) \end{aligned}$$

L'espace de recherche est raffiné à l'intersection des ensembles  $E$  et le carré de couleur jaune (figure 3.9). La solution de compromis est le point de tangente de l'hyperplan avec l'extrémité de l'ensemble  $E$  défini par les nouveaux vecteurs d'extrémum  $\hat{F}_1$  et  $\hat{F}_2$ .

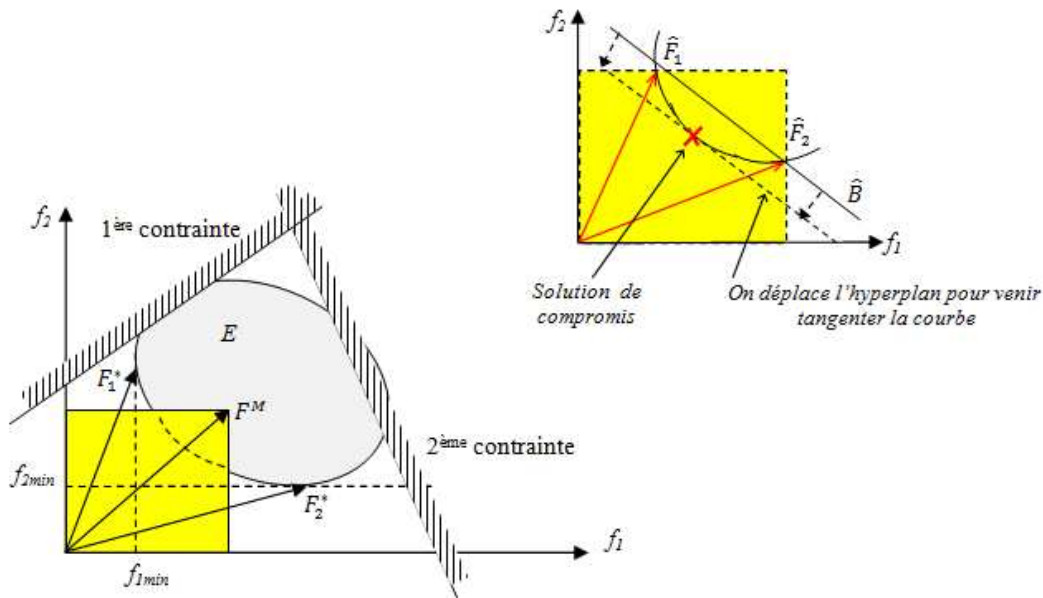


Figure 3.9- Méthode de Fandel (cas de 2 fonctions objectives).

### 3.5.2.2 Autres méthodes progressives

Il existe d'autres méthodes progressives permettant de traiter des problèmes d'optimisation multicritère. Nous pouvons citer par exemple : La méthode du compromis par substitution, la méthode STEP, la méthode de Jahn, la méthode de Geoffrion, etc. La présentation du principe de toutes ces méthodes progressives, plus complexes que les méthodes *a priori*, serait trop longue. Le lecteur trouvera dans [Collette and Siarry, 2002]. tous les détails nécessaires à leur compréhension.

### 3.5.3 Les méthodes d'optimisation *a posteriori*

La popularité actuelle des méthodes *a posteriori* résulte de l'utilisation des métaheuristiques qui comprend la méthode de recuit simulé, la méthode recherche Tabou, les algorithmes génétiques et les algorithmes de colonies de fourmis, capables de s'affranchir des problèmes rencontrés avec les méthodes *a priori* et progressives.

#### 3.5.3.1 Le recuit simulé

Cette méthode trouve ses origines dans le domaine de la métallurgie comme un traitement qui consiste à chauffer un matériau à une température suffisante pour assurer son équilibre physico-chimique et structurel. En effet, pour qu'un métal retrouve une structure proche du cristal parfait (l'état cristallin correspond au minimum d'énergie de la structure atomique du métal), nous le portons à une température élevée, puis nous le laissons refroidir. Lors du refroidissement, les atomes de la matière s'organisent entre eux de manière à privilégier les configurations les plus stables, ils passent donc des configurations de haute énergie à des configurations de faible énergie. Cependant, si le niveau d'énergie total du métal est suffisamment élevé, les atomes trouvent l'énergie nécessaire pour changer de configuration et de passer à des configurations moins stables ayant un niveau d'énergie plus élevé. Ce passage se fait selon la loi de *Boltzman* qui dit qu'à la température  $T$ , la probabilité  $P$  de passage d'un groupe d'atomes se trouve à un niveau d'énergie  $E_1$  à un niveau d'énergie supérieur  $E_2$ , d'écart  $dE = E_2 - E_1$ , est donnée par :

$$P = e^{\left(\frac{-dE}{K.T}\right)} \quad (3.16)$$

$K$  : Constante de *Boltzman*.

Au fur et à mesure que la température baisse, les atomes auront une ressource d'énergie plus faible pour passer à des configurations instables, en conséquence le passage vers les configurations instables devient de plus en plus difficile et les atomes prennent que des configurations stables, conduisant le matériau à prendre son énergie minimale.

Ce processus métallurgique a été transposé à l'optimisation et a donné une méthode simple mais très efficace.

##### 3.5.3.1.a Algorithme du recuit simulé

Nous notons par  $F$  l'énergie à minimiser. Les configurations stables correspondent à des solutions diminuant  $F$ , tandis que les configurations instables correspondent à des solutions engendrant une augmentation de  $F$ .

L'algorithme de recuit simulé accepte toujours le passage d'une solution actuelle  $S_i$  à une solutions  $S_{i+1}$  générée aléatoirement dans un voisinage  $V(S_i)$  et diminuant  $F$ . alors que les augmentations sont acceptées avec une probabilité exprimée par :

$$P = e^{\left(\frac{-\Delta F}{T}\right)} \quad (3.17)$$

Où :

$$\Delta F = F(S_{i+1}) - F(S_i). \quad (3.18)$$

$T$  : un paramètre de contrôle jouant le rôle de la température dans le processus naturel de recuit.

L'algorithme du recuit simulé est donné comme suit [Rebai, 2002] :

---

*Pseudo-code de l'Algorithme du recuit simulé*

---

générer aléatoirement une solution initiale  $S_0$  ;  
 $S^* = S_0$  ;  
Calculer la température initiale  $T_0$   
 $T = T_0$   
**Répéter** :  
   $k = 0$   
  **Répéter**  
    générer une solution aléatoire  $S$  dans  $V(S^*) \in \Omega$  ; évaluer  $F(S)$  ;  
     $dF = F(S) - F(S^*)$  ;  
    si  $\text{Accepted}(dF, T)$  alors  $S^* = S$  ;  
     $k = k + 1$  ;  
  **jusqu'à**  $k = Lpa$  ( $Lpa$  : Nombre d'itérations à effectuer par une température  $T$ )  
  diminuer la température  $T$   
jusqu'à la convergence

**Fonction**  $\text{Accepted}(dF, T)$  = booléen  
**Si**  $\text{Random}(0, 1) < e^{-\frac{dF}{T}}$  **alors**  
  Accepte = vrai  
**Sinon**  
  Accepte = faux

---

Deux versions de la méthode du Recuit Simulé basées sur les frontières de Pareto sont utilisées pour la résolution des problèmes d'optimisation multiobjectif :

- La méthode PASA (Pareto Archived Simulated Annealing) proposée et développée à EDF [Engrand and Mouney, 1998] qui utilise une fonction d'agrégation des fonctions objectifs couplées, avec un système d'archivage de solutions non dominées,
- La méthode MOSA (Multiple Objective Simulated Annealing) qui a été proposée par [Ulungu et al., 1999], elle utilise le recuit simulé pour rechercher la surface de compromis.

### 3.5.3.2 La méthode recherche Tabou

La recherche Tabou est une technique d'optimisation combinatoire, elle a été introduite par Glover [Glover, 1986] pour surmonter les minima locaux d'une fonction objectif. En partant d'une configuration initiale quelconque, la recherche Tabou engendre une succession de configurations :

- pour chaque solution  $S$ , nous construisons l'ensemble des voisins  $V(S)$ .
- La fonction objectif du problème pour chacun des voisins appartenant à  $V(S)$  est évaluée. Dès lors, à partir d'une solution  $S_i$ , nous passons à une solution  $S_{i+1} \in V(S_i)$  laquelle  $f$  prend sa valeur minimale (qui minimise  $f$  fortement).  $S_{i+1}$  sera adoptée même si  $f(S_{i+1}) > f(S_i)$  ce qui permet d'éviter les minima locaux de  $f$ .

En pratique, cette procédure ne fonctionne généralement pas, car la conservation de toutes les solutions rencontrées consomme énormément de place mémoire et temps de calcul et présente aussi un risque majeur de retourner à une configuration déjà retenue lors d'une

précédente itération, ce qui provoque l'apparition d'un cycle. Pour éviter ces problèmes réhibitoires la méthode Tabou préconise la procédure suivante : au lieu d'ajouter la solution courante à la liste Tab des solutions interdites (Taboues), nous nous contentons, quand nous remontons, de conserver en mémoire la transformation élémentaire qui a permis de passer de la solution courante à la suivante et s'interdit d'appliquer son inverse. Ce sont donc désormais des mouvements qui sont tabous et non plus des solutions.

#### 3.5.3.2.a Algorithme de la méthode recherche Tabou

Le pseudo code de la méthode de Tabou est représenté dans l'algorithme suivant [Rebai, 2002] :

---

*Pseudo-code de l'Algorithme de la méthode recherche Tabou*

---

générer aléatoirement une solution initiale  $S_0$  ;  
 $S^* = S_0$  ;  
 $Tab = \Phi$

**Répéter** :

    générer une solution aléatoire  $S$  dans  $V(S^*) \in \Omega$  ;  
    **Si**  $S \in Tab$  **alors** évaluer  $F(S)$  ;  
    **si**  $F(S) < F(S^*)$  ;  
    **alors**  $S^* = S$  ;

**Sinon** ajouter  $S$  à la liste Tab ;

jusqu'à la convergence

---

#### 3.5.3.3 Les algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques sont une technique d'optimisation fondée sur l'analogie et la simulation des concepts de la sélection naturelle et génétique [Goldberg, 1994] [Holland, 1975].

Leurs particularités par rapport aux autres approches sont :

- Ils utilisent des procédures probabilistes et non déterministes pour progresser dans la recherche.
- Ils travaillent sur des codages des paramètres (solutions) et non pas sur les paramètres eux mêmes, ces codes sont appelés chromosomes, la qualité du codage des données conditionne le succès des algorithmes génétiques. Les codages binaires ont été très utilisés à l'origine mais actuellement les codages réels sont désormais largement utilisés.

Le fonctionnement général des algorithmes génétiques peut être structuré comme suit : à partir d'une population initiale des individus (chromosomes) arbitrairement choisie où chaque individu représente une solution potentielle du problème. Nous évaluons leurs performances (fitness) relatives sur la base desquelles nous créons une nouvelle population de solutions potentielles en utilisant des opérateurs d'évolution simples : la sélection, le croisement et la mutation. Nous recommençons ce cycle jusqu'à ce que nous trouvons une solution satisfaisante.

Pour un problème d'optimisation monobjectif le schéma de fonctionnement est représenté par la figure 3.10. Pour un problème d'optimisation multiobjectif le schéma de fonction-

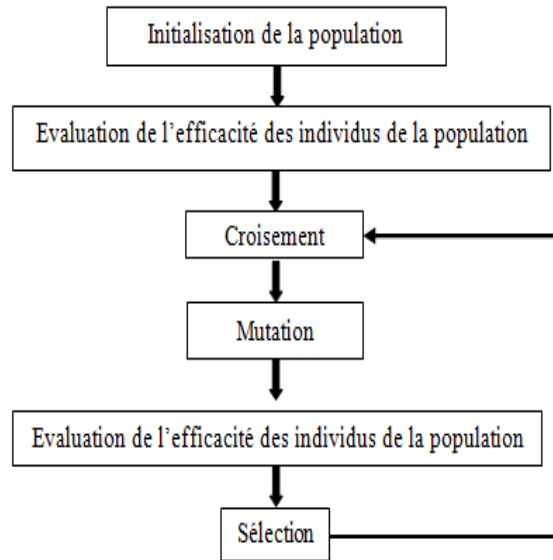


Figure 3.10- Fonctionnement d'un algorithme génétique mono-objectif.

nement d'un algorithme génétique est représenté par la figure 3.11 [Collette and Siarry, 2002]. Nous constatons bien que la différence entre les schémas de fonctionnement réside dans l'étape de la transformation du vecteur qui contient les valeurs des fonctions objectif pour chaque individu en une efficacité. Cette étape fait appel à plusieurs stratégies.

### 3.5.3.4 Quelques algorithmes génétiques multiobjectif

#### 3.5.3.4.a NSGA-II (Non-dominated Sorting based Genetic Algorithm)

L'algorithme NSGA-II proposé par Deb [Deb et al., 2002], est une nouvelle version de l'Algorithme NSGA. Il est considéré comme étant plus efficace que son prédécesseur le NSGA car :

- Il utilise une approche élitiste qui permet de sauvegarder les meilleures solutions trouvées lors des générations précédentes.
- Il utilise une procédure de tri basée sur la non-dominance (plus rapide).
- Il ne nécessite aucun réglage de paramètre.
- Il utilise un opérateur de comparaison basé sur un calcul de la distance de **crowding**.

Dans la 1<sup>ère</sup> étape de cet algorithme, une population de parents ( $P_t$ ) de taille  $N$  et une population d'enfants ( $Q_t$ ) de taille  $N$  sont assemblées pour former une population ( $R_t = P_t \cup Q_t$ ), comme le montre la figure 3.12. Cet assemblage permet d'assurer l'élitisme. La population de taille  $2N$  est ensuite triée selon un critère de non-dominance pour identifier les différents fronts  $F_1, F_2, \text{etc.}$  Les meilleurs individus vont se retrouver dans le ou les premiers fronts. Dans la 2<sup>ème</sup> étape, une nouvelle population parent ( $P_{t+1}$ ) est formée en ajoutant les fronts au complet (premier front  $F_1$ , second front  $F_2$ , etc.) tant que ceux-ci ne dépassent pas  $N$ . Si le nombre d'individus présents dans ( $P_{t+1}$ ) est inférieur à ( $N$ ), une procédure de crowding est appliquée sur le premier front suivant, ( $F_i$ ), non inclus dans ( $P_{t+1}$ ). Le but de cet opérateur est d'insérer les ( $N - |P_{t+1}|$ ) meilleurs individus qui manquent dans la population ( $P_{t+1}$ ). Les individus de ce front sont utilisés pour calculer la distance de crowding entre deux solutions voisines. Dans la 3<sup>ème</sup> étape, une fois que

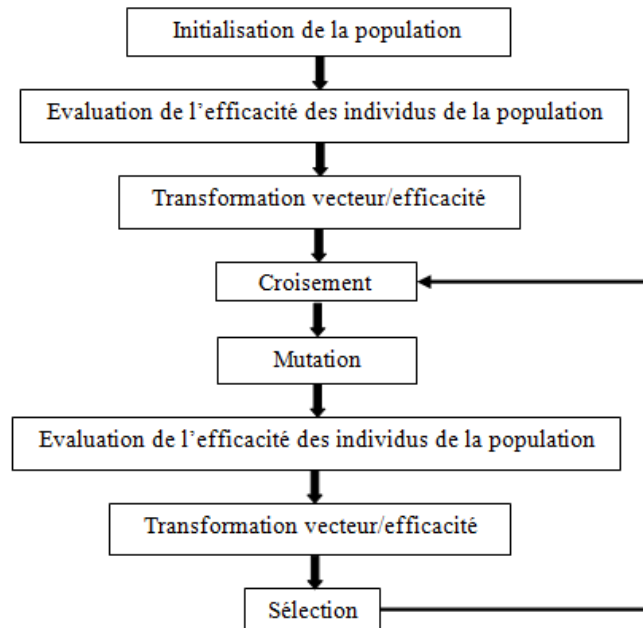


Figure 3.11- *Fonctionnement d'un algorithme génétique multiobjectif.*

les individus appartenant à la population ( $P_{t+1}$ ) sont identifiés, une nouvelle population enfant ( $Q_{t+1}$ ) est créée par sélection, croisement et mutation. La sélection par tournoi est utilisée mais le critère de sélection est maintenant basé sur l'opérateur de comparaison. Le processus continue, d'une génération à la suivante, jusqu'à un critère d'arrêt. Les différentes étapes décrites ci-dessus sont résumées comme suit :

---

Initialiser les populations  $P_0$  et  $Q_0$  de taille  $N$

**Tant que** critère d'arrêt non vérifié faire :

- Création de  $R_t = P_t \sqcup Q_t$
- Calcul des différents fronts  $F_i$  de la population  $R_t$  par un algorithme de "ranking"
- Mettre  $P_{t+1} = \Phi$  et  $i = 0$ ,

**Tant que**  $|P_{t+1}| + |F_i| < N$  faire :

$P_{t+1} = P_t \sqcup F_i$

$i = i + 1$

**Fin Tant que**

- Inclure dans  $P_{t+1}$  les  $(N - |P_{t+1}|)$  individus de  $F_i$  les mieux répartis au sens de la distance de "crowding "
- Sélection dans  $P_{t+1}$  et création de  $Q_{t+1}$  par application des opérateurs de croisement et mutation

**Fin Tant que**

---

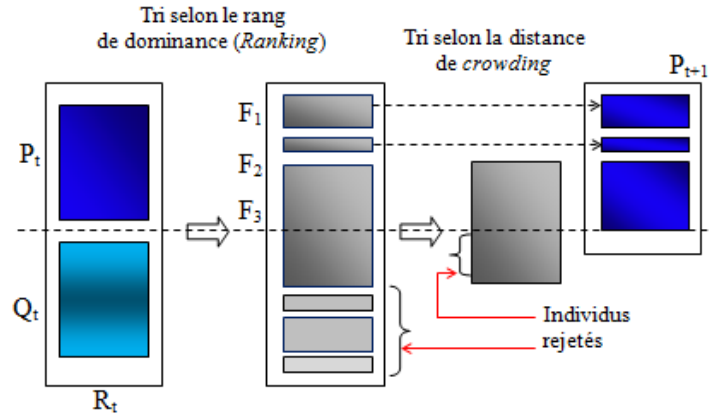


Figure 3.12- Schéma de fonctionnement de NSGA-II.

### 3.5.3.4.b SPEA-II (Strength Pareto Evolutionary Algorithm)

L'algorithme SPEA-II proposé par [Zitzler et al., 2001], diffère de son prédécesseur le SPEA par une taille de l'archive fixe et un calcul de la performance des individus plus raffiné. De plus, seuls les individus de l'archive participent au processus de reproduction. Les principales caractéristiques de cet algorithme sont :

- La qualité d'un individu est jugée d'après des critères de domination dans la population globale. Plus précisément, nous affectons à chaque individu  $i$  une valeur  $S(i)$ , qui représente le nombre d'individus de la population qui sont dominés par  $i$ . La qualité d'un individu  $j$  est alors obtenue en additionnant les  $S(i)$  pour tous les individus  $i$  qui dominent  $j$ .
- L'estimation de la densité est effectuée par une méthode inspirée de celle de plus proche voisin : les distances à tous les voisins sont calculées, et nous ajoutons à la qualité de l'individu (décrite dans le point précédent) l'inverse de la distance au  $k$ -ième voisin (en général,  $k$  est fixé à 1).
- L'algorithme utilise une archive d'individus de taille fixe. En cas de besoin, le tri de l'archive est effectué en enlevant l'individu qui a le plus proche voisin (en cas d'égalité, nous regardons le second plus proche voisin).

Le principe de SPEA-II est explicité par l'algorithme suivant :

- Les entrées de l'algorithme sont :  $N$  : taille de la population d'individus,  $\bar{N}$  : taille de l'archive vide (ensemble externe),  $T$  : nombre maximal de génération,
- La sortie de l'algorithme est :  $A$  : l'ensemble des individus non dominés.
- Les étapes de l'algorithme sont :

**Étape 1** : Initialisation : Création d'une population initiale  $P_0$  et l'archive  $\bar{P}_0 = \Phi$  au temps  $t = 0$ .

**Étape 2** : Evaluation des individus : Nous calculons la qualité de chacun des individus des deux ensembles  $P_t$  et  $\bar{P}_t$  au temps  $t$ , comme indiqué ci-dessus.

**Étape 3** : Sélection : Recopie de tous les individus non dominés de  $P_t$  et  $\bar{P}_t$  dans  $\bar{P}_{t+1}$ . Si

la taille de  $\bar{P}_{t+1}$  est supérieure à  $N$ , nous la trions selon le critère cité précédemment. Si elle est inférieure à  $N$ , nous la remplissons d'individus dominés.

