

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 20 Août 1955 - Skikda

Faculté de Technologie

Département de Génie Electrique

Référence : D012118020D



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة

كلية التكنولوجيا

قسم الهندسة الكهربائية

المرجع : D012118020D

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de :

**Doctorat en Sciences**

Filière : Electronique

Spécialité : Traitement du signal

Thème

**Traitement d'Images par des Algorithmes  
Basés sur le Calcul Fractionnaire**

Préparée par :

**Mekideche Mohammed**

Sous la direction du Pr. Ferdi Youcef

Soutenue publiquement le 8 Juillet 2018

Devant le jury composé de :

Mr. Goutas Ahcene	MCA	Président	Université Skikda
Mr. Ferdi Youcef	Professeur	Rapporteur	ENSB, U. Constantine III
Mr. Charef Abdelfetah	Professeur	Examineur	Université Constantine I
Mr. Khamadja Mohamed	Professeur	Examineur	Université Oum El-Bouaghi
Mr. Belemguenai Aissa	MCA	Examineur	Université Skikda

Année universitaire 2017-2018

# *DÉDICACES*

*Je dédie ce travail*

*A tous les membres de ma famille et tous mes proches*

*A tous mes collègues et amis*

*A tous ceux qui m'ont aimé et respecté*

*A tous ceux qui m'ont accompagné dans ma vie*

*A tous ceux qui ont pensé de moi et m'ont souhaité du bien*

*A tous ceux qui m'ont aidé et respecté*

*Et à tous ceux qui m'ont encouragé et soutenu.*

# REMERCIEMENTS

*En tout premier lieu, je dois remercier mon Dieu, le clément et le miséricordieux, qui a appris à l'homme ce qu'il ne savait pas, de m'avoir prolongé la vie en me donnant la volonté et la puissance pour l'accomplissement de ce travail.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude envers le directeur de thèse, Monsieur : Ferdi Youcef, Professeur à l'École Nationale Supérieure de Biotechnologie, à l'Université de Constantine III, de m'avoir proposé un tel intéressant thème, concernant, l'application du calcul fractionnaire au traitement d'images. Ainsi, Je tiens à le remercier pour le soutien qu'il a réservé à mon égard durant toute la période de ma recherche doctorale, aussi je le remercie également de son attention pour sa lecture, ses commentaires, et ses conseils qui m'ont permis d'améliorer cette thèse.*

*Aussi, je tiens à exprimer ma gratitude envers les membres du jury d'avoir accepté l'invitation pour contribuer à l'évaluation de cette thèse, pour leur lecture attentive et approfondie de ce manuscrit, ainsi que pour leurs remarques et critiques constructives nécessaires pour l'édition de la version finale de cette thèse.*

*Je remercie également tous les membres de ma famille, mes proches, mes collègues, et mes amis qui m'ont donné le support moral, et tous ceux qui ont de près ou de loin contribué à rendre ce travail possible, que ce soit par des idées, ou par des encouragements.*

*Mekidèche Mohammed*

<b>Table des matières</b>	<b>Pages</b>
<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Traitement d'images basé sur la dérivation entière</b> .....	6
1.1 Introduction .....	6
1.2 Définitions.....	7
1.2.1 Filtrage d'une image.....	7
1.2.2 Filtrage spatial linéaire.....	8
1.2.3 Filtrage fréquentiel.....	8
1.2.4 Les filtres séparables.....	9
1.3 Approximation des dérivées par les différences finies.....	10
1.3.1 Dérivation du premier ordre.....	10
1.3.2 Dérivation du second ordre.....	12
1.4 Utilisation de la dérivation entière en traitement d'images.....	13
1.4.1 Approche du gradient.....	13
1.4.2 Approche du Laplacien.....	15
1.5 Synthèse et utilisation des opérateurs dérivatifs d'ordre entier en traitement d'images	16
1.5.1 Opérateurs dérivatifs du premier ordre.....	16
1.5.2 Opérateurs dérivatifs du second ordre.....	20
1.6 Utilisation des filtres optimaux en traitement d'images.....	22
1.6.1 Critères de Canny.....	22
1.6.2 Filtre de Deriche.....	24
1.6.3 Filtre de Shen-Castan.....	25
1.6.4 Filtre Gaussien.....	26
1.7 Utilisation des équations différentielles d'ordre entier en traitement d'images.....	27
1.7.1 Equation de diffusion isotrope.....	27
1.7.2 Equation de diffusion anisotrope.....	28
1.8 Approches variationnelles en traitement d'images.....	31
1.8.1 Modèle variationnel.....	31
1.8.2 Régularisation.....	32
1.8.3 Contours actifs.....	33
1.9 Concept d'échelle spatiale.....	34
1.10 Conclusion.....	36