**Étape 4** : Terminaison : Si un critère de terminaison est vérifié, ou que le nombre de générations calculées est supérieur à  $T$ , fin de l'algorithme. Le résultat est formé de l'ensemble des individus non dominés de  $\bar{P}_{t+1}$ .

**Étape 5** : Sélection pour la reproduction : Nous choisissons un ensemble de " parents " par tournois successifs au sein de  $\bar{P}_{t+1}$ .

**Étape 6** : Variation : Nous appliquons les opérateurs de recombinaison et de mutation sur l'ensemble des parents choisis. Les individus résultants constituent  $P_{t+1}$ .

Incrémentation du compteur de génération  $t = t + 1$ , et nous bouclons sur **l'Étape 2**.

## 3.6 Méthodologie de conception dimensionnelle optimale des PKMs

Les méthodes d'optimisation *a posteriori* et notamment les algorithmes génétiques multiobjectif sont retenus comme les techniques d'optimisation les plus appropriées pour la résolution des problèmes d'optimisation multiobjectif. Parmi ces algorithmes, nous avons choisi les algorithmes NSGA-II et SPEA-II. Ceci, nous a permis de répondre à la problématique posée dans l'étape 12 de la figure 3.1.

Par conséquent, la méthodologie de la synthèse dimensionnelle des PKMs proposée, et qui suppose que le problème soit exprimé en termes d'optimisation multiobjectif en tenant compte simultanément de plusieurs critères de performance (espace de travail, performances cinématique et dynamique, rigidité, etc.) peut être structurée comme suit (figure 3.12) :

1. *Choix de l'architecture mécanique* :  
Il s'agit de choisir l'architecture la plus adaptée aux applications désirées (exemple : opérations d'usinage 3 axes ou 5 axes),
2. *Modélisation géométrique de l'architecture mécanique choisie* :  
Elle permet de définir les paramètres géométriques à optimiser de la structure mécanique,
3. *Etude de l'espace de travail* :  
Cette étude permet de déterminer la forme de cet espace et définir par la suite un espace de travail dextre et régulier,
4. *Modélisation cinématique* :  
Elle permet de déterminer la matrice jacobienne qui relie les vitesses articulaires et vitesses opérationnelles ainsi que les forces articulaires et les forces généralisées,
5. *Homogénéisation de la matrice jacobienne  $J$*  :  
Dans le cas où la matrice jacobienne composée de deux sous-matrices, l'une relative aux positions et l'autre relative aux orientations (c'est également le cas lorsque les actionneurs sont de types différents), les éléments qui la composent sont de

différentes unités. La conséquence directe est que le nombre de conditionnement n'a plus de signification physique claire. Pour s'affranchir de ce problème, il est nécessaire de normaliser la matrice jacobienne en homogénéisant ses éléments,

6. *Etude des singularités :*

Les configurations singulières sont des configurations où les performances des PKMs se détériorent et la structure risque d'être endommagée, donc leur détermination devient une tâche indispensable pour pouvoir les éviter. Les méthodes géométriques et algébriques sont parmi les méthodes utilisées pour déterminer ces configurations,

7. *Détermination de la matrice de rigidité du système :*

Il est possible de faire une estimation des minimum et maximum des valeurs de la rigidité d'une PKM, par le calcul des valeurs propres de sa matrice de rigidité  $S$ , la plus petite valeur et la grande valeur correspondent respectivement au minimum et au maximum de la rigidité. Le conditionnement  $\eta_S$  de la matrice  $S$  est utilisé pour améliorer cette rigidité,

8. *Calcul de la matrice de masse (inertie) du système :*

Le conditionnement de la matrice de masse (inertie)  $\eta_M$ , est utilisé pour la mesure de la dextérité dynamique d'une PKM. Cette matrice peut être obtenue en basant sur son énergie cinétique,

9. *Evaluation des critères de performances :*

Nous déterminons les fonctions objectif associées aux critères de performance tels que : l'espace de travail dextre régulier, les performances cinématiques, la rigidité et les performances dynamiques,

10. *Définition des contraintes liées à la structure mécanique choisie :*

Elles sont représentées par les limites sur les débattements, les vitesses et les accélérations articulaires ainsi que les contraintes technologiques, etc.

11. *Formulation mathématique du Problème d'Optimisation MultiObjectif P.O.M.O :*

Après avoir défini les critères d'optimisation et leurs fonctions objectif associées ainsi que les différentes contraintes liées à l'architecture mécanique choisi, nous formulons le P.O.M (voir section 3.2)

12. *Application de l'algorithme génétique SPEA-II ou NSGA-II pour la résolution du problème :*

Les algorithmes génétiques multiobjectifs SPEA-II ou NSGA-II sont utilisés comme techniques de résolution du P.O.M.O défini dans l'étape précédente, ceci permet de trouver un ensemble de solutions optimales (front de Pareto),

13. *Choix du vecteur de paramètres géométriques optimisé à partir des fronts Pareto obtenus :*

Cette étape est très importante, vu que les critères de performances sont parfois antagonistes entre eux (l'espace de travail vs les performances cinématique et dynamique) et ainsi pour les problèmes d'optimisation multiobjectif, il n'y a pas une solution optimale unique, mais un ensemble de solutions dont aucune ne peut être identifiée comme étant la meilleure sans introduire un nouveau critère de classification (par exemple : la préférence du concepteur pour un des objectifs).

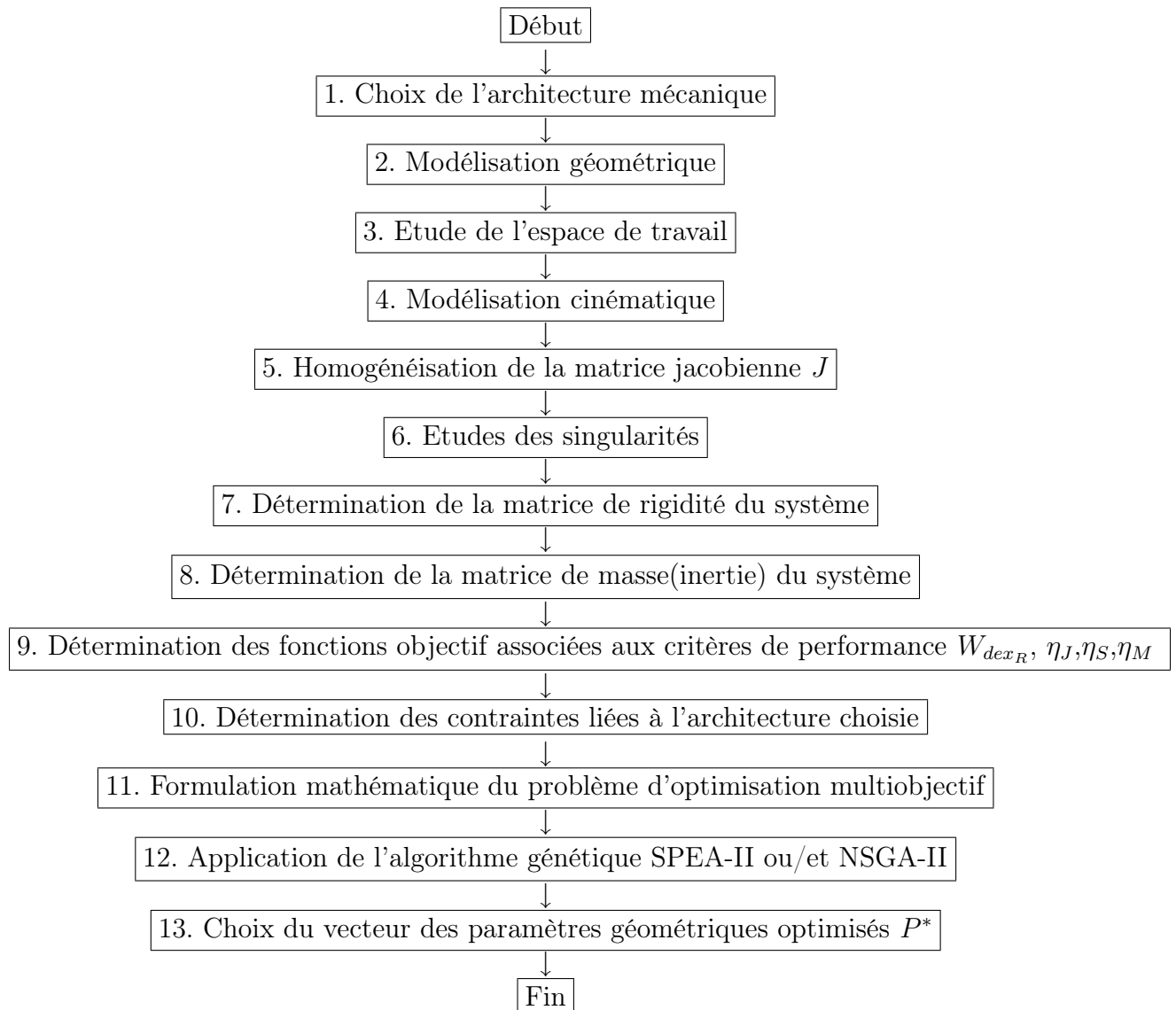


Figure 3.13- Méthodologie de synthèse dimensionnelle des PKMs.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthodologie de synthèse dimensionnelle des PKMs pleinement parallèles basée sur une formulation d'optimisation multiobjectif du problème. Nous avons choisi les algorithmes génétiques multiobjectif SPEA-II et NSGA-II comme la technique la plus appropriée pour résoudre le problème d'optimisation multiobjectif en raison de leur bonne adéquation avec la problématique évoquée à la section 3.2. Pour parvenir à ce choix, nous avons étudié les notions de base de l'optimisation multiobjectif. Le concept de dominance au sens de Pareto et la notion de compromis ont été développés. Nous avons examiné les différentes techniques utilisées pour la résolution d'un problème d'optimisation multiobjectif.

Dans le chapitre qui suit, nous proposons une application de cette méthodologie sur une PKM à trois axes : le robot parallèle Delta linéaire.

## Chapitre 4

# Application à la conception dimensionnelle optimale d'une machine à 3 axes : Le robot parallèle Delta linéaire

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>72</b>
<b>4.2</b>	<b>Description et paramétrage géométrique du robot DELTA linéaire</b>	<b>72</b>
<b>4.3</b>	<b>Modèle géométrique</b>	<b>75</b>
<b>4.4</b>	<b>L'espace de travail</b>	<b>76</b>
<b>4.5</b>	<b>Matrice jacobienne et analyse des singularités</b>	<b>78</b>
4.5.1	Singularités sérielles ( $ J_q  = 0$ )	78
4.5.2	Singularités parallèles ( $ J_x  = 0$ )	78
<b>4.6</b>	<b>Énergie cinétique du système</b>	<b>79</b>
<b>4.7</b>	<b>Formulation du problème d'optimisation</b>	<b>81</b>
<b>4.8</b>	<b>Résultats et discussion</b>	<b>82</b>
4.8.1	Analyse de l'espace de travail dextre	85
<b>4.9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>86</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans cette application, nous appliquons la méthodologie développée pour la synthèse dimensionnelle d'un robot parallèle de type Delta linéaire (figure 4.1).

## 4.2 Description et paramétrage géométrique du robot DELTA linéaire

Il s'agit d'un robot parallèle à 3 *ddl* en translation (figure 4.1 et figure 4.2), de type  $3P(SS)_2$ , utilisant des actionneurs linéaires liés à la base par des glissières d'axe parallèle à  $z_0$ . Ce robot est principalement constitué d'une base fixe solidaire d'un bâti support de l'installation (non représenté) et d'une plateforme mobile (nacelle). La liaison entre la base fixe et la nacelle est assurée par trois chaînes cinématiques identiques espacées angulairement de  $\alpha_i$ , chacune d'elles est formée d'un actionneur linéaire et de deux barres parallèles de longueur  $L$ , munies chacune d'une articulation rotule à chaque extrémité. L'ensemble barres parallèles et les deux éléments de liaison aux bras et à la nacelle sont nommés parallélogramme. Par construction nous avons :

$$\begin{aligned} \|A_{11}A_{12}\| &= \|A_{21}A_{22}\| = \|A_{31}A_{32}\| = 2d \\ \|B_{11}B_{12}\| &= \|B_{21}B_{22}\| = \|B_{31}B_{32}\| = 2d \\ \|A_{ij}B_{ij}\| &= \|A_iB_i\| = L \quad i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, 2 \end{aligned}$$

La plateforme mobile reste toujours parallèle à la base, les mouvements de translation de cette dernière résultent du mouvement combiné des trois actionneurs. Nous désignons par :

$\{R_0\}$  :  $(O_0 - x_0, y_0, z_0)$  : Repère lié à la base, tel que " $O_0$ " est le centre d'un triangle équilatéral  $O_1O_2O_3$  et en même temps le centre d'un cercle de rayon  $R_b$ .

$\{R_p\}$  :  $(O_n - x_n, y_n, z_n)$  : Repère lié à la nacelle, tel que " $P$ " est le centre d'un triangle équilatéral  $B_1B_2B_3$  et en même temps le centre d'un cercle de rayon  $R_n$ .

$q_1, q_2, q_3$  : Variables articulaires de commande (courses des 3 actionneurs linéaires),

$R_b$  : Rayon d'un cercle de centre " $O_0$ ", il représente la distance entre le point " $O_0$ " du repère lié à la base et les points  $O_i$  :  $\|O_0O_i\| = R_b \quad i=1,2,3$ .

$R_n$  : Rayon d'un cercle de centre  $P$ , il représente la distance entre point  $P$  origine du repère lié à la plateforme mobile et les points  $B_i$  :  $\|PB_i\| = R_n \quad i=1,2,3$ .

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  : Vecteur des variables opérationnelles.

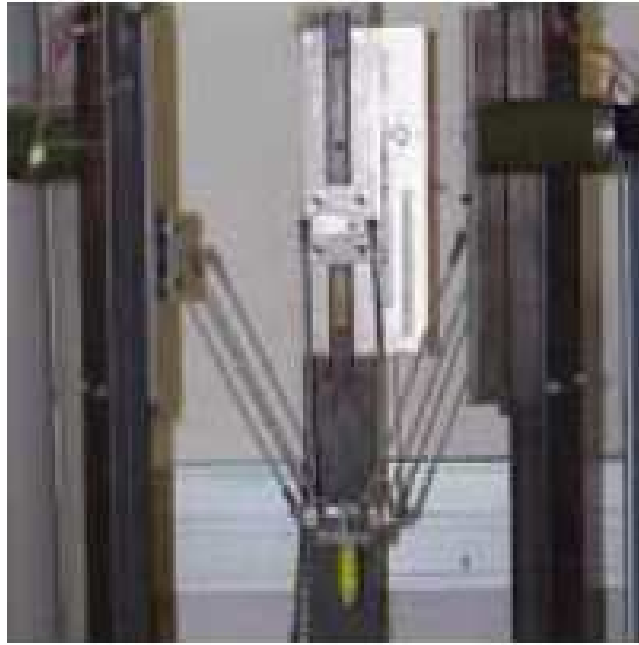


Figure 4.1- Photo du robot Delta à actionneurs linéaires.

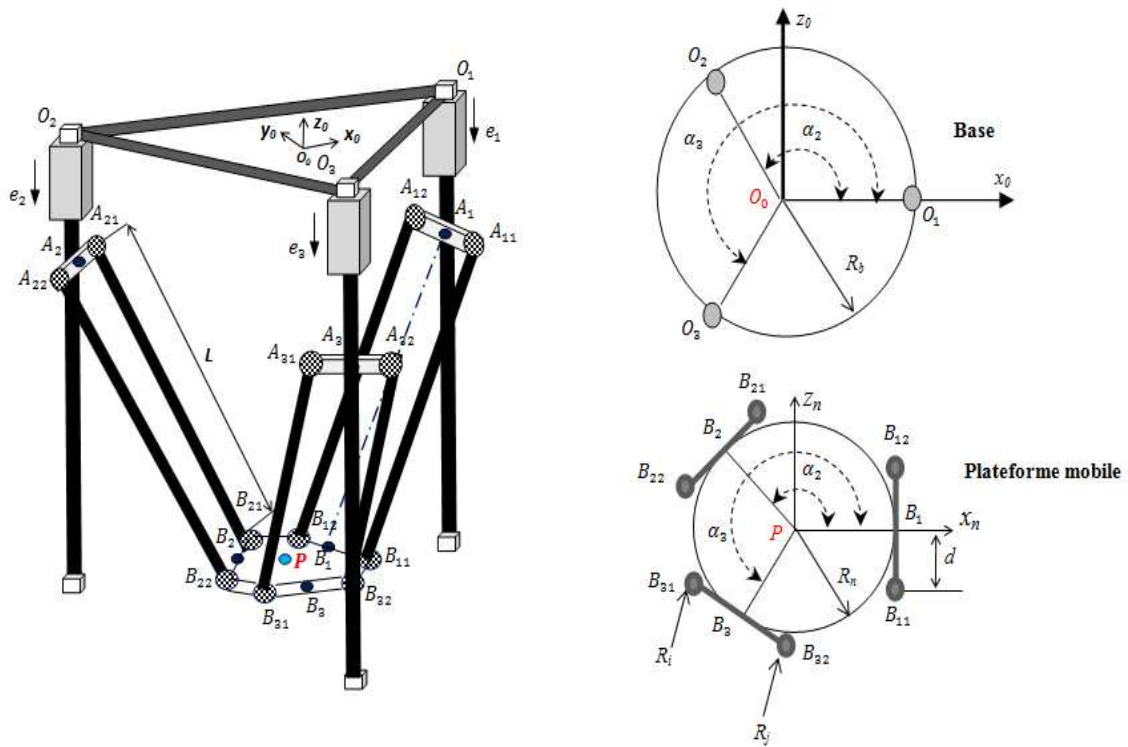


Figure 4.2- Description géométrique du robot Delta linéaire.

## 4.2. Description et paramétrage géométrique du robot DELTA linéaire

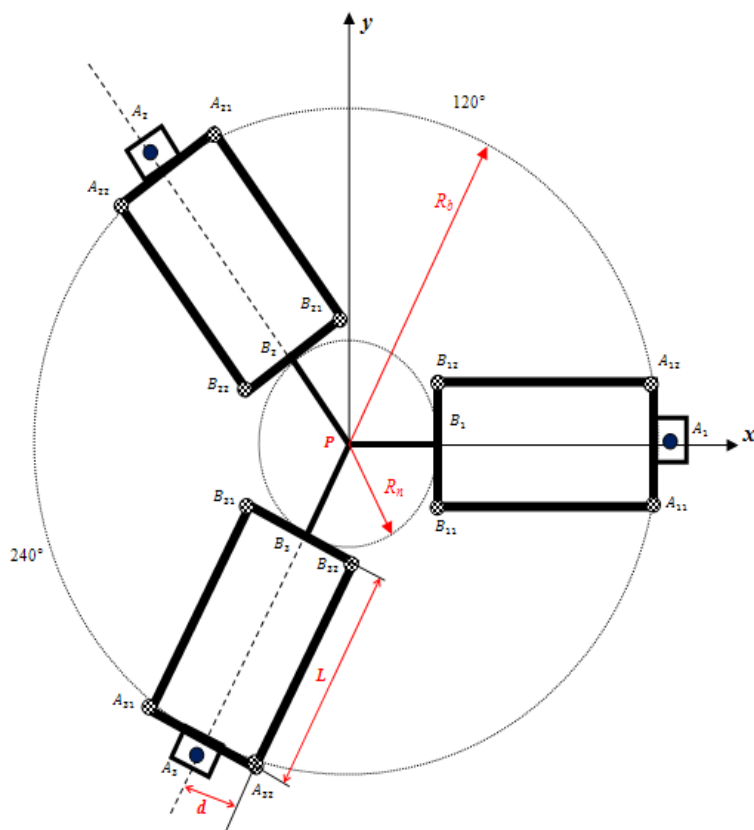


Figure 4.3- Vue de dessous du robot Delta linéaire.

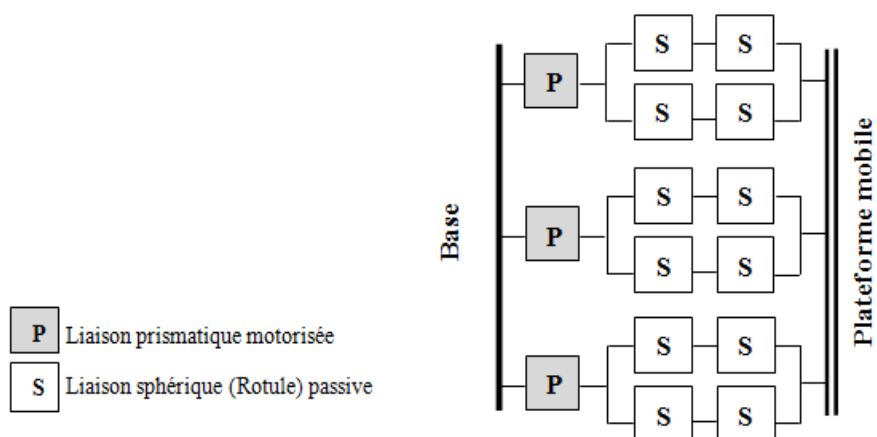


Figure 4.4- Graphe d'agencement du robot Delta linéaire.

### 4.3 Modèle géométrique

Le modèle géométrique du robot permet d'exprimer la situation (position et orientation) de l'organe terminal  $(x \ y \ z)^T$  par rapport à un repère de référence  $\{R_0\}$ , connaissant les variables articulaires de commande  $(q_1 \ q_2 \ q_3)^T$  et inversement. Les équations de contraintes peuvent être choisies de la manière suivante :

$$\|A_i B_i\|^2 - L^2 = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

Les coordonnées des points  $B_i$  dans le repère de la plateforme mobile sont données par :

$$[B_i]_{na} = \begin{bmatrix} R_n \cos \alpha_i \\ R_n \sin \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Dans le repère base :

$$[B_i]_{base} = \begin{bmatrix} R_n \cos \alpha_i \\ R_n \sin \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + R_n \cos \alpha_i \\ y + R_n \sin \alpha_i \\ z \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Les coordonnées des points  $A_i$  dans le repère de la base sont données par :

$$[A_i]_{base} = \begin{bmatrix} R_b \cos \alpha_i \\ R_b \sin \alpha_i \\ q_i \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\alpha_i = \frac{2\pi}{3} (i - 1) \quad i = 1, 2, 3$$

D'où, l'équation (4.1) devient :

$$(x - (R_b - R_n) \cos \alpha_i)^2 + (y - (R_b - R_n) \sin \alpha_i)^2 + (z - q_i)^2 - L^2 = 0 \quad (4.5)$$

L'équation (4.5) est utilisée pour établir l'expression des modèles géométriques direct et inverse, sa résolution par rapport aux variables articulaires  $q_i$  donne le MGI :

$$\begin{cases} q_1 = z \mp \sqrt{L^2 - (x - (R_b - R_n) \cos \alpha_1)^2 + (y - (R_b - R_n) \sin \alpha_1)^2} \\ q_2 = z \mp \sqrt{L^2 - (x - (R_b - R_n) \cos \alpha_2)^2 + (y - (R_b - R_n) \sin \alpha_2)^2} \\ q_3 = z \mp \sqrt{L^2 - (x - (R_b - R_n) \cos \alpha_3)^2 + (y - (R_b - R_n) \sin \alpha_3)^2} \end{cases} \quad (4.6)$$

Le signe admis dans le système d'équations (4.6) est (+) car il correspond bien à la configuration représentée dans la figure 4.2, et sa résolution (système 4.6) par rapport à  $x, y$  et  $z$ , donne le MGD :

$$\begin{cases} C_1 z^2 + C_2 z + C_3 = 0 \\ y = N_1 z + N_2 \\ x = S_1 z + S_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

D'où :

$$z_{1,2} = \frac{-C_2 \mp \sqrt{C_2^2 - 4C_1 C_3}}{2C_1} \quad (4.8)$$

La solution retenue est  $z = \min(z_1, z_2)$  car la première équation du système d'équations (4.7) admet deux solutions qui correspondent à deux positions de la plateforme mobile (voir figure 4.2). La solution retenue correspond à la position basse. Par conséquent la

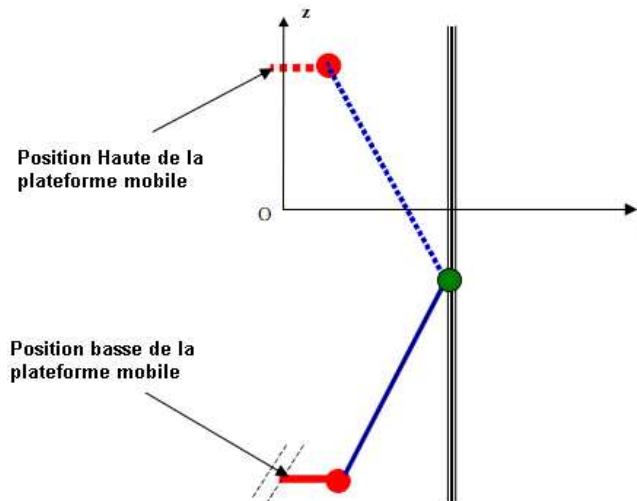


Figure 4.5- représentation des deux solutions de la première équation du système (4.7) .

valeur retenue de  $z$  est la plus petite des deux solutions de la première équation du système (4.7). Ceci permet de calculer  $x$  et  $y$  de façon unique [Company, 2000].

$$a_1 = (R_b - R_n) \cos \alpha_1$$

$$a_2 = (R_b - R_n) \cos \alpha_2$$

$$a_3 = (R_b - R_n) \cos \alpha_3$$

$$b_1 = (R_b - R_n) \sin \alpha_1$$

$$b_2 = (R_b - R_n) \sin \alpha_2$$

$$b_3 = (R_b - R_n) \sin \alpha_3$$

$$H_1 = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}$$

$$H_2 = \frac{q_1 - q_2}{a_2 - a_1}$$

$$H_3 = \frac{a_2^2 + b_2^2 + q_2^2 - a_1^2 - b_1^2 - q_1^2}{2(a_2 - a_1)}$$

$$M_1 = \frac{b_2 - b_3}{a_3 - a_2}$$

$$M_2 = \frac{q_2 - q_3}{a_3 - a_2}$$

$$M_3 = \frac{a_3^2 + b_3^2 + q_3^2 - a_2^2 - b_2^2 - q_2^2}{2(a_3 - a_2)}$$

$$N_1 = \frac{M_2 - H_2}{H_1 - M_1}$$

$$N_2 = \frac{M_3 - H_3}{H_1 - M_1}$$

$$S_1 = H_1 N_1 + H_2$$

$$S_2 = H_1 N_2 + H_3$$

$$C_1 = S_1^2 + N_1^2 + 1$$

$$C_2 = 2((S_2 - a_1)S_1 + (N_2 - b_1)N_1 - q_1)$$

$$C_3 = (S_2 - a_1)^2 + (N_2 - b_1)^2 - q_1^2 - L^2$$

## 4.4 L'espace de travail

En appliquant la procédure 2 de la section 2.3.1, nous constatons que l'espace de travail de ce robot est formé par l'intersection des espaces de travail des 3 chaînes cinématiques (figure 4.6). En analysant l'équation (30), nous remarquons que pour chaque valeur de  $q_i$  ( $q_i \in [q_{i_{min}}, q_{i_{max}}]$ ) donnée, l'espace de travail de chaque chaîne cinématique est une sphère de rayon "  $L$  " et de centre :  $A_i((R_b - R_n) \cos \alpha_i, (R_b - R_n) \sin \alpha_i, q_i)$ . L'intersec-

tion des trois sphères correspondantes aux trois chaînes cinématiques le long des  $q_i$  forme l'espace de travail du robot, qui est de forme irrégulière.

Pour  $q_i$  donné, la section de l'espace de travail du robot est l'intersection de trois cercles (figure 4.6), de centres  $A_i((R_b - R_n) \cos \alpha_i, (R_b - R_n) \sin \alpha_i, q_i)$  et de rayons  $R_{ci} = \sqrt{L^2 - (z - q_i)^2}$ , ce qui nous ramène à conclure que l'espace de travail du robot est l'ensemble des intersections des trois cercles le long de  $q_i$ .

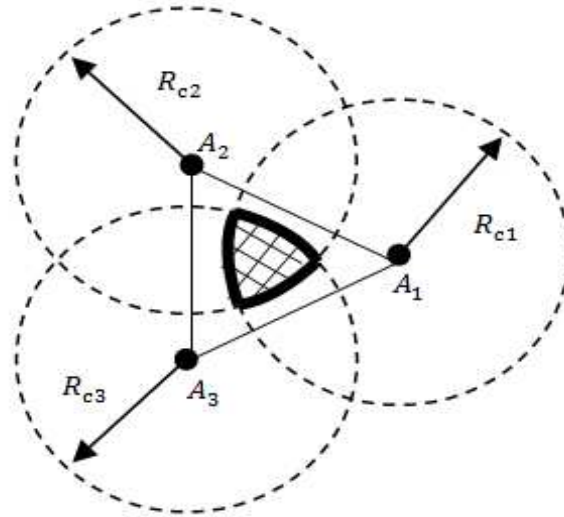


Figure 4.6- Intersection des 3 cercles.

L'obtention d'un espace de travail de forme régulière (cylindrique, ou parallélépipède conseillé en cas d'utilisation du robot dans des applications d'usinage) est possible en formant un cercle d'équation :  $x^2 + y^2 = r^2$  perpendiculaire à  $z$ , ce qui nous donne un cylindre de volume  $\pi r^2 z$ . A l'intérieur de ce cylindre, nous pouvons prescrire un parallélépipède de volume  $2r^2 z$  (figure 4.7). Le but ici est d'obtenir un espace de travail dextre régulier le plus grand possible, d'où la fonction objective est :

$$r = \sqrt{(S_1 z + S_2)^2 + (N_1 z + N_2)^2} \rightarrow \max \quad (4.9)$$

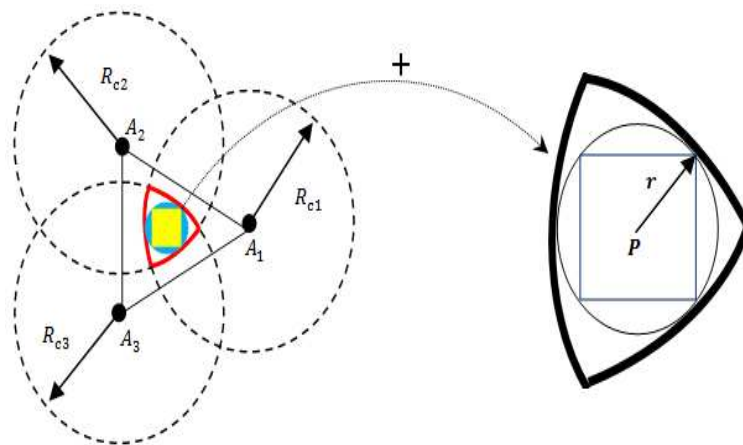


Figure 4.7- Section de l'espace de travail dextre régulier.

## 4.5 Matrice jacobienne et analyse des singularités

Nous dérivons l'équation (4.5) par rapport au temps, nous obtenons :

$$(x - (R_b - R_n) \cos \alpha_i) \dot{x} + (y - (R_b - R_n) \sin \alpha_i) \dot{y} + (z - q_i) \dot{z} = (z - q_i) \dot{q}_i \quad (4.10)$$

Sous forme matricielle, le système s'écrit :

$$J_x = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = J_q \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Avec :

$$J_x = \begin{bmatrix} (B_1 - A_1)^T \\ (B_2 - A_2)^T \\ (B_3 - A_3)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - (R_b - R_n) & y & z - q_1 \\ x + \frac{1}{2}(R_b - R_n) & y - \frac{\sqrt{3}}{2}(R_b - R_n) & z - q_2 \\ x + \frac{1}{2}(R_b - R_n) & y + \frac{\sqrt{3}}{2} & z - q_3 \end{bmatrix}$$

$$J_q = \begin{bmatrix} z - q_1 & 0 & 0 \\ 0 & z - q_2 & 0 \\ 0 & 0 & z - q_3 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$J^{-1} = J_q^{-1} J_x \quad (4.12)$$

L'analyse de la matrice jacobienne inverse nous permet d'éviter les configurations singulières. Nous distinguons les cas suivants :

### 4.5.1 Singularités sérielles ( $|J_q| = 0$ )

$$|J_q| = 0 \implies (z - q_1)(z - q_2)(z - q_3) = 0 \implies (z = q_1) \vee (z = q_2) \vee (z = q_3)$$

Cette singularité apparaît lorsque l'un ou deux ou même les trois parallélogrammes deviennent perpendiculaires aux directions des actionneurs :  $A_i B_i \perp e_i$ . Autrement dit, ces configurations sont obtenues lorsque  $L = R_b - R_n$ , pour les éliminer il faut choisir  $R_b - R_n < L$ .

### 4.5.2 Singularités parallèles ( $|J_x| = 0$ )

$|J_x| = 0$ , signifie que les trois vecteurs  $(B_1 - A_1)^T$ ,  $(B_2 - A_2)^T$  et  $(B_3 - A_3)^T$  sont coplanaires, pour éliminer cette configuration, il faut choisir :

$R_b - R_n < L$ . Il s'agit des configurations où le robot perd un degré de liberté et par conséquent, d'après la relation (4.11) aucune vitesse cartésienne ne peut être produite.

**Remarque** : Les singularités sérielles et parallèles peuvent être éliminées en imposant la contrainte suivante (figure 4.8) :

$$0 < \psi_i < \frac{\pi}{2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.13)$$

Le contrôle de l'intervalle des angles  $\psi_i$  est fait par la détermination des valeurs optimisées de  $L$  et  $(R_b - R_n)$ .

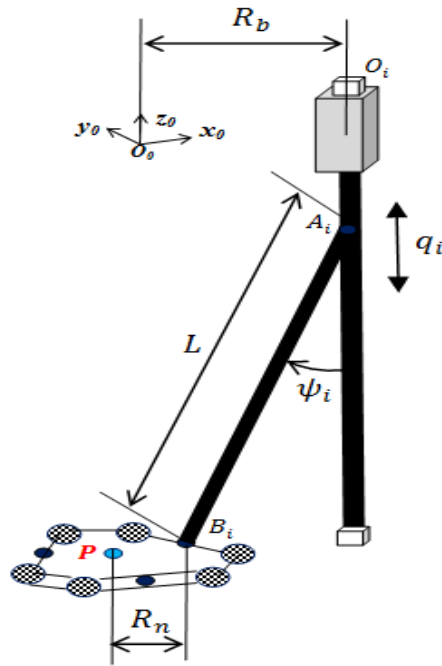


Figure 4.8- Représentation d'une chaîne cinématique.

## 4.6 Énergie cinétique du système

Pour pouvoir établir la matrice de masse, nous considérons chaque parallélogramme comme un seul segment (figure 4.9), et nous supposons que les vitesses des deux extrémités sont respectivement  $v_{A,i}$  et  $v_{B,i}$  où  $v_{A,i}$  est la vitesse du  $i^{\text{ème}}$  actionneur et  $v_{B,i}$  la vitesse de la nacelle. Elles sont données par les expressions suivantes :

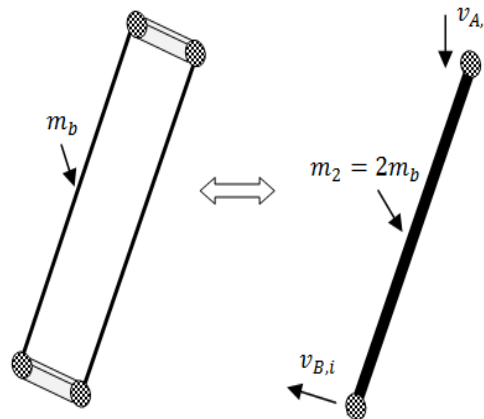


Figure 4.9- Simplification d'un parallélogramme.

$$v_{A,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_i \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \quad (4.14)$$

$$v_{B,i} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = J\dot{q} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \quad (4.15)$$

## 4.6. Énergie cinétique du système

Sous forme matricielle, les vitesses  $v_{A,i}$  peuvent être écrites comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{A,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q} = J_{A,1} \dot{q} \\ v_{A,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{q} = J_{A,2} \dot{q} \\ v_{A,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{q} = J_{A,3} \dot{q} \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Avec :  $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$

- L'énergie cinétique du système est donnée par :

$$T = T_{na} + \sum_{i=1}^3 T_{a,i} + \sum_{i=1}^3 T_{s,i} \quad (4.17)$$

- L'énergie cinétique de la plateforme mobile :

$$T_{na} = \frac{1}{2} m_1 \dot{X}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^T J^T J \dot{q} \quad (4.18)$$

- L'énergie cinétique de chaque actionneur est :

$$T_{a,i} = \frac{1}{2} m_1 v_{A,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^T J_{A,i}^T J_{A,i} \dot{q} \quad (4.19)$$

- L'énergie cinétique de chaque segment (parallélogramme) est :

$$T_{s,i} = \frac{1}{2} m_2 \left[ \frac{1}{3} (v_{A,i}^2 + v_{B,i}^2 + v_{A,i} v_{B,i}) \right] = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}^T \left[ \frac{1}{3} (J_{A,i}^T J_{A,i} + J^T J + J_{A,i}^T J) \right] \dot{q} \quad (4.20)$$

Avec :  $\dot{X} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$  et  $\dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T$

- D'où, l'énergie cinétique du système est :

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T I \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left( m_1 \sum_{i=1}^3 J_{A,i}^T J_{A,i} + m_2 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{3} (J^T J + J_{A,i}^T J_{A,i} + J_{A,i}^T J) + m_{na} J^T J \right) \dot{q} \quad (4.21)$$

Par conséquent, la matrice de masse du système  $M$  est donnée par :

$$M = J^{-T} I J^{-1} = J^{-T} \left( m_1 \sum_{i=1}^3 J_{A,i}^T J_{A,i} + \frac{1}{3} m_2 \sum_{i=1}^3 (J^T J + J_{A,i}^T J_{A,i} + J_{A,i}^T J) + m_{na} J^T J \right) J^{-1} \quad (4.22)$$

## 4.7 Formulation du problème d'optimisation

Dans cette application, il s'agit d'un robot parallèle où la matrice jacobienne est une matrice carrée de dimension (3,3) et dont les éléments ont la même unité de mesure. Par conséquent elle ne nécessite pas une homogénéisation.

Les paramètres géométriques du robot Delta à optimiser sont :

- Pour la base : le rayon de la base  $R_b$
- Pour la plateforme mobile : le rayon de la plateforme mobile  $R_n$
- Pour les segments : la longueur  $L$  des segments constituant les trois parallélogrammes.

D'après les modèles développés précédemment, nous constatons que les influences de  $R_b$  et  $R_n$  sur la cinématique et la dynamique sont couplées (voir expressions des MGI, jacobienne et matrice de masse). Par conséquent, la grandeur géométrique que nous prenons en compte est la différence ( $R_b - R_n$ ).

Par ailleurs, certaines contraintes d'encombrement limitent les valeurs de ces paramètres comme le diamètre extérieur de l'électro-broche qui impose une valeur minimale  $R_{n_{min}} = 0.15 \text{ m}$ , en plus, le robot doit avoir un encombrement réduit (actionneurs compris) car il est destiné à être intégré dans une chaîne transfert de production [Company and Pierrot, 2002] d'où  $R_{b_{max}} = 0.70 \text{ m}$ . Le paramètre  $L$  reste libre à optimiser.

A partir des équations (4.9), (4.12) et (4.22), le problème d'optimisation multiobjectif est reformulé comme suit :

**Trouver un vecteur optimal**  $P^* = [R_b^*, R_n^*, L^*]^T$  qui :

$$\min F(P) = \min \begin{bmatrix} -r \\ \eta_J \\ \eta_M \end{bmatrix}$$

**Tel que :**

$$\begin{aligned} 0 &\leq q_i \leq 0,600 \text{ m} \\ 0 &< \psi_i < \frac{\pi}{2} \\ 0,150 \text{ m} &\leq R_n \leq 0,400 \text{ m} \\ 0,550 \text{ m} &\leq R_b \leq 0,700 \text{ m} \\ 0,750 \text{ m} &\leq L \leq 1,500 \text{ m} \\ B_{i1}B_{i2} &\leq d = 0,100 \text{ m} \\ |\dot{q}_i| &\leq 0,2 \text{ m/s} \\ |\ddot{q}_i| &\leq 0,2 \text{ m/s}^2 \\ \frac{1}{5} &\leq F_v \leq 5 \\ \frac{1}{5} &\leq F_e \leq 5 \\ m_1 &= m_{na} = 50 \text{ kg} \\ m_2 &= 10 \text{ kg} \end{aligned}$$

Pour le tout :  $i = 1, 2, 3$

## 4.8 Résultats et discussion

Matlab est utilisé comme une plateforme pour l'implémentation des algorithmes génétiques SPEA-II, avec les paramètres suivants : Taille de la population : 200, nombre de générations : 200, probabilité de croisement : 0.9, probabilité de mutation : 0.1.