<b>Chapitre 2 : Traitement d'images basé sur la dérivation fractionnaire.....</b>	<b>37</b>
2.1 Introduction.....	37
2.2 Définitions.....	38
2.2.1 Euler (1730).....	38
2.2.2 J. B. J. Fourier (1820-1822).....	38
2.2.3 N. H. Abel (1823-1826).....	39
2.2.4 Liouville (1832-1855).....	39
2.2.5 J. F. B. Riemann (1847-1876).....	40
2.2.6 N. Ya. Sonin (1869), A. V. Letnikov (1872), H. Laurent (1884), N. Nekrasove (1888), K. Nishimoto (1987).....	40
2.2.7 Riemann-Liouville.....	40
2.2.8 Grünwald-Letnikov.....	40
2.2.9 M. Caputo (1967).....	41
2.2.10 K. S. Miller, B. Ross (1993).....	41
2.3 Filtrage linéaire par dérivation d'ordre fractionnaire.....	41
2.3.1 Filtrage spatial par convolution.....	41
2.3.2 Filtrage fréquentiel par Transformée de Fourier d'ordre fractionnaire.....	42
2.3.3 Transformée de Fourier d'ordre fractionnaire discrète.....	43
2.3.4 Implémentation de la DFRFT.....	43
2.3.5 Méthode d'application de la DFRFT.....	45
2.4 Synthèse et application des opérateurs dérivatifs d'ordre fractionnaire.....	46
2.4.1 Débruitage de l'image par intégration d'ordre fractionnaire.....	47
2.4.2 Rehaussement de texture basé sur une définition de G-L améliorée.....	51
2.4.3 Rehaussement de texture par différentiation d'ordre fractionnaire de Riesz.....	54
2.4.4 Segmentation robuste par dérivation d'ordre fractionnaire.....	57
2.4.5 Détection des contours par différentiation d'ordre fractionnaire.....	59
2.4.6 Stratégie pour l'augmentation de la sélectivité.....	61
2.4.7 Méthode de réalisation du détecteur CRONE.....	61
2.5 Application des équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire.....	63
2.5.1 Equation de diffusion de la chaleur d'ordre fractionnaire.....	63
2.5.2 Equation de diffusion de la lumière d'ordre fractionnaire.....	67
2.5.3 Equation de diffusion anisotrope.....	69
2.6 Conclusion.....	71

<b>Chapitre 3 : Contribution au traitement d'images basé sur la dérivation fractionnaire.....</b>	<b>72</b>
3.1 Introduction.....	72
3.1.1 Plan de la contribution.....	72
3.1.2 But de la contribution.....	73
3.1.3 Outils d'implémentation et de simulation.....	73
3.2 Définitions.....	74
3.2.1 Définition de Riemann-Liouville.....	74
3.2.2 Définition de Caputo.....	75
3.2.3 Définition de Grünwald-Letnikov.....	75
3.3 Synthèse des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	75
3.3.1 Synthèse par la différence.....	76
3.3.2 Synthèse par la somme.....	78
3.3.3 Synthèse par la somme et rotation.....	80
3.4 Application au filtrage d'images.....	80
3.4.1 Filtrage par masque fractionnaire additif obtenu par rotation.....	81
3.4.2 Filtrage par masque gaussien fractionnaire.....	81
3.4.3 Filtrage par masque de taille variable.....	82
3.4.4 Filtrage par facteur fractionnaire variable.....	84
3.4.5 Filtrage du bruit impulsionnel.....	85
3.5 Application à la détection des contours par l'approche du gradient fractionnaire.....	86
3.5.1 Algorithme original.....	86
3.5.2 Algorithme modifié.....	89
3.5.3 Implémentation et simulation.....	91
3.6 Amélioration des performances.....	93
3.6.1 Optimisation du temps d'exécution.....	93
3.6.2 Optimisation du facteur fractionnaire.....	94
3.6.3 Evaluation des performances.....	94
3.6.4 Test de la robustesse aux bruits.....	95
3.6.5 Effets de la taille du masque sur la détection par gradient fractionnaire.....	96
3.7 Application à la détection multi-échelle des contours.....	97
3.7.1 Algorithme de détection multi-échelles des contours.....	97
3.7.2 Implémentation et simulation.....	98
3.7.3 Rôle du facteur fractionnaire dans la sélectivité des contours.....	99