Les figures (4.10, 4.11 et 4.12) représentent les meilleurs compromis obtenus entre les différentes fonctions objectif. Nous constatons qu'il y a un antagonisme entre les performances (cinématiques et dynamiques) et l'espace de travail dextre régulier représenté par le rayon de la section "  $r$  ". Autrement dit, si nous voulons avoir de bonnes performances, ça ne sera pas sur tout l'ensemble de l'espace de travail mais uniquement sur une partie cet espace. Nous notons que plus les performances désignées sont élevées, plus l'espace de travail sera petit et vice-versa.

Le tableau 4.1 regroupe quelques solutions optimales  $P^*$  du robot Delta linéaire correspondant aux fonctions objectif optimisées. Le choix d'un dimensionnement (vecteur optimisé  $P_i^*$  des paramètres géométriques) à partir du compromis obtenu entre les différents objectifs qui contient les meilleures solutions, sera fait selon l'ordre d'importance des critères (préférences du concepteur). Cette solution va refléter son compromis vis-à-vis des différentes fonctions objectif. Dans notre cas, nous avons préféré d'avoir de meilleures

performances cinématiques et dynamiques  $\begin{bmatrix} r \\ \eta_J \\ \eta_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.110 \\ 5.699 \\ 7.174 \end{bmatrix}$ , ce choix est reflété par le vecteur des paramètres géométriques :  $\begin{bmatrix} R_b (m) \\ R_n (m) \\ L (m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.700 \\ 0.150 \\ 0.750 \end{bmatrix}$ .

Par ailleurs, un autre choix favorisant l'espace de travail dextre (représenté par la fonction  $r$ ) au détriment des autres performances peut être fait :

$\begin{bmatrix} r \\ \eta_J \\ \eta_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.302 \\ 17.111 \\ 20.027 \end{bmatrix}$ , il est reflété par le vecteur optimisé suivant :  $\begin{bmatrix} R_b (m) \\ R_n (m) \\ L (m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.700 \\ 0.327 \\ 1.188 \end{bmatrix}$ .

Donc, il est évident qu'il n'existe pas une seule solution meilleure que les autres, mais tout un ensemble. Le choix final (décision de choix) est fait selon les préférences de l'utilisateur.

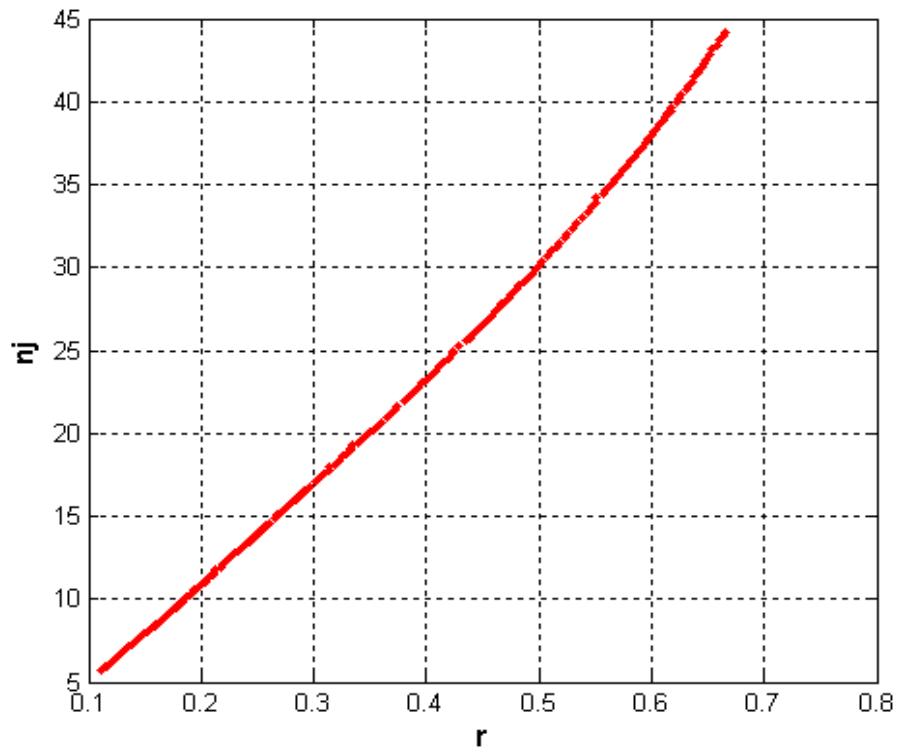


Figure 4.10- *Compromis entre le rayon de la section l'espace de travail dextre régulier "rayon r" et les performances cinématiques  $\eta_J$ .*

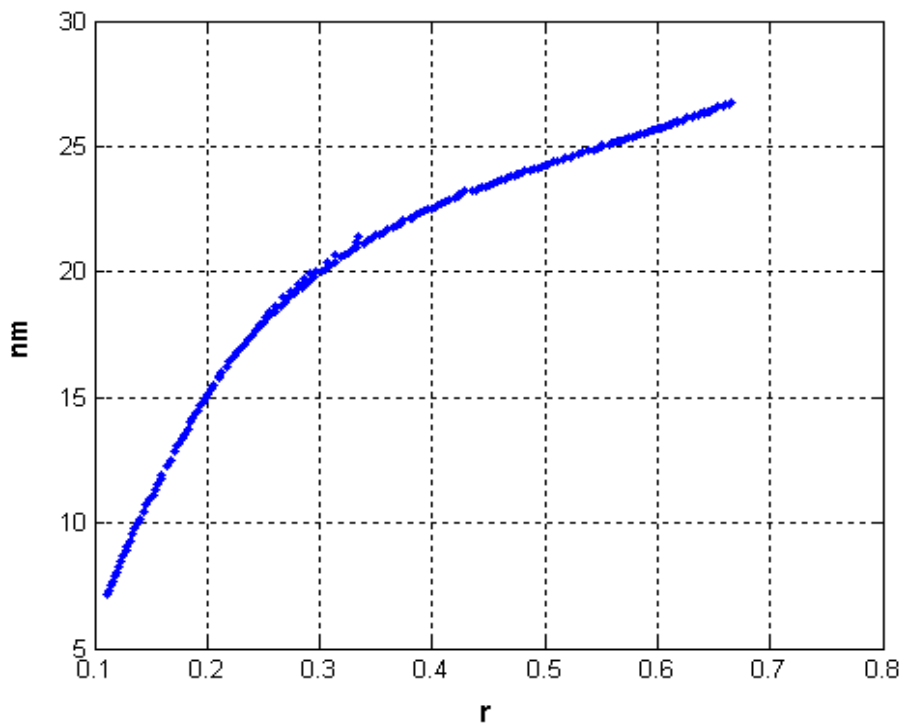


Figure 4.11- *Compromis entre le rayon de la section l'espace de travail dextre régulier "rayon r" et la dextérité dynamique  $\eta_M$ .*

Paramètres géométriques		Fonctions objectif associées		
$R_b - R_n(m)$	$L(m)$	$\eta_J$	$\eta_M$	$r(m)$
0.550	0.750	5.699	7.174	0.110
0.520	0.758	6.323	8.288	0.122
0.489	0.752	6.906	9.308	0.132
0.474	0.763	7.414	10.166	0.141
0.443	0.751	8.012	11.138	0.152
0.454	0.804	8.527	11.926	0.160
0.425	0.791	9.147	12.835	0.170
0.383	0.751	9.807	13.750	0.182
0.375	0.762	10.283	14.363	0.190
0.371	0.793	10.935	15.144	0.200
0.344	0.763	11.457	15.749	0.210
0.397	0.925	12.160	16.422	0.220
0.366	0.895	12.880	17.125	0.232
0.471	1.192	13.394	17.482	0.240
0.452	1.191	14.020	17.993	0.250
0.437	1.190	14.591	18.426	0.260
0.420	1.198	15.367	18.966	0.273
0.350	1.022	15.774	19.311	0.280
0.366	1.110	16.450	19.685	0.291
0.378	1.188	17.111	20.027	0.302
0.367	1.193	17.762	20.369	0.313
0.354	1.187	18.349	20.644	0.322
0.349	1.194	18.787	20.866	0.330
0.327	1.169	19.640	21.258	0.343
0.326	1.198	20.238	21.486	0.353
0.316	1.186	20.686	21.669	0.360
0.304	1.179	21.427	21.950	0.372
0.300	1.190	21.937	22.120	0.380
0.287	1.166	22.541	22.344	0.389
0.284	1.198	23.368	22.577	0.402
0.277	1.199	24.021	22.770	0.412
0.270	1.192	24.511	22.918	0.420

Tableau 4.1- Paramètres géométriques et fonctions objectif optimisés.

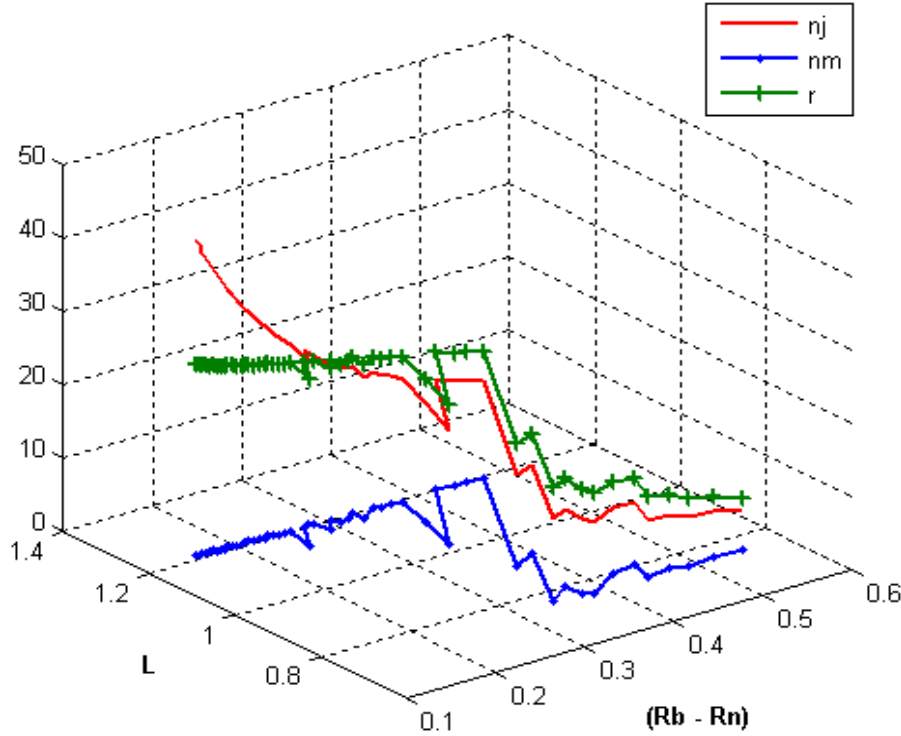


Figure 4.12- Variation of the objective functions with  $R_b - R_n$  and  $L$ .

#### 4.8.1 Analyse de l'espace de travail dextre

Après avoir pris compte de plusieurs critères de performance dans la méthodologie développée, nous présentons dans cette section son impact sur le l'espace de travail dextre (optimisé par critère cinétostatique : le conditionnement de la matrice jacobienne inverse)

où nous présentons cet espace avec les paramètres géométriques  $P^* = \begin{bmatrix} R_b (m) \\ R_n (m) \\ L (m) \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 0.700 \\ 0.150 \\ 0.750 \end{bmatrix}$ . obtenus avec la méthodologie développée ci-dessus. Ensuite nous le compa-

rons avec l'espace de travail dextre obtenu avec les paramètres géométriques obtenus par [Company and Pierrot, 2002] où  $P^* = \begin{bmatrix} (R_b - R_n) (m) \\ L (m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.550 \\ 0.100 \end{bmatrix}$ . L'espace de travail de la PKM est obtenu par l'intersection de trois cylindres de révolution dont les axes sont parallèles à l'axe  $z$ .

Nous notons ici que la valeur maximale du conditionnement obtenue sur l'ensemble des points de l'espace de travail avec les dimensions de [Company and Pierrot, 2002] est  $\kappa_{J_{max}} = 1.99 (\frac{1}{\kappa_{J_{max}}} = 0.5024)$  et par la méthode des algorithmes génétiques est :  $\kappa_{J_{max}} = 1.265 (\frac{1}{\kappa_{J_{max}}} = 0.5024)$ . Le tableau 4.2 représente les limites de l'espace de travail dextre en fonction de la valeur de  $\kappa_J$  obtenus avec les paramètres géométriques

$P^* = \begin{bmatrix} (R_b - R_n) (m) \\ L (m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.550 \\ 0.750 \end{bmatrix}$  (obtenus avec les algorithmes génétiques NSGA-II

et SPEA-II) et avec les paramètres géométriques  $P = \begin{bmatrix} (R_b - R_n) (m) \\ L (m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.550 \\ 0.100 \end{bmatrix}$

(obtenus par [Company and Pierrot, 2002]).

## 4.9. Conclusion

Conditionnement $\kappa_J$	NSGA-II et SPEA-II			[Company and Pierrot, 2002]		
	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$	$x(m)$	$y(m)$	$z(m)$
$\frac{1}{\kappa_J} \geq 0.35$	$x_{min} = -0.17$	$y_{min} = -0.21$	$z_{min} = -1.12$	$x_{min} = -0.32$	$y_{min} = -0.38$	$z_{min} = -1.42$
	$x_{max} = 0.24$	$y_{max} = 0.21$	$z_{max} = -0.50$	$x_{max} = 0.42$	$y_{max} = 0.38$	$z_{max} = -0.85$
$\frac{1}{\kappa_J} \geq 0.45$	$x_{min} = -0.14$	$y_{min} = -0.17$	$z_{min} = -1.20$	$x_{min} = -0.075$	$y_{min} = -0.085$	$z_{min} = -1.42$
	$x_{max} = 0.20$	$y_{max} = 0.17$	$z_{max} = -0.50$	$x_{max} = 0.085$	$y_{max} = 0.085$	$z_{max} = -0.85$
$\frac{1}{\kappa_J} \geq 0.55$	$x_{min} = -0.12$	$y_{min} = -0.13$	$z_{min} = -1.12$	0	0	0
	$x_{max} = 0.15$	$y_{max} = 0.13$	$z_{max} = -0.50$	0	0	0

Tableau 4.2- *Limites de l'espace dextre.*

Nous constatons que lorsque nous minimisons les valeurs de  $\kappa_J$  de telle sorte que  $\kappa_J \rightarrow 1$  l'espace de travail dextre obtenu avec les paramètres obtenus avec les algorithmes génétiques devient de plus en plus grand que celui obtenu avec les paramètres de [Company and Pierrot, 2002].

La figure 4.13 , présente l'espace de travail dextre ( $\frac{1}{\kappa_{J_{max}}} \geq 0.45$ ) avec les paramètres géométriques  $P = \begin{bmatrix} (R_b - R_n) (m) \\ L (m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.550 \\ 0.750 \end{bmatrix}$  dans l'espace (xyz) et dans les trois plans  $(xy)$ ,  $(xz)$ ,  $(yz)$ , pour une meilleure visualisation.

La figure 4.14, présente l'espace de travail dextre ( $\frac{1}{\kappa_{J_{max}}} \geq 0.45$ ) avec les paramètres géométriques  $P = \begin{bmatrix} (R_b - R_n) (m) \\ L (m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.550 \\ 0.100 \end{bmatrix}$  obtenus par [Company and Pierrot, 2002] dans l'espace  $(xyz)$  et dans les trois plans  $(xy)$ ,  $(xz)$ ,  $(yz)$ .

## 4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthodologie de conception dimensionnelle basée sur l'optimisation multiobjectif des différents critères de performances cinématiques et dynamiques ainsi que l'espace de travail dextre et la rigidité, par les algorithmes génétiques à une machine à cinématique parallèle à 3 *ddl* (le robot parallèle Delta linéaire). Pour la formulation mathématique du problème d'optimisation, nous avons défini les fonctions objectif à partir des critères de performance, des différentes contraintes relatives au robot Delta linéaire, et considéré les paramètres géométriques du robot comme variables de décision. Nous avons choisi comme approche de résolution l'algorithme génétique SPEA-II. Ceci nous a permis effectivement de déterminer une bonne approximation de l'intégralité du compromis (front de Pareto) entre les différents critères de performances parfois antagonistes entre eux (l'espace de travail vs les performances cinématique et dynamique) et par conséquent les vecteurs des paramètres géométriques optimaux associés, ce qui très difficile à obtenir avec les méthodes classiques qui ne peuvent pas prendre en considération tous ces critères à la fois.

Dans le chapitre qui suit nous appliquons la méthodologie développée à une structure plus complexe. Il s'agit de la plateforme de Gough-Stewart type 6 *ddl* UPS.

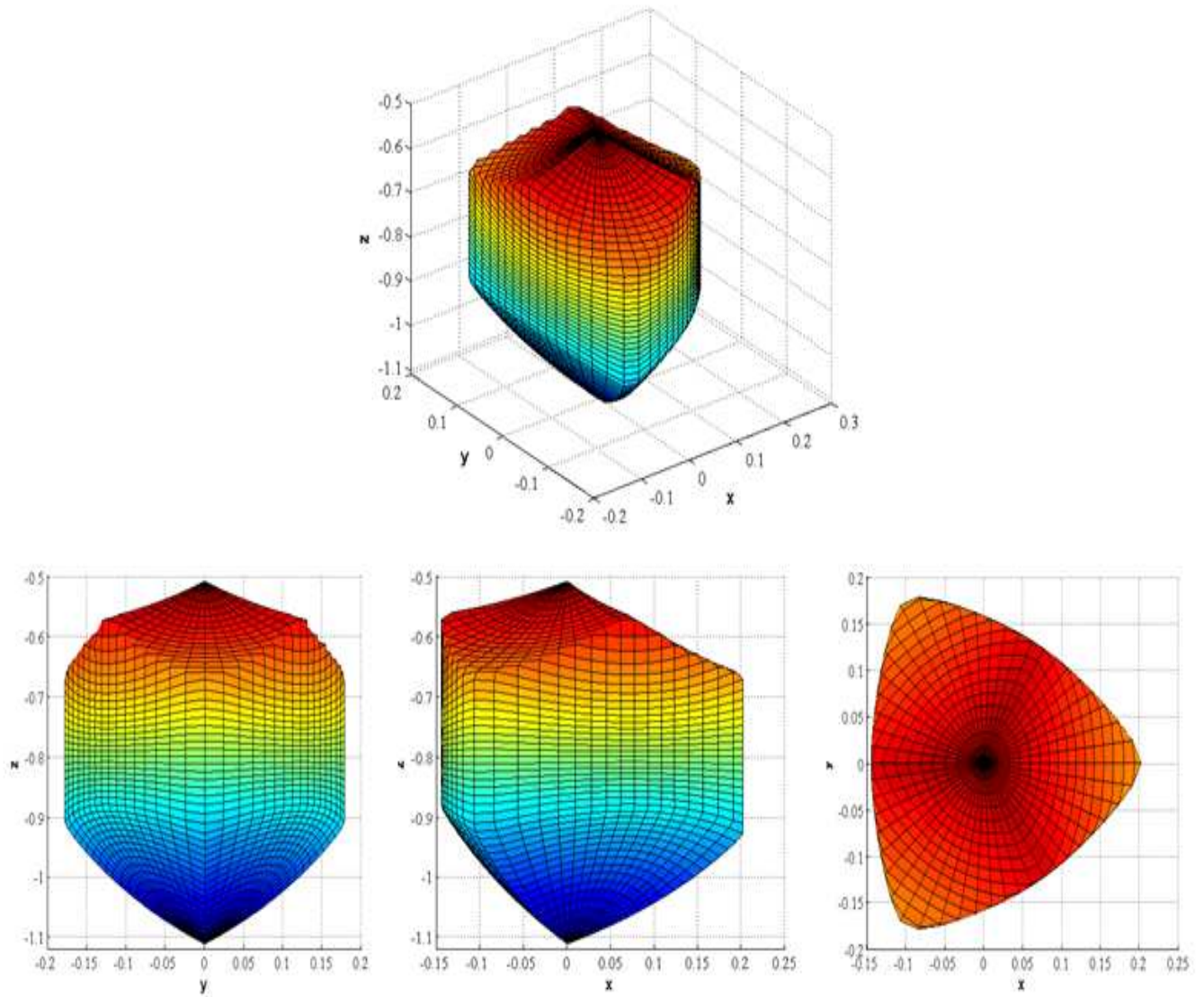


Figure 4.13- Espace de travail avec contrainte ( $\frac{1}{\kappa_{J_{max}}} \geq 0.45$ ) lorsque  $L = 0.750m$ .