## Table des matières

---

3.8 Application à la détection des contours par l'approche du Laplacien fractionnaire...	99
3.8.1 Algorithme basé sur le Laplacien d'ordre entier.....	100
3.8.2 Algorithme basé sur le Laplacien d'ordre fractionnaire.....	101
3.8.3 Implémentation et simulation .....	102
3.8.4 Effets de la taille du masque sur la détection par Laplacien fractionnaire.....	102
3.9 Conclusion.....	103
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>104</b>
<b>Bibliographies.....</b>	<b>106</b>

## Liste des Figures

Figure 1.1 : Indexation des positions des pixels.....	12
Figure 1.2 : Direction du gradient.....	14
Figure 1.3 : Effet des opérateurs dérivatifs du premier ordre.....	15
Figure 1.4 : Application de l'opérateur Laplacien.....	16
Figure 1.5 : Application de l'opérateur de Robert.....	17
Figure 1.6 : Composantes du masque de Robert.....	17
Figure 1.7 : Arrangement des pixels d'un voisinage 3x3.....	17
Figure 1.8 : Composantes du masque de Sobel.....	18
Figure 1.9 : Application de l'opérateur de Sobel.....	18
Figure 1.10 : Composantes du masque de Prewitt.....	18
Figure 1.11 : Application de l'opérateur de Prewitt.....	19
Figure 1.12 : Masque de base de type Kirsh.....	19
Figure 1.13 : Application de l'opérateur de Kirsh.....	19
Figure 1.14 : Application de l'opérateur de Robinson.....	20
Figure 1.15 : Masque de base type Robinson.....	20
Figure 1.16 : Composantes du masque Laplacien.....	20
Figure 1.17 : Masques de type Laplacien.....	21
Figure 1.18 : Application de l'opérateur Laplacien.....	21
Figure 1.19 : Masque Laplacien de Robinson.....	21
Figure 1.20 : Application de l'opérateur Laplacien de Robinson.....	22
Figure 1.21 : Application du filtre optimal de Canny.....	24
Figure 1.22 : Application du filtre optimal de Deriche.....	25
Figure 1.23 : Application de l'opérateur LoG.....	26
Figure 1.24 : Effet d'un lissage progressive par EDP de la chaleur.....	28
Figure 1.25 : Effet du filtrage isotrope et anisotrope sur une image.....	31
Figure 1.26 : Evolution d'un contour actif.....	34
Figure 1.27 : Effet d'échelle spatiale sur une image.....	35
Figure 2.1 : Filtrage par rotation à l'aide de la FRFT.....	46
Figure 2.2 : Masques fractionnaires de (a) à (h) dans les 8 directions de $\theta$ .....	51
Figure 2.3 : Débruitage par integration d'ordre fractionnaire à deux paramètres d'une image avec bruit Gaussien de variance 0.05 .....	51
Figure 2.4 : Masque basé sur la définition de G-L améliorée.....	54
Figure 2.5 : Effet d'un masque basé sur la définition de G-L améliorée.....	54