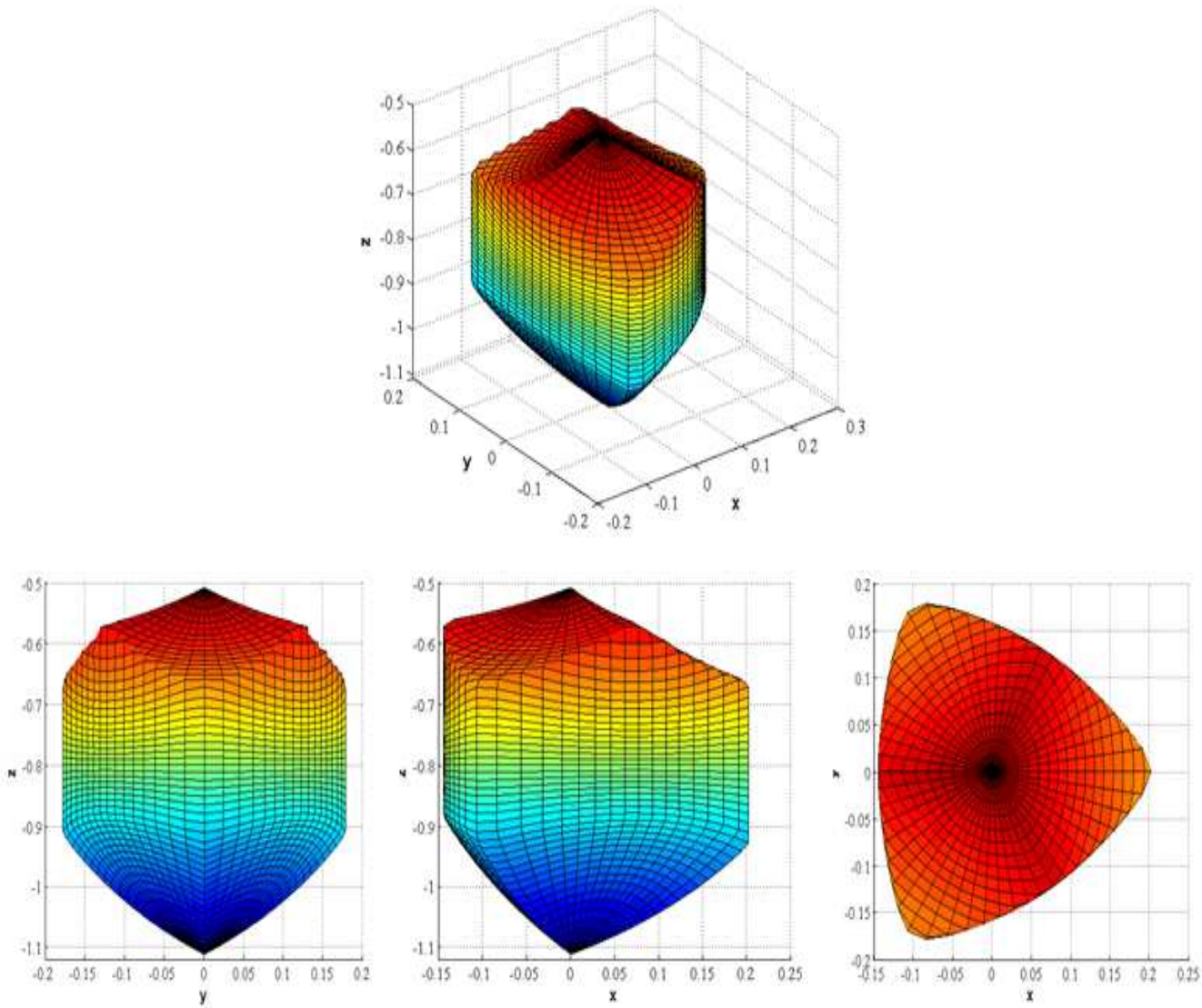


Figure 4.14- Espace de travail avec contrainte ( $\frac{1}{\kappa_{J_{max}}} \geq 0.45$ ) lorsque  $L = 1.0m$ .

## Chapitre 5

# Application à la conception dimensionnelle optimale d'une machine à 6 *ddl* : La plateforme de GOUGH-STEWART type UPS

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
<b>5.2</b>	<b>Description géométrique de la plateforme de Gough-Stewart</b>	<b>90</b>
<b>5.3</b>	<b>Modèle géométrique inverse de la plateforme</b>	<b>92</b>
<b>5.4</b>	<b>Construction de la matrice de rotation <math>R</math></b>	<b>92</b>
<b>5.5</b>	<b>Modèle géométrique direct</b>	<b>93</b>
<b>5.6</b>	<b>Calcul de la matrice jacobienne</b>	<b>94</b>
<b>5.7</b>	<b>Homogénéisation de la matrice jacobienne</b>	<b>95</b>
<b>5.8</b>	<b>Analyse de la singularité</b>	<b>95</b>
5.8.1	Singularité de type I (Sous-mobilité)	95
5.8.2	Singularité de type II (Sur-mobilité)	95
5.8.3	Singularité de type III	95
<b>5.9</b>	<b>Evaluation de la matrice de masse du système</b>	<b>95</b>
5.9.1	Calcul de l'énergie cinétique d'un segment	95
5.9.2	Calcul de l'énergie cinétique de la tige (piston)	95
5.9.2.1	Calcul de $V_{P_i}$ Dans le repère du segment $\{R_s\}$	97
5.9.2.2	Calcul de la vitesse $[V_{P_i}]_b$	97
5.9.2.3	Détermination de ${}^P\omega_{na}$	97
5.9.2.4	Calcul de $\omega_{a,i}$ dans le repère du segment $\{R_s\}$	98
5.9.3	Calcul de l'énergie cinétique du cylindre	98
5.9.4	Calcul de l'énergie cinétique de chaque actionneur $i$	98
5.9.5	Calcul de l'énergie cinétique de la plateforme mobile	99
5.9.6	Calcul de l'énergie cinétique du système	99
<b>5.10</b>	<b>Formulation du problème d'optimisation</b>	<b>100</b>
<b>5.11</b>	<b>Résultats et discussion</b>	<b>100</b>
5.11.1	Premier cas	101
5.11.2	Deuxième cas	102
5.11.3	Troisième cas	103
5.11.4	Comparaison entre les architectures obtenues	104
5.11.5	Comparaison avec d'autres résultats	104
<b>5.12</b>	<b>Conclusion</b>	<b>105</b>

---

## 5.1 Introduction

Dans cette application, nous avons utilisé le robot "F-200i" de Fanuc Robotics (figure 5.1 et 5.2), qui se trouve au Laboratoire d'Informatique, Robotique et Microélectronique (LIRMM) en France pour tester l'efficacité de la méthodologie développée. Il s'agit d'optimiser le vecteur des paramètres géométriques composé de :

- Rayon de la base  $r_b$  (figure 5.3)
- Rayon de la plateforme mobile  $r_p$
- Points d'attache des segments sur la base définis par un rayon  $r_b$  et des angles  $\alpha_i$  :

$${}^b B_i = \begin{bmatrix} r_b \cos(\alpha_i) \\ r_b \sin(\alpha_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 6$$

- Points d'attache des segments sur la plateforme mobile définis par un rayon  $r_p$  et des angles  $\beta_i$  :

$${}^n P_i = \begin{bmatrix} r_p \cos(\beta_i) \\ r_p \sin(\beta_i) \\ 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 6$$

Pour ce faire, nous déterminons le modèle géométrique, cinématique et ainsi que la matrice de masse de la plateforme de Gough-Stewart.

## 5.2 Description géométrique de la plateforme de Gough-Stewart

Le manipulateur parallèle à 6 ddl UPS (figures 5.1, 5.2 et 5.3) est constitué d'une base fixe et une plateforme mobile supposées parfaitement rigides [Stewart, 1965], elles sont liées par six jambes (liaisons prismatiques) de longueur variable  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) liées à la base par des articulations de type Cardan définies par les points  $B_i$  et à la plateforme mobile par des liaisons sphériques (rotules) définies par les points  $P_i$ .

Le repère  $\{R_b\}$  :  $(O_b - x_b, y_b, z_b)$  est fixé au centre de la base.

Le repère  $\{R_n\}$  :  $(O_n - x_n, y_n, z_n)$  est attaché au centre de la plateforme mobile.

La position du point  $O_n$  par rapport au repère  $\{R_b\}$  est donnée par le vecteur position  ${}^b r = [x, y, z]^T$ .

L'orientation du repère  $\{R_n\}$  de la plateforme par rapport au repère de la base  $\{R_b\}$  est donnée par la matrice de rotation  $R$  définie par les angles de Roll-Pitch-Yaw.



Figure 5.1- robot à 6 ddl "F-200i" de Fanuc Robotics.

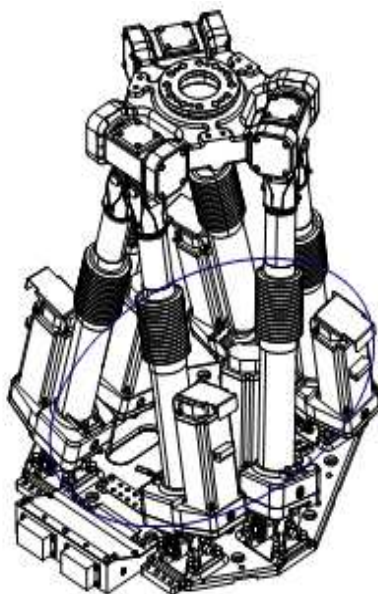
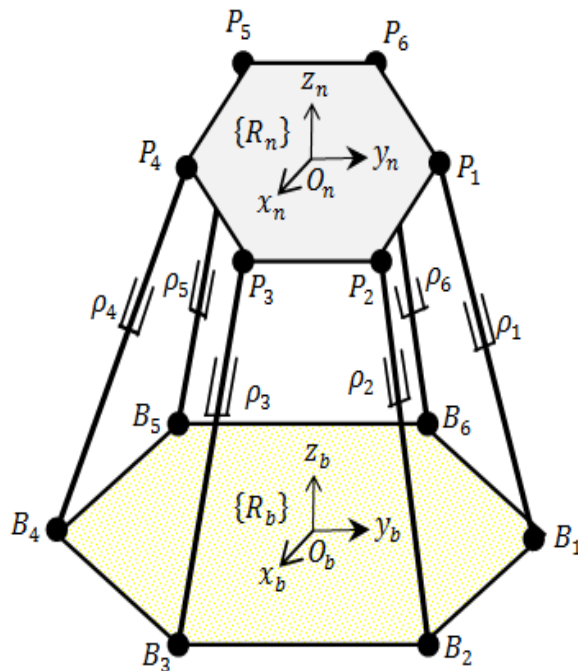


Figure 5.2- Représentation CAO du robot Fanuc Robotics "F-200i".


 Figure 5.3- *Platform de Gough-Stewart.*

### 5.3 Modèle géométrique inverse de la plateforme

Le modèle géométrique inverse de la plateforme de Gough-Stewart (6 *ddl*-UPS) permet de déterminer les longueurs des segments  $\rho_i$  pour une configuration donnée de la plateforme mobile. Pour sa détermination, nous utilisons la relation suivante :

$$\overrightarrow{B_i P_i} = \overrightarrow{B_i O_b} + \overrightarrow{O_b O_n} + \overrightarrow{O_n P_i} \quad (5.1)$$

En projetant cette relation dans le repère  $\{R_b\}$ , nous obtenons :

$$\rho_i \eta_i = -{}^b B_i + {}^b r + R {}^n P_i \quad (5.2)$$

Avec :  $\vec{\eta}_i = \frac{\overrightarrow{B_i P_i}}{\rho_i}$  : vecteur unitaire du segment  $i$ ,  
 $\rho_i$  : longueur du segment  $i$ , obtenue par la relation suivante :

$$\rho_i^2 = \|\overrightarrow{B_i P_i}\|^2 \quad (5.3)$$

$R$  : matrice de rotation du repère  $\{R_n\}$  par rapport au repère  $\{R_b\}$  définie par les angles Roll-Pitch-Yaw.

### 5.4 Construction de la matrice de rotation $R$

Cette matrice est donnée par :

$${}^b R_p = R_{x,\psi} R_{y,\theta} R_{z,\phi}$$

$${}^b R_p = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix}$$

Avec :

$$R_{x,\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix}$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{z,\phi} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$s$  : *sin* et  $c$  : *cos*

## 5.5 Modèle géométrique direct

À l'inverse des robots série, pour lesquels l'obtention du Modèle Géométrique Direct (MGD) est facile alors que le Modèle Géométrique Inverse (MGI) est difficile, les robots parallèles présentent des complexités pour le calcul de ce modèle [Ait-Ahmed, 1993].

Le Modèle Géométrique Direct (MGD) de la plateforme de Gough-Stewart (6 *ddl*-UPS) consiste à déterminer la position et l'orientation de la plateforme mobile connaissant les longueurs des vérins  $\rho_i$ . Ce problème n'admet, pas de solution analytique dans le cas général.

Le MGD est indispensable pour le processus d'optimisation, nous avons utilisé pour son obtention la méthode itérative de Newton-Raphson [Merlet, 1993] car il s'agit d'un système d'équation non linéaire. En effet pour ce type d'architecture, nous pouvons utiliser l'algorithme suivant :

1. Initialisation du vecteur  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \psi \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix}$  avec l'estimée initiale  $X_0$

2. Inversion de  $X_0$  avec le MGI pour obtenir une estimée des longueurs des segments  $\rho_i$  :

$$\rho_i = H(x, y, z, \psi, \theta, \phi) \quad (5.4)$$

3. Nous calculons la différence :

$$\rho_i - \rho_i^m = f_i(x, y, z, \psi, \theta, \phi) = 0 \quad (5.5)$$

$\rho_i^m$  : Longueur mesurée du segment avec  $i = \overline{1, 6}$ ,

4. Nous construisons le vecteur :  $F[X^k] = \begin{bmatrix} f_1(X^k) \\ f_2(X^k) \\ f_3(X^k) \\ f_4(X^k) \\ f_5(X^k) \\ f_6(X^k) \end{bmatrix}$

La méthode de Newton classique de résolution pour ce système d'équation est donnée par :

$$X^{k+1} = X^k - \left[ \frac{\partial F(X^k)}{\partial X} \right]^{-1} (H(X^k) - \rho_i^m) \quad (5.6)$$

5. Test de convergence :

- si  $\|X^{k+1} - X^k\| \leq \varepsilon$  arrête
- si non incrémenter 2

**Note :**

Si nous posons  $J_e = \left[ \frac{\partial F(X^k)}{\partial X} \right]^{-1}$  : la matrice jacobienne des angles d'Euler, nous obtenons :

$$X^{k+1} = X^k - J_e(H(X^k) - \rho_i^m) \quad (5.7)$$

## 5.6 Calcul de la matrice jacobienne

Soit  $J^{-1}$  la matrice inverse de la matrice jacobienne, qui relie les vitesses des segments aux vitesses angulaire et linéaire de la plateforme mobile, nous avons :

$$\frac{d(\overrightarrow{O_b P_i})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{O_b O_n})}{dt} + \overrightarrow{P_i O_n} \wedge \overrightarrow{\Omega} \quad (5.8)$$

En projetant l'équation (5.8) sur le repère base  $\{R_b\}$ ,

Nous obtenons :

$$\frac{d(\overrightarrow{O_b P_i})}{dt} = \overrightarrow{{}^b \dot{r}} + R \overrightarrow{P_i O_n} \wedge \overrightarrow{\Omega} \quad (5.9)$$

D'où :

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{O_b P_i})}{dt} \cdot \overrightarrow{\eta_i} = (\overrightarrow{{}^b \dot{r}} + R \overrightarrow{P_i O_n} \wedge \overrightarrow{\Omega}) \cdot \overrightarrow{\eta_i} \quad (5.10)$$

En tenant compte de la relation  $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w}(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ , nous obtenons :

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \overrightarrow{\eta_i} \cdot \overrightarrow{{}^b \dot{r}} + (R \overrightarrow{O_n P_i} \wedge \overrightarrow{\eta_i}) \cdot \overrightarrow{\Omega} \quad (5.11)$$

$$\dot{\rho}_i = J^{-1} \dot{X} \quad (5.12)$$

Avec :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \eta_1^T & \dots & (R {}^n P_1 \wedge \eta_1)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_6^T & \dots & (R {}^n P_6 \wedge \eta_6)^T \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\dot{X} = [{}^b \dot{r}^T \ \Omega^T]^T$$

$$\dot{\rho}_i = \frac{d\rho_i}{dt} = [\dot{\rho}_1, \dots, \dot{\rho}_6]^T$$

${}^b \dot{r} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$  : vitesse linéaire de la plateforme mobile ;

$\Omega$  : vitesse angulaire de la plateforme mobile.

## 5.7 Homogénéisation de la matrice jacobienne

La matrice jacobienne est composée d'éléments de différentes unités, pour l'homogénéiser, nous utilisons la longueur caractéristique définie par [Fassi et al., 2005] :

$$L_c = \sqrt{\frac{\text{trace}(J_2^T J_2)}{\text{trace}(J_1^T J_1)}} \quad (5.14)$$

où :  $J^{-1} = [J_1, J_2]$  (voir section 2.3.2.3)

## 5.8 Analyse de la singularité

### 5.8.1 Singularité de type I (Sous-mobilité)

Lorsque  $|J^{-1} = \frac{J_x}{J_q}| \rightarrow \infty \implies |J_q| = 0$ . Ce type de singularités apparaît lorsque l'un des actionneurs atteint ses limites (limite de l'espace de travail).

### 5.8.2 Singularité de type II (Sur-mobilité)

Lorsque  $|J^{-1} = \frac{J_x}{J_q}| = 0 \implies |J_x| = 0$ . Dans ce type de singularités, nous pouvons avoir une vitesse  $\dot{X}$  non nulle de la plateforme mobile sans changement de position des actionneurs (vitesse articulaire nulle). Ce type de singularité survient à l'intérieur de l'espace de travail. La plateforme peut effectuer des mouvements infinitésimaux sans modification de la commande.

### 5.8.3 Singularité de type III

Ce type de singularités apparaît lorsque la base et la plateforme mobile possèdent les mêmes dimensions :  $Rb = Rp$  et  $\alpha_i = \beta_i$  avec  $i = 1, \dots, 6$ .

## 5.9 Evaluation de la matrice de masse du système

L'énergie cinétique du système est la somme de l'énergie cinétique des 6 segments (actionneurs) et l'énergie cinétique de la plateforme mobile.

### 5.9.1 Calcul de l'énergie cinétique d'un segment

L'actionneur (figure 5.4) est composé de deux parties [Y. Lou, 2008] [Lin and Chen, 2009] [Z. Gao, 2010] : une est fixe (cylindre) et l'autre est en mouvement linéaire (tige ou piston)

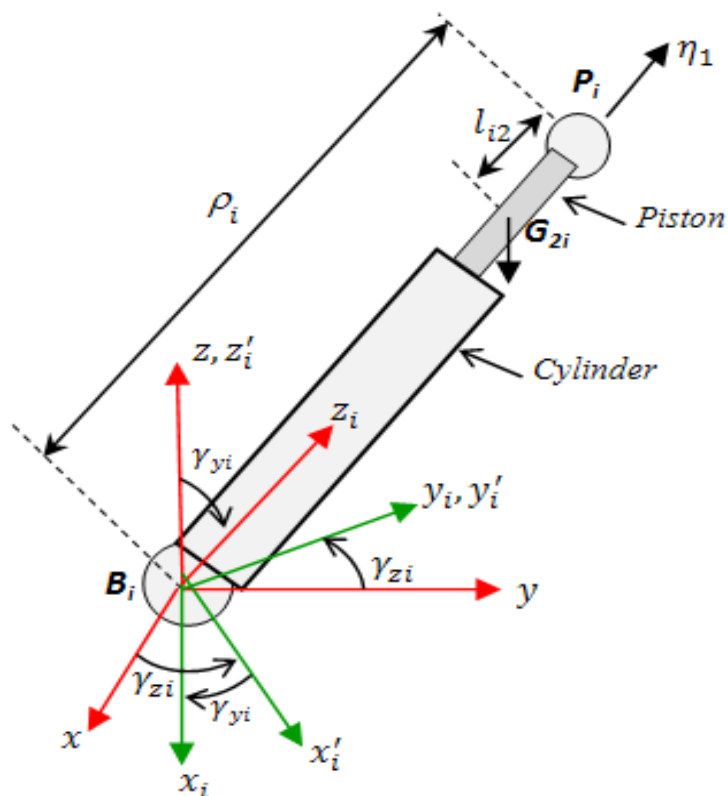
### 5.9.2 Calcul de l'énergie cinétique de la tige (piston)

$$T_{pis,s} = \frac{1}{2} v_{G2i}^T m_{pis,i} v_{G2i} + \frac{1}{2} w_{a,i}^T I_{pis,i} w_{a,i} \quad (5.15)$$

$v_{G2i}^T$  : vitesse de translation du centre de gravité de la tige

$I_{pis,i}$  : Moment d'inertie de la tige

$m_{pis,i}$  : Masse de la tige


 Figure 5.4- Représentation d'un segment  $i$ .

 5.9.2.0.c Calcul de  $v_{G2i}^T$ 

$$\overrightarrow{B_i G_{2i}} = (\rho_i - l_{i2}) \overrightarrow{\eta_i} \quad (5.16)$$

$$\overrightarrow{v_{G2i}} = \frac{d(\overrightarrow{B_i G_{2i}})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{B_i P_i})}{dt} - l_{i2} \frac{d\overrightarrow{\eta_i}}{dt} \quad (5.17)$$

avec :

$$\dot{\rho}_i = \frac{d\rho_i}{dt} = \overrightarrow{V_{P_i}^T} \overrightarrow{\eta_i} \quad (5.18)$$

$$\overrightarrow{B_i P_i} = \rho_i \overrightarrow{\eta_i} \quad (5.19)$$

$$\frac{d\overrightarrow{\eta_i}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\overrightarrow{B_i P_i}}{\rho_i} \right) = \left[ \frac{1}{\rho_i} \cdot \frac{d(\overrightarrow{B_i P_i})}{dt} - \frac{1}{\rho_i^2} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \overrightarrow{B_i P_i} \right] \quad (5.20)$$

$$\frac{d\overrightarrow{\eta_i}}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} (\overrightarrow{V_{P_i}^T} \overrightarrow{\eta_i}) \overrightarrow{\eta_i} + \frac{1}{\rho_i} \overrightarrow{V_{P_i}} \quad (5.21)$$

Donc (en remplaçant l'équation (5.21) dans l'équation (5.17), nous trouvons :

$$\overrightarrow{v_{G2i}} = \left(1 - \frac{l_{2i}}{\rho_i}\right) \overrightarrow{V_{P_i}} + \frac{l_{2i}}{\rho_i} (\overrightarrow{V_{P_i}^T} \overrightarrow{\eta_i}) \overrightarrow{\eta_i} \quad (5.22)$$

$$\overrightarrow{v_{G2i}^T} = \left(1 - \frac{l_{2i}}{\rho_i}\right) \overrightarrow{V_{P_i}^T} + \frac{l_{2i}}{\rho_i} \overrightarrow{\eta_i}^T \overrightarrow{\eta_i} \overrightarrow{V_{P_i}} \quad (5.23)$$

### 5.9.2.1 Calcul de $V_{P_i}$ Dans le repère du segment $\{R_s\}$

Soit  ${}^bR_s$  la matrice de passage du repère  $\{R_s\}$  du segment au repère base  $\{R_b\}$  telle que :

$${}^bR_s = \begin{bmatrix} c\gamma_{zi} & c\gamma_{yi} & -s\gamma_{zi} & c\gamma_{zi} & s\gamma_{yi} \\ s\gamma_{zi} & c\gamma_{yi} & c\gamma_{zi} & s\gamma_{zi} & s\gamma_{yi} \\ -s\gamma_{yi} & 0 & c\gamma_{yi} & & \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Les coordonnées du vecteur unitaire  $\vec{\eta}_i$  de l'axe  $\overrightarrow{B_iZ_i}$  dans le repère du segment  $\{R_s\}$  sont  $[0 \ 0 \ 1]^T$ . En utilisant la matrice  ${}^bR_s$ , nous obtenons :

$$[\vec{\eta}_i]_b = {}^bR_s \begin{bmatrix} \eta_{xi} \\ \eta_{yi} \\ \eta_{zi} \end{bmatrix} = {}^bR_s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$[\vec{\eta}_i]_b = \begin{bmatrix} c\gamma_{zi} & c\gamma_{yi} \\ s\gamma_{zi} & c\gamma_{yi} \\ c\gamma_{yi} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Telle que :

$$\begin{cases} s\gamma_{yi} = \sqrt{\eta_{xi}^2 + \eta_{yi}^2} \\ c\gamma_{yi} = \eta_{zi} \\ s\gamma_{zi} = \frac{\eta_{yi}}{s\gamma_{yi}} \\ c\gamma_{zi} = \frac{\eta_{xi}}{s\gamma_{yi}} \end{cases}$$

En remplaçant (5.26) dans (5.24) nous trouvons l'expression de la matrice  ${}^bR_s$  :  
D'où l'expression de la vitesse  $\vec{V}_{P_i}$  dans le repère du segment donnée par :

$$[\vec{V}_{P_i}]_s = {}^bR_s^T [\vec{V}_{P_i}]_b \quad (5.27)$$

### 5.9.2.2 Calcul de la vitesse $[V_{P_i}]_b$

$$\frac{d(\overrightarrow{B_iP_i})}{dt} = \frac{d(B_iO_b + O_bO_n + O_nP_i)}{dt} = \frac{d(-{}^bB_i + {}^b r + R {}^nP_i)}{dt} \quad (5.28)$$

$$\vec{V}_{P_i} = \vec{b}\dot{r} + \dot{R} \overrightarrow{O_nP_i} = \vec{b}\dot{r} + R ({}^p\omega_{na} \wedge \overrightarrow{O_nP_i}) \quad (5.29)$$

### 5.9.2.3 Détermination de ${}^p\omega_{na}$

En appliquant la loi de composition des vitesses, nous obtenons :

$${}^b\omega_{na} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\psi} + R_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} + R_\psi R_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\phi} \quad (5.30)$$

$${}^b\omega_{na} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\psi & s\psi c\theta \\ 0 & s\psi & c\psi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = M_1 \Omega \quad (5.31)$$

Dans le repère de la plateforme mobile  $\{R_n\}$  s'écrit :

$${}^p\omega_{na} = R^T {}^b\omega_{na} = R^T M_1 \Omega \quad (5.32)$$

Nous remplaçons (5.32) dans (5.29), nous trouvons :

$$\overrightarrow{V_{P,i}} = \overrightarrow{b_{\dot{r}}} - R (\overrightarrow{O_n P_i} \wedge \overrightarrow{\omega_{na}}) = \overrightarrow{b_{\dot{r}}} - R (\tilde{P}_i R^T M_i \overrightarrow{\Omega}) \quad (5.33)$$

$$\overrightarrow{V_{P,i}} = [I_3 - R \tilde{P}_i R^T M_i] \begin{bmatrix} \overrightarrow{b_{\dot{r}}} \\ \overrightarrow{\Omega} \end{bmatrix} = [I_3 - R \tilde{P}_i R^T M_i] \dot{X} \quad (5.34)$$

$$\overrightarrow{V_{P,i}} = [I_3 - R \tilde{P}_i R^T M_i] J \dot{\rho} = J_i \dot{\rho} \quad i = 1, \dots, 6 \quad (5.35)$$

Avec :  $\overrightarrow{O_n P_i} = \begin{bmatrix} r_n \cos(\beta_i) \\ r_n \sin(\beta_i) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \end{bmatrix}$  et  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & -P_{zi} & P_{yi} \\ P_{zi} & 0 & -P_{xi} \\ -P_{zi} & P_{yi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & P_{yi} \\ 0 & 0 & -P_{xi} \\ -P_{zi} & P_{yi} & 0 \end{pmatrix}$

### 5.9.2.4 Calcul de $\omega_{a,i}$ dans le repère du segment $\{R_s\}$

La vitesse de rotation du segment dans le repère des segments est :

$$\overrightarrow{\omega_{a,i}} = \frac{1}{\rho_i} \begin{bmatrix} V_{Pxi} \\ V_{Pyi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Sous forme matricielle :

$$\overrightarrow{\omega_{a,i}} = \frac{1}{\rho_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} {}^b R_s^T [\overrightarrow{V_{P_i}}]_b \quad (5.37)$$

$$\overrightarrow{\omega_{a,i}} = D_i [\overrightarrow{V_{P_i}}]_b \quad (5.38)$$

D'où :

$$\overrightarrow{\omega_{a,i}}^T = [\overrightarrow{V_{P_i}}]_b^T D_i^T \quad (5.39)$$

En remplaçant (5.22), (5.23), (5.38) et (5.39) dans (5.15) nous trouvons après développement :

$$T_{pis,i} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{V_{P_i}}^T m_{pis,i} (1 - \frac{l_{i2}}{\rho_i})^2 \overrightarrow{V_{P_i}} + \dot{\rho} \frac{l_{i2}}{\rho_i} (2 - \frac{l_{i2}}{\rho_i}) \dot{\rho}_i + \overrightarrow{V_{P_i}}^T D_i^T I_{pis,i} D_i \overrightarrow{V_{P_i}}] \quad (5.40)$$

### 5.9.3 Calcul de l'énergie cinétique du cylindre

Nous notons ici que le cylindre fixé au point  $B_i$  possède uniquement un mouvement en rotation, donc une énergie cinétique seulement en rotation :

$$T_{cyl,i} = \frac{1}{2} \omega_{a,i}^T I_{cyl,i} \omega_{a,i} = \frac{1}{2} \overrightarrow{V_{P_i}}^T I_{cyl,i} D_i \overrightarrow{V_{P_i}} \quad (5.41)$$

### 5.9.4 Calcul de l'énergie cinétique de chaque actionneur $i$

L'énergie cinétique de l'actionneur  $i$  est donnée par :

$$T_{a,i} = T_{cyl,i} + T_{pis,i} = \frac{1}{2} [ \overrightarrow{V_{P_i}}^T a_i \overrightarrow{V_{P_i}} + \dot{\rho} b_i \dot{\rho}_i + \overrightarrow{V_{P_i}}^T c_i \overrightarrow{V_{P_i}} ] \quad (5.42)$$

avec :  $a_i = m_{pis,i}(1 - \frac{l_{i2}}{\rho_i})^2$   $b_i = \frac{l_{i2}}{\rho_i}(2 - \frac{l_{i2}}{\rho_i})$   $c_i = D_i^T (I_{pis,i} + I_{cyl,i}) D_i$   
pour les six actionneurs :

$$T_{a,i} = \frac{1}{2} \dot{\rho}^T \left[ \sum_{i=1}^6 J_i^T a_i J_i + b_i I_{6 \times 6} + J_i^T c_i J_i \right] \dot{\rho} \quad (5.43)$$

D'où la matrice d'inertie des 6 actionneurs donnée par :

$$I_a = \sum_{i=1}^6 (J_i^T a_i J_i + b_i I_{6 \times 6} + J_i^T c_i J_i) \quad (5.44)$$

### 5.9.5 Calcul de l'énergie cinétique de la plateforme mobile

$$T_p = \frac{1}{2} {}^b \dot{r} m_{na} {}^b \dot{r} + \frac{1}{2} {}^p \omega_{na}^T I_{na} {}^p \omega_{na} \quad (5.45)$$

$$T_p = \frac{1}{2} {}^b \dot{r} m_{na} {}^b \dot{r} + \frac{1}{2} \Omega^T R M_1^T I_{na} R^T M_1 \Omega \quad (5.46)$$

$$T_p = \frac{1}{2} \dot{X}^T \begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \dot{X} \quad (5.47)$$

$$T_p = \frac{1}{2} \dot{\rho}^T (J^T \begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} J) \dot{\rho} \quad (5.48)$$

où :

${}^p \omega_{na}$  : Vitesse de rotation de la plate forme exprimée dans le repère de la plateforme mobile  $R_n$ .

$$M_p = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$m$  : Masse de la plateforme mobile

$I_p = R M_1^T I_{na} R^T M_1$  : Tenseur d'inertie de la plateforme mobile,

$$I_{na} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

### 5.9.6 Calcul de l'énergie cinétique du système

$$T = \sum_{i=1}^6 T_{a,i} + T_p \quad (5.51)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\rho}^T (I_a + J^T \begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} J) \dot{\rho} \quad (5.52)$$

D'où la matrice d'inertie du système :

$$I_M = I_a + J^T \begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

## 5.10 Formulation du problème d'optimisation

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver un vecteur optimal } P^* \text{ qui :} \\
 \min F(P) = \min \begin{bmatrix} f_1 = \eta_J \\ f_2 = \eta_M \end{bmatrix} \\
 \text{sous les contraintes :} \\
 660 \leq \rho_i (\text{mm}) \leq 1091 \\
 \text{dist}(A_j B_j, A_{j+1} B_{j+1}) \geq 90 \text{ mm} \\
 \frac{-\pi}{9} \leq \psi \text{ (Angle Roll)} \leq \frac{\pi}{9} \\
 \frac{-\pi}{18} \leq \theta \text{ (Angle Pitch)} \leq \frac{\pi}{18} \\
 \frac{-\pi}{18} \leq \phi \text{ (Angle Yaw)} \leq \frac{\pi}{18} \\
 m \text{ (masse de la plateforme mobile + la charge)} = 100 \text{ kg} \\
 m_{pis,i} \text{ (masse de la tige de chaque actionneur)} = 12 \text{ kg} \\
 m_{cyl,i} \text{ (masse du cylindre de chaque actionneur)} = 18 \text{ kg} \\
 I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = 36 \text{ kg.m}^2 \\
 \text{pour le tout } i = 1, \dots, 6 \text{ et } j = 1, \dots, 5
 \end{array} \right. \quad (5.54)$$

## 5.11 Résultats et discussion

La figure 5.5 représente le paramétrage de la plateforme 6-*ddl* UPS, les positions des points d'attache des segments sur la base sont représentés par  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ . Ces points sont séparés par les angles  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ . Les positions des points d'attache des segments à la plateforme mobile sont représentés par  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ . Ils sont séparés par les angles  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ . Avec ce paramétrage l'évitement des interférences

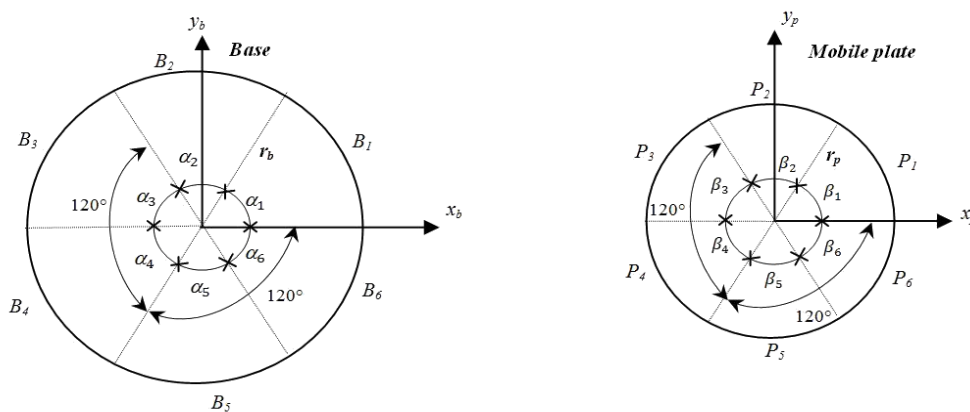


Figure 5.5- Paramétrage de la plateforme de Gough-Stewart type UPS 6-*ddl*.

des segments est pris en compte. D'où le vecteur des paramètres géométriques à optimiser donné par :  $P = [r_b, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, r_p, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6]^T$

Selon les intervalles d'appartenance des angles  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ , nous pouvons distinguer 3 cas de paramétrage pour avoir les 3 architectures remarquables [Merlet, 2006] :

- SSM (Simplified Symetric Manipulator),
- TSSM (Triangular Simplified Symetric Manipulator),
- MSSM (Minimal Simplified Symetric Manipulator).

et les comparer entre elles par la suite.

### 5.11.1 Premier cas

$$\alpha_i \in [(i-1)\frac{\pi}{3}, i\frac{\pi}{3}] \text{ and } \beta_i \in [(i-1)\frac{\pi}{3}, i\frac{\pi}{3}] \quad i = 1, \dots, 6$$

Ce paramétrage permet d'avoir deux points confondus soit sur la base soit sur la plateforme mobile, autrement dit, il permet d'avoir une base ou une plateforme mobile de forme triangulaire. Le vecteur des paramètres optimisé  $P_1^*$  est choisi à partir du front de Pareto (figure. 5.12) :

$$\begin{aligned} P_1^* &= [r_b, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, r_b, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6]^T \\ &= [0.450 \text{ m}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi, \pi, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 0.240 \text{ m}, 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi]^T \end{aligned}$$

Les figures (5.6, 5.7) représentent la forme de la plateforme 6-ddl UPS obtenue avec le vecteur optimisé  $P_1^*$ . Nous remarquons que, pour la base, les points d'attache ( $B_1, B_2$ ), ( $B_3, B_4$ ) et ( $B_5, B_6$ ) sont consécutivement confondus, ainsi que pour la plateforme mobile les points d'attache ( $P_1, P_6$ ), ( $P_2, P_3$ ) et ( $P_4, P_5$ ) sont consécutivement aussi confondus. L'architecture obtenue est de type MSSM (Minimal Simplified Symetric Manipulator) dont les pieds des chaînes cinématiques forment un triangle sur la base aussi bien que sur la plateforme mobile.

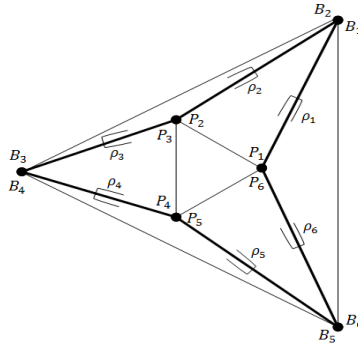


Figure 5.6- Représentations des points d'attache avec le 1<sup>er</sup> paramétrage.

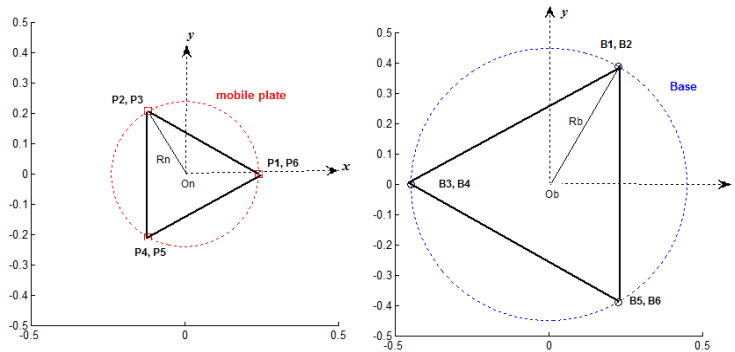


Figure 5.7- Positions des points d'attache des actionneurs à la base et à la plateforme mobile.

### 5.11.2 Deuxième cas

$$\alpha_i \in [(i-1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, i\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{18}] \text{ and } \beta_i \in [(i-1)\frac{\pi}{3}, i\frac{\pi}{3}] \text{ } i = 1, \dots, 6$$

Ce paramétrage permet d'avoir deux points confondus uniquement sur la plateforme mobile et ne laisse aucune chance d'avoir une base de forme triangulaire (pour ne pas inclure les résultats du 1er cas). Autrement dit, il permet d'avoir une base de forme hexagonale et la possibilité d'avoir une plateforme mobile de forme triangulaire. Le vecteurs des paramètres géométriques  $P_2^*$  est choisi à partir du front de Pareto (figure 5.12) :

$$\begin{aligned} P_2^* &= [r_b, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, r_b, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6]^T \\ &= [0.450 \text{ m}, \frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}, 0.240 \text{ m}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi, \pi, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]^T \end{aligned}$$

Les figures (5.8, 5.9) représentent la forme de la plateforme de 6-ddl UPS obtenue avec le vecteur optimisé  $P_2^*$ . Nous remarquons pour la plateforme mobile que les points d'attache ( $P_1, P_2$ ), ( $P_3, P_4$ ) et ( $P_5, P_6$ ) sont consécutivement confondus. L'architecture obtenue de type TSSM (Triangular Simplified Symetric Manipulator) ; elle a une base de forme hexagonale et plateforme mobile de forme triangulaire.

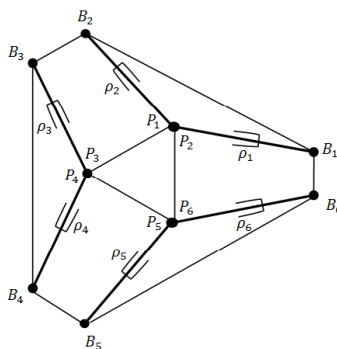


Figure 5.8- Représentations des points d'attache avec le 2<sup>eme</sup> paramétrage.