Figure 2.6 : Filtrage avec l’algorithme FCD-1 d’ordre 0.5.....	57
Figure 2.7 : Masque différentiateur d’ordre fractionnaire.....	58
Figure 2.8 : Forme générale du masque différentiateur d’ordre fractionnaire.....	59
Figure 2.9 : Effet de segmentation robuste par dérivation d’ordre fractionnaire avec $r = 0.98$ .....	59
Figure 2.10 : Transition de type parabolique.....	60
Figure 2.11 : Augmentation de la sélectivité par création d’un point de rebroussement....	61
Figure 2.12 : Effet d’un détecteur CRONE pour $n = 0.8$ .....	62
Figure 2.13 : Résultats du filtrage par la méthode de Perona-Malik et la méthode de l’équation de diffusion d’ordre fractionnaire. ....	66
Figure 2.14 : Effet de la déconvolution basée sur la diffusion d’ordre fractionnaire.....	68
Figure 2.15 : Débruitage d’une image par un filtre de diffusion anisotrope d’ordre fractionnaire et par un filtre anisotrope d’ordre non fractionnaire par la méthode de Perona-Malik.....	70
Figure 3.1 : Interface graphique de simulation.....	74
Figure 3.2 : Composantes du masque fractionnaire soustractif.....	78
Figure 3.3 : Composantes du masque fractionnaire additif.....	79
Figure 3.4 : Masque fractionnaire monodimensionnel additif.....	80
Figure 3.5 : Masque fractionnaire additif obtenu par rotation.....	80
Figure 3.6 : Masque fractionnaire additif obtenu par rotation pour $\alpha = -0.5$ .....	81
Figure 3.7 : Masque Gaussien fractionnaire pour $\alpha = -0.5$ .....	82
Figure 3.8 : Images de test avec bruit additif Gaussien de variance 0.01.....	83
Figure 3.9 : Résultats du filtrage par variation du facteur fractionnaire .....	84
Figure 3.10 : Résultats du filtrage du bruit impulsionnel.....	85
Figure 3.11 : Algorithme original .....	86
Figure 3.12 : suppression des non-maxima locaux .....	88
Figure 3.13 : Algorithme modifié .....	89
Figure 3.14 : bloc image de 5x5.....	90
Figure 3.15 : Composantes du masque fractionnaire $h_x$ et $h_y$ .....	90
Figure 3.16 : Résultat de l’algorithme modifié en variant $\alpha$ .....	92
Figure 3.17 : Corrélation de Pearson en fonction de $\alpha$ .....	92
Figure 3.18 : Réponses de l’algorithme original et de l’algorithme modifié .....	93
Figure 3.19 : L’image originale et son contour prototype (Ground Truth) .....	95
Figure 3.20 : Courbe de mesure du <i>PFOM</i> en fonction de $\alpha$ .....	95

## Liste des Figures

---

Figure 3.21 : Réponses des algorithmes original et modifié pour une image bruitée .....	96
Figure 3.22 : Résultats de segmentation par masques de taille variable .....	96
Figure 3.23 : Schéma bloc du détecteur multi-échelles des contours .....	98
Figure 3.24 : Sélectivité des contours pour différentes valeurs de $\alpha$ .....	99
Figure 3.25 : Masque LoG.....	100
Figure 3.26 : Composantes du masque Laplacien d'ordre fractionnaire pour $\alpha = -1.5$ ....	101
Figure 3.27 : Réponse des masques Laplacien et Laplacien d'ordre fractionnaire.....	102
Figure 3.28 : Réponses des différents masques.....	102

## Liste des tableaux

Tableau 3.1 : Résultats du filtrage avec masque 3x3.....	83
Tableau 3.2 : Résultats du filtrage avec masque 5x5.....	83
Tableau 3.3 : Résultats du filtrage avec masque 7x7.....	83
Tableau 3.4 : Résultats de filtrage par variation du facteur fractionnaire.....	84
Tableau 3.5 : Résultats du filtrage du bruit impulsionnel.....	85
Tableau 3.6 Résultats de segmentation par masques de taille variable.....	96

# Introduction Générale

- **Définition**

Le traitement d'images est un sous-ensemble du traitement du signal dédié aux images de toutes sortes, et aux données dérivées comme la vidéo. Dans le contexte de la vision artificielle, le traitement d'images se place après les étapes d'acquisition par camera ou scanners, et de numérisation par échantillonnage et quantification. On classe généralement les opérateurs de traitement d'images en différentes familles. Ce classement se fait, en fonction des informations qu'ils acceptent en entrée et qu'ils fournissent en sortie, et en fonction des transformations qu'ils font subir aux données. Ainsi, par exemple on distingue : Les opérateurs manipulant une image à l'entrée et délivrant une image en sortie comme les opérateurs de filtrage, les opérateurs qui transforment l'image en un ensemble d'informations comme les opérateurs de segmentation, et les opérateurs qui transforment un ensemble d'information en une image comme les opérateurs de synthèse d'images.

- **Objectif du traitement d'images**

Etant donné que, le traitement d'images est une discipline de l'informatique et des mathématiques appliquées, qui étudie les images numériques et leurs transformations. Alors, l'objectif visé est d'améliorer la qualité visuelle des images, et d'en extraire de l'information utile. Le traitement d'images, assure les transformations de celles-ci, et constitue la partie de calcul permettant d'aller vers une interprétation des images traitées. A titre d'exemple, dans la branche de la vision artificielle et contrôle industriel, le traitement d'images vise la reconnaissance de formes et la détection d'objets. Dans le domaine de médecine et d'astronomie, le traitement d'image vise l'analyse des textures et segmentation des objets.