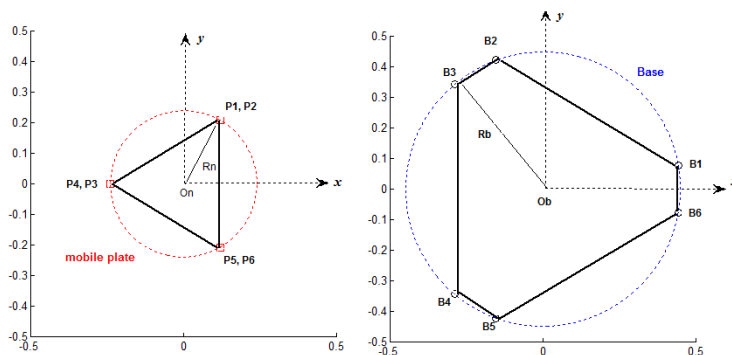


Figure 5.9- Positions des points d'attache des actionneurs à la base et à la plateforme mobile.

### 5.11.3 Troisième cas

$$\alpha_i \in \left[ (i-1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, i\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{18} \right] \text{ and } \beta_i \in \left[ (i-1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, i\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{18} \right] \quad i = 1, \dots, 6$$

Ce paramétrage ne permet pas d'avoir une base ou une plateforme mobile de forme triangulaire (pour ne pas inclure les résultats des 1er et 2ème cas). Autrement dit, il permet d'avoir uniquement une forme hexagonale soit pour la base soit pour plateforme mobile. Le vecteurs des paramètres géométriques  $P_3^*$  est choisi à partir du front de Pareto (figure 5.12) :

$$\begin{aligned} P_3^* &= [r_b, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, r_b, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6]^T \\ &= \left[ 0.450 \text{ m}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{19\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}, \frac{31\pi}{18}, 0.240 \text{ m}, \frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{35\pi}{18} \right]^T \end{aligned}$$

Les figures (5.10, 5.11) représentent la forme de la plateforme 6-*ddl* UPS obtenue avec le vecteur optimisé  $P_3^*$ . L'architecture obtenue de type SSM (Simplified Symetric Manipulator) ; elle a une base et une plateforme mobile de forme hexagonale.

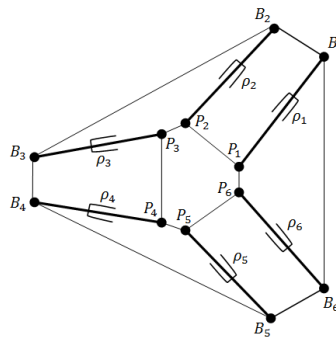


Figure 5.10- Représentations des points d'attache avec le 3<sup>ème</sup> paramétrage.

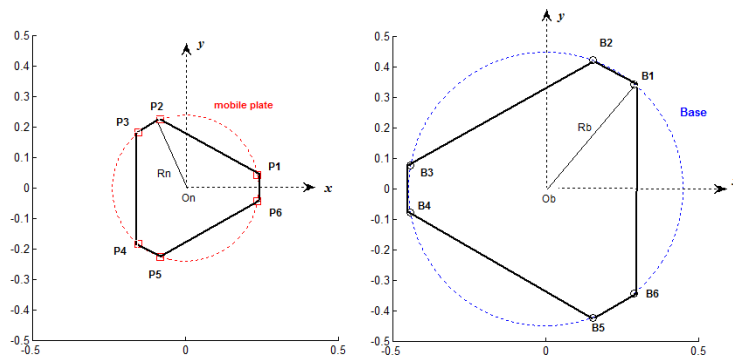


Figure 5.11- Positions des points d'attache des actionneurs à la base et à la plateforme mobile.

### 5.11.4 Comparaison entre les architectures obtenues

La figure 5.12 représente les 3 fronts de Pareto des 3 paramétrages (3 cas). Nous remarquons que le meilleur compromis est obtenu avec l'architecture MSSM ensuite la TSSM et enfin avec la SSM.

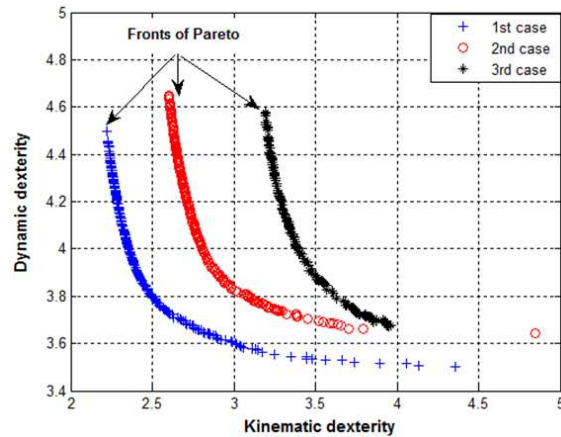


Figure 5.12- *Fronts de Pareto.*

### 5.11.5 Comparaison avec d'autres résultats

Afin d'évaluer la méthodologie proposée, nous l'avons comparé avec d'autres résultats obtenus par les travaux de [Z. Gao, 2010] et [Y. Lou, 2008]. Dans leur travail [Z. Gao, 2010], ils ont utilisé une optimisation multiobjectif d'une plateforme 6-*ddl* en prenant la rigidité et la dextérité comme des fonctions objectif. Ils ont utilisé une technique d'optimisation basée sur l'intelligence artificielle (the neural network-based standard back-propagation learning algorithm and the Levenberg-Marquardt algorithm) pour résoudre le problème. Ils ont converti le problème d'optimisation multiobjectif en un problème d'optimisation monoobjectif par l'utilisation de la méthode d'agrégation des fonctions objectif (pondération). Cette conversion du problème présente quelques inconvénients. En particulier, elle n'est pas adaptée aux espaces non convexes ce qui pose un problème de convergence de la méthode vers l'optimum global [Collette and Siarry, 2002].

Dans le même contexte, Yunjiang [Y. Lou, 2008] a utilisé l'approche  $\varepsilon$ -contraintes pour résoudre le problème de la synthèse dimensionnelle de la plateforme de Gough-Stewart. Dans cette approche, il n'y a pas d'agrégation des fonctions objectif (critères de performance). Il y a uniquement une seule fonction objectif à optimiser, et les autres fonctions objectif sont transformées en contraintes ( $\varepsilon$ ). Il a utilisé l'espace de travail régulier effectif comme une fonction objectif à optimiser et il a transformé les autres critères (la dextérité cinématique en rotation et en position) en contraintes d'inégalité. Néanmoins, le problème avec cette méthode réside dans le choix des valeurs désirées des  $\varepsilon$  pour assurer une solution faisable. Le tableau 5.1 regroupe les résultats obtenus avec [Z. Gao, 2010] et [Y. Lou, 2008] et les notre.

Bien que les résultats présentés dans le tableau 5.1 ne soient pas obtenus dans les mêmes conditions (courses des actionneurs), ils nous permettent d'avoir une idée générale sur la robustesse de chaque approche.

	Base						
Paramètres	$r_b(m)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$
Résultats obtenus par [Z. Gao, 2010]	0,20928	18°	102°	138°	222°	268°	-18°
Résultats obtenus par [Y. Lou, 2008]	0,6153	0°	0°	120°	120°	240°	240°
Nos résultats	0,4500	60°	60°	180°	180°	300°	300°
	Plateforme mobile						
Paramètres	$r_p(m)$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
Résultats obtenus par [Z. Gao, 2010]	0,10	48°	72°	168°	192°	288°	-48°
Résultats obtenus par [Y. Lou, 2008]	0,0631	-60°	60°	60°	180°	180°	-60°
Nos résultats	0,2400	0°	120°	120°	240°	240°	0°

Tableau 5.1- *Comparison avec d'autres résultats.*

Nous remarquons que les résultats obtenus avec [Y. Lou, 2008] et nos résultats prouvent que l'architecture MSSM est meilleure que les autres architectures (SSM et TSSM) si nous prenons la dextérité comme une des fonctions objectif à optimiser. Toutefois, les résultats obtenus avec [Z. Gao, 2010] ne sont pas très précis, ceci est dû que la technique utilisée pour la résolution du problème d'optimisation. En effet, elle n'assure pas de bons résultats. Par contre, notre approche garantit de bons résultats car elle surmonte les difficultés rencontrées avec les autres approches comme l'obstacle des minima (maxima) locaux.

## 5.12 Conclusion

Pour tester l'efficacité de la méthodologie que nous proposons, nous l'avons appliqué sur une architecture plus compliquée, qui est la plateforme de type Gough-Stewart (6-*ddl* UPS) afin de déterminer les paramètres architecturaux (positions des points d'attaches des actionneurs à la base et à la plateforme mobile ainsi que les rayons de la base et la plateforme mobile). Pour ce faire 3 types de paramétrages géométriques de la plateforme ont été proposés. Pour chaque cas nous avons obtenu un vecteur de paramètres architecturaux optimisés associé au front de Pareto, ce qui nous a permis de faire une comparaison entre les 3 types d'architecture obtenues. Nous avons constaté que le meilleur compromis est obtenu avec l'architecture MSSM ensuite avec l'architecture TSSM et enfin avec l'architecture SSM.

Vue la difficulté technologique de la réalisation des architectures de type MSSM ou TSSM, nous recommandons que les structures SSM soient réalisées de sorte que l'angle entre deux points adjacents (confondus dans le cas des MSSM ou TSSM) soit le plus petit possible pour avoir des meilleures performances.

L'approche proposée a permis effectivement de déterminer une bonne approximation de l'intégralité du compromis (front de Pareto) entre les différents critères de performances (parfois antagonistes). Ceci qui est très difficile à obtenir avec les méthodes classiques qui ne peuvent pas prendre en considération tous ces critères à la fois.



# Conclusion générale

Le dimensionnement optimal des robots parallèles est un problème fondamental en robotique. Ce dimensionnement optimal (détermination des paramètres géométriques) est nécessairement un problème multicritère car il fait intervenir de façon complexe de nombreux critères de performances tels que l'espace de travail, les performances cinématiques, la rigidité et les performances dynamiques. Par ailleurs, très peu de travaux de recherches ont été consacrés au dimensionnement optimal des robots parallèles dans le cas multicritère et ce à cause de la complexité de ce problème tant sur l'aspect conceptuel que mathématique.

Tenant compte des raisons invoquées, nous nous sommes fixés pour objectif principal dans cette thèse de proposer une méthodologie et sa mise en oeuvre pratique pour la détermination des paramètres architecturaux des robots pleinement parallèles dans le cas multicritère. Une attention particulière est portée à la conception optimale de machines-outils à cinématique parallèle (synthèse dimensionnelle des PKMs) qui requièrent une précision et une vitesse élevées ainsi qu'un grand espace de travail.

Une analyse approfondie de ce problème nous a permis d'analyser les critères de performances, les contraintes, et les fonctions à optimiser dans ce contexte. Une adaptation et une homogénéisation des critères de performances a été effectuée rendant possible l'expression de ce problème dans le cadre d'une formulation en termes d'optimisation multiobjectif sous contraintes.

Ensuite, une analyse des méthodes mathématiques du problème multiobjectif sous contraintes a été conduite. Elle a permis de sélectionner les algorithmes génétiques de type SPEA-II ou NSGA-II qui ont permis de contourner les problèmes auxquels se heurtent les méthodes classiques comme la non convexité de l'espace des solutions réalisables et la présence des extremums locaux.

La méthodologie proposée est organisée comme suit :

1. *Choix de l'architecture mécanique*
2. *Modélisation géométrique de l'architecture mécanique choisie*
3. *Etude de l'espace de travail*
4. *Modélisation cinématique*
5. *Homogénéisation de la matrice jacobienne  $J$*
6. *Etude des singularités*
7. *Détermination de la matrice de rigidité du système*
8. *Calcul de la matrice de masse (inertie) du système*

9. *Evaluation des critères de performances*
10. *Définition des contraintes liées à la structure mécanique choisie*
11. *Formulation mathématique du Problème d'Optimisation MultiObjectif P.O.M.O*
12. *Application de l'algorithme génétique SPEA-II ou NSGA-II pour la résolution du problème*
13. *Choix du vecteur de paramètres géométriques optimisé à partir des fronts Pareto obtenus*

Pour tester l'efficacité de la méthodologie proposée, nous l'avons appliquée sur deux PKMs différentes l'une à 3 ddl (le robot parallèle Delta linéaire 3 axes) et l'autre à 6 ddl (la plateforme de type Gough-Stewart). Pour la première PKM, nous avons établi la formulation mathématique du problème d'optimisation en définissant les fonctions objectif à partir des critères de performance, et en tenant compte des différentes contraintes relatives à l'architecture de la PKM. Nous avons considéré les paramètres géométriques du robot comme variables de décision. Nous avons adopté comme approche de résolution l'algorithme génétique SPEA-II. L'approche proposée a permis effectivement de déterminer une bonne approximation de l'intégralité du compromis (front de Pareto) entre les différents critères de performances parfois antagonistes entre eux (l'espace de travail vs les performances cinématique et dynamique). Par conséquent, nous avons obtenu les vecteurs des paramètres géométriques optimaux associés, ce qui très difficile à obtenir avec les méthodes classiques qui ne peuvent pas prendre en considération tous ces critères à la fois. En effet, le vecteur optimisé des paramètres géométriques est déterminé à partir du compromis obtenu entre les différents objectifs qui contient les meilleures solutions. Dans notre cas, nous avons privilégié d'avoir de meilleures performances cinématiques et dynamiques. Nous notons ici que le choix final (décision) est effectué selon les préférences du concepteur ou de l'utilisateur.

La deuxième PKM est une architecture plus compliquée (la plateforme de Gough-Stewart 6 axes). Le but poursuivi est la détermination des paramètres architecturaux (positions des points d'attaches des actionneurs à la base et à la plateforme mobile ainsi que les rayons de la base et la plateforme mobile). Pour ce faire 3 types de paramétrages géométriques de la plateforme ont été proposés, pour chaque cas nous avons obtenu un vecteur de paramètres architecturaux optimisés associé au front de Pareto. Ceci nous a permis d'établir une comparaison entre les 3 types d'architectures obtenues. Nous avons constaté que le meilleur compromis est obtenu avec l'architecture MSSM ensuite avec l'architecture TSSM et enfin avec l'architecture SSM. Cependant, compte tenu de la difficulté technologique de la réalisation des architectures de type MSSM ou TSSM, nous recommandons que les structures SSM soient réalisées de sorte que l'angle entre deux points adjacents (confondus dans le cas des MSSM ou TSSM) soit le plus petit possible pour avoir des meilleures performances.

L'analyse de ces structures à complexité croissante, nous a permis de vérifier que la méthodologie proposée est exploitable dans le cas des robots pleinement parallèles. D'autre part, nous remarquons, que le choix éventuel de la solution appropriée par le concepteur (cahier des charges), présente une étape très importante, vu que les critères de performances sont parfois antagonistes entre eux (l'espace de travail vs les performances cinématique et dynamique) et ainsi pour les problèmes d'optimisation multiobjectif, il n'y a pas une solution optimale unique, mais un ensemble de solutions dont aucune ne peut

être identifiée comme étant la meilleure sans introduire un nouveau critère de classification (par exemple : la préférence du concepteur pour un des objectifs).

Par ailleurs, nous avons constaté que la transformation du problème d'optimisation multiobjectif en un problème monoobjectif est possible. Elle permet d'avoir une seule solution pseudo-optimale (un seul vecteur de paramètres géométrique optimisé), mais elle nécessite *a priori* une connaissance parfaite du problème de dimensionnement de la PKM (risque de perte des solutions optimales). Par contre, avec l'optimisation multiobjectif, l'intervention du concepteur (utilisateur) pour choisir le vecteur de géométrie optimisé, viendra *a posteriori* car nous obtenons un ensemble de solutions optimales, dont aucune ne peut être identifiée comme étant la meilleure sans introduire un nouveau critère de classification (la préférence du concepteur pour un des objectifs).

## Perspectives

Comme suite du présent travail, nous pouvons citer :

1. L'extension des critères aux cinématiques à redondance d'actionnement.
2. L'application de la méthodologie développée pour les machines à cinématique sérielle (robots type série). Notamment, dans le cas où les robots travaillent en coopération, ce qui rend le système équivalent à une machine à chaîne cinématique parallèle dès la mise en contact.
3. La méthodologie développée permet d'avoir un ensemble de solutions optimales. Ceci fait apparaître un nouveau problème, c'est comment choisir la solution optimale finale (un seul vecteur optimisé des paramètres géométriques). Par conséquent, nous suggérons l'introduction d'autres critères qui aident à la décision.
4. La contribution à la résolution des problèmes qui freinent l'exploitation de ce type de machines dans les différents secteurs de l'industrie.



# Publications dans le cadre de cette thèse

## Conférences nationales et internationales

1. KELAIAIA RIDHA, ZAATRI ABDELOUAHEB, Contribution à la conception des machines-outils parallèles, *1er Séminaire National sur la Maintenance et la Sécurité Industrielle*, 11-12 Mars 2007, Université de Skikda.
2. KELAIAIA RIDHA, ZAATRI ABDELOUAHEB, Proposition d'une méthodologie de conception des machines-outils parallèles, *2ème Congrès international : Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques*, 19-21 Mars 2007, Monastir / Tunisie.
3. KELAIAIA RIDHA, ZAATRI ABDELOUAHEB, Apport des architectures parallèles dans la conception des machines-outils à hautes performances, *6èmes Journées de Mécanique de l'Ecole Militaire Polytechnique*, 15 16 Avril 2008, Bordj El Bahri, Alger.
4. KELAIAIA RIDHA, ZAATRI ABDELOUAHEB, Conception optimale des machines-outils à hautes performances *2ème Conférence Internationale sur les Sciences de la Mécanique*, 16-18 Novembre 2008, CISM'08, Oum Elbouaghi, Algérie.
5. KELAIAIA RIDHA, ZAATRI ABDELOUAHEB, Optimisation multicritères d'un robot parallèle à 2 ddls *1<sup>er</sup> Séminaire International sur la Maintenance et la Sécurité Industrielle*, 08-09 Mai 2009, SIMSI'09, Université 20 Août 1955 Skikda, Algérie.
6. KELAIAIA RIDHA, ZAATRI ABDELOUAHEB, Optimisation muliobjectif d'un robot parallèle à 3 ddls, *International Conference On Mechanical Engineering*, November 20-21, 2011, CIGM2011, Université 20 Août 1955 Skikda, Algérie.

## Publications

1. KELAIAIA RIDHA, OLIVIER COMPANYY, ZAATRI ABDELOUAHEB, Multiobjective optimization of a linear Delta parallel robot, *Mechanism and Machine Theory* 50 (2012) 159-178, doi :10.1016/j.mechmachtheory.2011.11.004.
2. KELAIAIA RIDHA, OLIVIER COMPANYY, ZAATRI ABDELOUAHEB, Multiobjective optimization of parallel kinematic mechanisms by the genetic algorithms, doi :10.1017/S0263574711001032. *Robotica*, © Cambridge University Press 2011.
3. KELAIAIA RIDHA, OLIVIER COMPANYY, ZAATRI ABDELOUAHEB, Multiobjective optimization of 6-dof UPS parallel manipulators, *Advanced robotics* to appear in 2012,



# Bibliographie

- [Ait-Ahmed, 1993] Ait-Ahmed, M. (February, 2, 1993). *Contribution à la modélisation géométrique et dynamique des robots parallèles*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.
- [Angeles, 2001] Angeles, J. (2001). *Fundamentals of robotic mechanical systems : Theory, methods, and Algorithms*. Springer-Verlag.
- [Asada, 2006] Asada, H. (2006). A geometrical representation of manipulator dynamics and its application to arm design. *ASME J. Dynam. Sys. Measurement Control*, 105 :131–135, 142.
- [Badescu, 2004] Badescu, Mircea1 ; Mavroidis, C. (2004). Workspace optimization of 3-legged upu and ups parallel platforms with joint constraints. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 126, No.2 :291–300.
- [Bhattacharya et al., 1995] Bhattacharya, S., Htval, H., and A.Gosh (1995). On the optimum design of stewart platform type parallel manipulator. *Robotica*, 13 :133–140.
- [Boudreau and Gosselin, 2001] Boudreau, R. and Gosselin, C. (2001). La synthèse d'une plate-forme de gough-stewart pour un espace atteignable prescrit. *Mechanism and Machine Theory*, 36 :327–342.
- [Boumahrat and Gourdin, 1993] Boumahrat, M. and Gourdin, A. (1993). *Méthodes numériques appliquées*. Office des Publications Universitaires -Algérie-.
- [Chablat, 1998] Chablat, D. (1998). *Domaines d'unicité et parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles*. PhD thesis, Université de Nantes, France.
- [Chablat and Wenger, 2003] Chablat, D. and Wenger, P. (June 2003). Architecture optimization of a 3-dof translational parallel mechanism for machining applications, the orthoglide. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 19, N°3.
- [Chablat et al., 2004] Chablat, D., Wenger, P., Majou, F., and Merlet, J.-P. (2004). An interval analysis based study for the design and the comparison of 3-dof parallel kinematic machines. *International Journal of Robotic Research*, 23 :615–624.
- [Charnes and Cooper, 1961] Charnes, A. and Cooper, W. (1961). *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, volume 1. John Wiley, New York.
- [Clavel, 1988] Clavel, R. (1988). Delta, a fast robot with parallel geometry. *IFR Publication*, pages 91–100.
- [Clavel, 1991] Clavel, R. (1991). *Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté*. PhD thesis, EPFL, Lausanne, Switzerland.
- [Collette and Siarry, 2002] Collette, Y. and Siarry, P. (2002). *Optimisation multiobjectif*. Eyrolles.
- [Company, 2000] Company, O. (2000). *Machines-outils rapides à structure parallèle, Méthodologie de conception, applications et nouveaux concepts*. PhD thesis, Université de MONTPELLIER II.

- [Company and Pierrot, 2002] Company, O. and Pierrot, F. (2002). Modelling and design issues of a 3-axis parallel machine-tools. *Mechanism and Machine theory*, 37 :1325–1345.
- [Deb et al., 2002] Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., and Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : Nsga-ii. *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, 6(2) :182–197.
- [Dobrzanskyj and Freudenstein, 1967] Dobrzanskyj, L. and Freudenstein, F. (1967). Some applications of graph theory to structural analysis of mechanisms. *American Society of Mechanical Engineers-Transactions-Journal of Engineering for Industry*, 89 (1) :153–158.
- [Dombre, 2001] Dombre, E. (2001). *Analyse et modélisation des robots manipulateurs*. Hermès Science Publications. ISBN : 13 : 978-2746203006.
- [Engrand and Mouney, 1998] Engrand, P. and Mouney, X. (mars 1998). Une méthode originale d’optimisation multiobjectif. Technical Report HT-14/97/035/A, Note interne EDF-DER.
- [F. Hao, 2005] F. Hao, J.-P. M. (2005). Multi-criteria optimal design of parallel manipulators based on interval analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 40, N°2 :157–171.
- [Fassi et al., 2005] Fassi, I., Legnani, G., and Tosi, D. (2005). Geometrical conditions for the design of partial or full isotropic hexapods. *Journal of Robotic Systems*, 22(10) :507–518.
- [Freudenstein and Maki, 1979] Freudenstein, F. and Maki, E. (1979). Creation of mechanisms according to kinematic structure and function. *Journal of Environment and Planning*, 6 :375–391.
- [Freudenstein and Woo, 1974] Freudenstein, F. and Woo, L. (1974). *Kinematic structure of mechanisms*. In *Basic questions of Design Theory*.
- [Frisoli, 2000] Frisoli, A., C.-D. S. F. e. B. M. (2000). *Synthesis by screw algebra of translation in-parallel actuated machanisms*. Kluwer Academic Publishers.
- [Glover, 1986] Glover, F. (1986). Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Comput. and Ops. Res.*, 13 (5) :533–549.
- [Goldberg, 1994] Goldberg, D. (1994). *Genetics Algorithms*. Addison Wesley.
- [Gosselin and Angeles, 1990] Gosselin, C. and Angeles, J. (1990). Singularly analysis of closed loop kinematic chains. *ASME J. of Mechanical Design*, 112 no 3 :331–336.
- [Gosselin and Angeles, 1991] Gosselin, C. and Angeles, J. (1991). A global performance index for the kinematic optimisation of robotic manipulators. *Journal of Mechanical Design*, 113 :220–226.
- [Gosselin and Angeles, 1988] Gosselin, C. and Angeles, J. (March 1988). The optimum kinematic design of a planar three-degree-of-freedom parallel manipulator. *ASME Journal of Mechanisms, Transmission, and Automation in design*, 110 :35–41.
- [Gosselin and Lavoie, 1993] Gosselin, C. and Lavoie, E. (August 1993). On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator. *International Journal of Robotic Research*, 12, n° 4 :394–402.
- [Gough, 1956] Gough, V. (1956). Contribution to discussion of papers on research in automotive stability, control and type performance. *Proc.Atuto Div. Inst. Mechanical Engineers*, 2 :1.

- [Han et al., 1989] Han, C., Tesar, D., and Traver, A. (September 1989). The optimum design of a 6 dof fully parallel micromanipulator for enhanced robot accuracy. In *In ASME Design Automation Conf, Montréal*, pages 357–363.
- [Hervé, 1992] Hervé, J.M et Sparacino, F. (1992). Star, a new concept in robotics. In *3rd Int. Workshop on Advances in Robot Kinematics*, pages 180–183.
- [Hervé, 1991] Hervé, J. (1991). structural synthesis of parallel robots generating spatial translation. In *Proceeding of Fifth International Conference on Advanced Robotics*, pages 808–813.
- [Hervé, 1999] Hervé, J. (1999). Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design. *Mechanism and Machine Theory*, 34 (5) :719–730.
- [Holland, 1975] Holland, J. (1975). *Adaptation in natural and artificial system*. Ann Arbor, The University of Michigan Press.
- [Huang., 2004] Huang., T. (2004). Conceptual design and dimensional synthesis of a novel 2-dof translational parallel robot for pick-and-place operations. *Journal of Mechanical Design*, 126 :449–455.
- [Huang et al., 1998] Huang, T., Whitehouse, D., and Jinsong, W. (1998). The local dexterity, optimal architecture and design criteria of parallel machine tools. In *Annals of the CIRP*, volume 47.
- [Hunt, 1978] Hunt, K. (1978). *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford University Press, London.
- [Hunt, 1983] Hunt, K. (1983). Structural kinematics of in-parallel-actuated robot arms. *ASME Journal of Mechanism, Transmission and Automation in Design*, 105, N°4 :705–712.
- [Jinsong and Xiaoqiang, 2003] Jinsong, W. and Xiaoqiang, T. (2003). Analysis and dimensional design of a novel hybrid machine tool. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 43 :647–655.
- [Jun et al., 2008] Jun, W., W.Jinsong, Tiemin, L., Liping, W., and Guan, L. (2008). Dynamic dexterity of a planar 2-dof parallel manipulator in a hybrid machine tool. *Robotica*, 26 :93–98.
- [Khalil and Dombre, 2002] Khalil, W. and Dombre, E. (2002). *Modeling, Identification and Control of Robots*. Hermes Sciences Europe.
- [Klein and Blaho, 1987] Klein, C. and Blaho, B. (1987). Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators. *International Journal of Robotic Research*, 6 no 2 :72–83.
- [Kong, 2001] Kong, X. et Gosselin, C. (2001). Generation of parallel manipulators with three translational degrees of freedom based on screw theory. In In agency, T.C.S., e., editor, *Symposium 2001 sur les mécanismes, les machines et la mécatronique de CCToMM, Canada*.
- [Koteswara et al., 2003] Koteswara, A., Rao, P., and Saha, S. (2003). Workspace and dexterity analyses of hexaslide machine tools. In *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Taipei, Taiwan*, pages 14–19.
- [Krut, 2003] Krut, S. (2003). *Contribution à l'étude des robots parallèles légers, 3T-1R et 3T-2R, à forts débattements angulaires*. PhD thesis, Université de MONTPELLIER II, France.

- [Ledermann, 1973] Ledermann, W. (1973). *Introduction to group theory*. Longman, London.
- [Leguay-Durand, 1997] Leguay-Durand, S. et Reboulet, C. (1997). Design of a 3-dof parallel translating manipulator with u-p-u joints kinematic chains. In *Proceedings of the 1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robot ans Systems. IROS '97*, pages 1637–1642.
- [Lin and Chen, 2009] Lin, J. and Chen, C.-W. (2009). Computer-aided-symbolic dynamic modeling for stewart-platform manipulator. *Robotica*, Vol.27 :331–341.
- [Liu and Wang., 2007] Liu, X.-J. and Wang., J. (2007). A new methodology for optimal kinematic design of parallel mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 42, No.9 :1210–1224.
- [MA and Angeles, 1993] MA, O. and Angeles, J. (1993). Optimal design of manipulator under dynamic isotropy conditions. In *Proceeding of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta Georgia.,* pages 470–475.
- [MacCallion and Pham, 1979] MacCallion, H. and Pham, D. (1979). The analysis of six-degree-of-freedom work station for mechanized assembly. In *proceeding of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanism, Montréal.*
- [Majoux, 2004] Majoux, F. (2004). *Analyse cinétostatique des machines parallèles à translation*. PhD thesis, Ecole centrale de Nante, France.
- [Merlet, 1993] Merlet, J.-P. (1993). Direct kinematics of parallel manipulators. *IEEE transactions on robotics and automation*, Vol.9, No. 6 :842–846.
- [Merlet, 1997] Merlet, J.-P. (1997). Designing a parallel manipulator for a specific workspace. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 16 (4) :545–556.
- [Merlet, 2006] Merlet, J.-P. (2006). *Parallel robots*. Springer, second edition.
- [Miller., 2004] Miller., K. (2004). Optimal design and modeling of spatial parallel manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 23, No.2 :127–140.
- [Neumann, 1988] Neumann, K. (22 Mars 1988). Robot. *United States Patent n° 4,732,525, Neos Product HB Norrtalje SuÈde.*
- [Patel and Ehmann, 1997] Patel, A. and Ehmann, K. (1997). Volumetric error of a stewart platform-based machine tool. In *Ann. CIRP 46*, pages 287–290.
- [Pierrot, 1991] Pierrot, F. (1991). *Robots pleinement parallèles légers : conception, modélisation et commande*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université Montpellier II, France.
- [Pierrot et al., 1991] Pierrot, F., Dauchez, P., and Fournier, A. (1991). Hexa : a fast 6-degree of freedom fully parallel robot. *Proceedings of 91 ICAR, International Conference on Advanced Robotics, Pisa, Italy*, 2/2 :1158–1163.
- [Pittens and Podhorodeski, 1993] Pittens, K. and Podhorodeski, R. (1993). A family of platforms with optimal dexterity. *Journal of Robotic System*, 10 no 4 :463–479.
- [Pritschow and Wurst, 1997] Pritschow, K. and Wurst (1997). Systematic design of hexapods and other parallel link systems. In *Annals of the CIRP*, volume 46, no. 1, pages 291–295.
- [Rebai, 2002] Rebai, S. (2002). *Contribution à la planification des mouvements libres des robots manipulateurs*. PhD thesis, Ecole militaire polytechnique, Alger.

- [Ryu and Cha, 2003] Ryu, J. and Cha, J. (2003). Volumetric error analysis and architecture optimization for accuracy of hexaslide type parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 38(3) :227–240.
- [S-D. Stan, 2007] S-D. Stan, R. Balan, V. M. (2007). Multi-objective design optimization of mini parallel robots using genetic algorithms. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pages 2173–2178.
- [Schaffer, 1985] Schaffer, J. (1985). Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. In *In J.J. Grefenstette ed., Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications*, pages 93–100.
- [Schönherr, 2000] Schönherr, J. (September 10-13, 2000). Evaluation and optimum design of parallel manipulators having defined workspace. In *Proceedings of the DECTC, Baltimore, Maryland*, pages 1–9.
- [Stewart, 1965] Stewart, D. (1965). A platform with 6 degrees of freedom. *Proceeding of the Institution of mechanical engineers, London, U.K.*, 180 :371–386.
- [Stock and Miller, 2003] Stock, M. and Miller, K. (2003). Optimal kinematic design of spatial parallel manipulator : Application to linear delta robot. *ASME Journal Of Mechanical Design*, 125 :292–301.
- [Toumi and Asada, 1985] Toumi, Y. and Asada, H. (1985). The design of arm linkages with decoupled and configuration invariant inertia tensors, part i and ii. In *Proc WAM Miami : ASME*, pages 145–161.
- [Ulungu et al., 1999] Ulungu, E., Teghem, J., Fortemps, P., and Tuytens, D. (1999). Mosa method : a tool for solving multiobjective combinatorial optimization problems. *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, 8 (4) :221–236.
- [Valasek, 2005] Valasek, M., S. Z. B. V. e. a. (2005). Tractable treatment of design by multiobjective optimization parallel kinematics case study. *Multibody System Dynamics*, Vol.13 :143–174.
- [Wang and Masory, 1993] Wang, J. and Masory, O. (1993). On the accuracy of a stewart platform - part i. the effect of manufacturing tolerances. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics Automation*, pages 114–120.
- [Weck and Staimer, 2002] Weck, M. and Staimer, D. (2002). Parallel kinematic machine tools -current state and futur potentials. In *Annals of the CIRP*.
- [X.-J. Liu and Wang., 2004] X.-J. Liu, Q.-M. W. and Wang., J. (2004). Kinematics, dynamics and dimensional synthesis of a novel 2-dof translational manipulator. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 41 :205–224.
- [Y. Lou, 2008] Y. Lou, G. Liu, Z. L. (2008). Randomized optimal design of parallel manipulators. *IEEE transactions on automation science and engineering*, Vol. 5, No. 2.
- [Yang and Tzeng, 1986] Yang, D. and Tzeng, S. (1986). Simplification and linearization of manipulator dynamics by the design of inertia distribution. *International Journal of Robotic Research*, 5(3) :120–128.
- [Yoshikawa, 1985a] Yoshikawa, T. (1985a). Dynamic manipulability of robot manipulators. *International Journal of Robotic Research*, 2(1) :113–124.
- [Yoshikawa, 1985b] Yoshikawa, T. (1985b). Manipulability of robotic mechanism. *The International Journal of Robotics Research*, 4(2) :3–9.
- [Yoshikawa, 1990] Yoshikawa, T. (1990). *Foundations of robotics : Analysis and control*. MIT Press, Cambridge, MA.

- [Z. Gao, 2010] Z. Gao, D. Zhang, Y. G. (2010). Design optimization of a spatial six degree-of-freedom parallel manipulator based on artificial intelligence approaches. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 26 :180–189.
- [Zanganeh and Angeles, 1997] Zanganeh, K. and Angeles, J. (1997). Kinematic isotropy and the optimum design of parallel manipulators. *International Journal of Robotic Research*, 16(2) :185–197.
- [Zhang et al., 2002] Zhang, D., Xu, Z., Mechefske, C., and Xi, F. (2002). Design optimization of parallel kinematic toolheads with genetic algorithms. In *3rd Parallel Kinematic Seminar, Chemnitz*.
- [Zitzler et al., 2001] Zitzler, E., Laumanns, M., and Thiele, L. (2001). Spea2 : Improving the strength pareto evolutionary algorithm. Technical Report 103, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), ETH Zurich, Switzerland.

## Annexe A

# Notation des liaisons dans les graphes d'agencement

Les graphes d'agencement représentent la topologie de la structure des robots et mettent en évidence les diverses branches et boucles. Ils permettent de mieux appréhender l'architecture parfois subtile des mécanismes parallèles. Ils ont été proposés par [Pierrot, 1991]. La figure A.1 représente la symbolique utilisée pour ces graphes.

Par contre avec ce type de représentation, les informations concernant l'agencement géométrique des liaisons sont perdues.













Articulation	Passive	Motorisée	Mesurée	Mobilité
Prismatique (glissière)				1 (translation)
Rotoïde (pivot)				1 (rotation)
Universelle (cardan)				2 (rotation)
Sphérique (rotule)				3 (rotation)
<b>Autres composants du robot</b>				
Bâti (base)				
Organe terminal (nacelle)				
Pièce			—	

Figure A.1- *Symboles des graphes d'agencement*



# Annexe B

## Définitions mathématiques

### B.1 Normes matricielles

On appelle norme matricielle [Boumahrat and Gourdin, 1993] sur  $C^{n,n}$  toute application de  $C^{n,n}$  sur  $\mathbb{R}^+$  notée  $A \rightarrow \|A\|$  et telle que :

1.  $\|A\| > 0$  ( $\forall A \neq 0$ )  
 $\|\otimes\| = 0$   $\otimes$  : matrice nulle
2.  $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$
3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4.  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

### B.2 Normes matricielles courantes

Les normes les plus courantes sont :

- $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\text{trace}(A^t A)}$
- $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

### B.3 Conditionnement d'une matrice

Soit  $A$  une matrice inversible et  $Ax = b$  un système linéaire. Étudions la perturbation :

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

où  $\delta A$  et  $\delta b$  sont les perturbations sur  $A$  et  $b$  et  $\delta x$  l'erreur commise sur la résolution du système linéaire et comme  $Ax = b$ , il vient :

$$\delta x = -A^{-1} \delta A (x + \delta x)$$

ce qui implique l'inégalité :

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|x + \delta x\|$$

soit encore :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} = \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

$cond(A)$  : représente le conditionnement de la matrice associée à la norme  $\|A\|$ , il est défini par la relation suivante :

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Le conditionnement de la matrice  $A$  vérifie :

- $cond(\alpha A) = cond(A) \quad \forall A, \alpha \neq 0$
- $cond_2(A) = 1$  si seulement si  $A = \alpha I$  ( $\alpha$  : scalaire,  $I$  : matrice unitaire)

Plus  $cond(A)$  est proche de 1, plus la matrice est bien conditionnée.

## ملخص :

التصميم المثالي لماكنات التصنيع ذات الحركية المتوازية يمر بمرحلتين أساسيتين. المرحلة الأولى تخص التصميم البنيوي، و تسمح مبدئياً بتحديد نوع فصائل البنى الأكثر تناسبا مع التطبيقات المرغوب فيها (مثال : محاكي الطيران، التصنيع بالماكنات ذات السرعة الفائقة، إلخ...) باستعمال تقنيات عديدة كجموعات لي، تقنية العناصر المنتهية، إلخ... المرحلة الثانية تخص التصميم البعدي وتهدف إلى تعيين أبعاد البنية المحددة أثناء مرحلة التصميم البنيوي، هذه المرحلة جد مهمة كون معايير النجاعة لبنية معطاة تتغير بشكل كبير بتغير أبعادها الهندسية.

في هذه الأطروحة، نقدم منهجية من أجل الحصول على الأبعاد الهندسية لماكنة ذات حركية متوازية بحيث أن هذه الاشكالية يعبر عنها بأمتلية متعددة الأهداف آخذين بعين الاعتبار و في أن واحد عدة معايير نجاعة كفضاء عمل الماكنة، النجاعة الحركية، الدقة، الصلابة، النجاعة الديناميكية.

**كلمات مفتاحية :** منهجية التصميم البعدي، معايير النجاعة، أمتلية متعددة الأهداف، ماكنة ذات حركية متوازية، خوارزمية وراثية SPEA-II.

## Résumé –

La conception optimale de machines-outils à cinématique parallèle passe par deux étapes fondamentales. La première concerne la synthèse structurale, elle permet à priori, la détermination du choix des familles des architectures les plus adaptées aux applications désirées (exemple : Simulateurs de vol, l'usinage à grande vitesse, etc.), en faisant appel à plusieurs techniques tel que : théorie des visseurs, les groupes de lie, la théorie de graphes, la méthode des éléments finis. La deuxième concerne la synthèse dimensionnelle et vise la détermination des dimensions de l'architecture retenue lors de la synthèse structurale, cette étape demeure une tâche très importante vue que les critères de performance d'une architecture donnée dépendent très fortement des dimensions de ses paramètres géométriques.

Dans cette thèse, on présente une méthodologie pour l'obtention des paramètres géométriques d'une machine à cinématique parallèle où le problème s'exprime en termes d'optimisation multiobjectif en prenant simultanément en considération plusieurs critères de performances tel que l'espace de travail, les performances cinématiques, la précision, la rigidité, les performances dynamiques, etc.

**Mots clés :** Méthodologie de conception dimensionnelle, critères de performance, optimisation multiobjectif, machines à cinématique parallèle, Algorithme génétique SPEA-II.

## Abstract:

The optimal design of Parallel Kinematic Machine (PKM) goes through two fundamental stages. The first one concerns the structural synthesis. It enables, a priori, to determine the choice of families of the most adapted architectures according to the desired applications such as flight simulators, machine-tools, etc. This can be done by applying several techniques such as: screw theory, Lie groups, graph theory, finite element method, etc. The second one concerns the dimensional synthesis and aims to determine the dimensions of the architecture that has been selected during the structural synthesis. This stage remains a major task because the criteria of performance of a given architecture are strongly dependent on its sizing.

In this paper, we present a dimensioning methodology of the architectural parameters of the PKMs. The problem will be formulated as a multiobjective optimization problem by taking into account simultaneously several criteria of performance such as the workspace, kinetostatic performances, stiffness, dynamic dexterity. The SPEA-II genetic algorithm is adopted to solve this type of multiobjective optimization problem.

**keywords:** Dimensioning methodology, multiobjective optimization, 6-dof UPS parallel manipulators, criteria of performance, genetic algorithm SPEA-II.