- **Approches basées sur la dérivation entière**

Dans le contexte de traitement d'images, plusieurs approches ont été proposées et appliquées, en mettant en œuvres divers outils mathématiques. Entre autres, les approches des méthodes utilisant les opérateurs différentiels basés sur le calcul d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. Les opérateurs classiques basés sur le calcul d'ordre entier sont appliquées depuis longtemps, à des fins de filtrage et segmentation des images.

Ces approches classiques présentent un ensemble de méthodes, qui ont eu historiquement une grande importance. Certaines approches sont encore régulièrement employées dans des applications en reconnaissances de formes, dans les opérations de filtrage et restauration au cours des traitements préalables. Dans les opérations de segmentation des contours, on distingue les détecteurs de gradient par filtrage qui reposent sur une recherche d'un extremum d'une dérivée première. Pour s'affranchir des bruits, celle-ci étant calculée généralement par un filtrage passe-haut suivi d'un filtrage passe-bas. Ces approches ont reçu une base théorique dans [1, 2, 3]. En termes de dérivation du second ordre, des détecteurs de passage par zéro du Laplacien ont été proposés en 1976 dans [4]. Ces méthodes tirent en outre profit du fait que, les zéro de la dérivée seconde constituent un réseau de lignes fermées correspondant aux lignes des extremums du gradient. Néanmoins, l'inconvénient de ces filtres est la sensibilité aux bruits et nécessitent un pré-filtrage. Il existe aussi les détecteurs de gradient par masques [5] qui sont des filtres de dérivation du premier ordre plus empiriques, proposées à partir d'estimateurs locaux de l'image et de ses dérivées. Ces dérivées sont obtenues à l'aide des masques appliquées sur des fenêtres bidimensionnels. On note que, la somme des coefficients de ces filtres est nulle, et les masques les plus utilisés sont ceux de Sobel, Robert, Gradient et Prewitt. Les équations aux dérivées partielles comme l'équation de diffusion de la chaleur [6], est un exemple classique qui apparait depuis longtemps, dans le cadre de l'analyse multi-échelles [7]. Ces équations sont également essentielles dans le cadre des problèmes variationnels, où l'on cherche une représentation associée à l'image qui minimise une certaine énergie. La descente du gradient associée à cette énergie fait alors apparaître une équation aux dérivées partielles dont la résolution fournit une solution au problème d'optimisation considéré [8, 9, 10, 11]. L'équation de diffusion isotrope peut être transformée en une équation de diffusion anisotrope par l'introduction d'une fonction décroissante. Ce fait, résout à la fois le problème d'analyse et le problème de restauration des contours qui dépend d'un seuil sur le contraste. Comme exemple, dans l'article [12] les auteurs ont développé une équation de diffusion anisotrope qui permet d'améliorer la qualité de la continuité des contours. Le filtrage par des équations de diffusion isotrope dans le cas continu est équivalent au filtrage gaussien [13, 14], dont l'inconvénient est de rendre les contours très flous. Alors, pour préserver les contours, on préfère le filtrage par les équations de diffusion anisotrope [15]. Une approche très différente des méthodes antérieures de détection des contours a été proposé dans [16,17], appelée contours actifs. Il s'agit d'une méthode semi-itérative dans laquelle l'opérateur place au voisinage de la

forme à détecter, une ligne initiale de contour qui sera amenée à se déformer sous l'action de plusieurs forces. L'écriture formelle du problème passe par la définition paramétrique du contour en fonction de l'abscisse curviligne. Enfin, malgré le développement de ces méthodes, elles restent imputables à certains inconvénients.

- **Approches basées sur la dérivation fractionnaire**

Récemment, le calcul fractionnaire est largement utilisé dans le domaine des sciences physiques et les sciences de l'ingénieur [18, 19]. Son avantage est largement démontré dans plusieurs applications [20, 21]. Ces succès ont motivés les chercheurs à appliquer les dérivés fractionnaires dans le traitement numérique des signaux [22, 23]. Il existe des travaux qui ont été réalisés en utilisant directement la forme numérique de la dérivation d'ordre fractionnaire définie par Grünwald–Letnikov (G-L) [24]. Et d'autres, basés sur la numérisation de la version analogique de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par Riemann–Liouville (R-L) [25].

Alors, plusieurs auteurs ont développé des opérateurs fractionnaires sous forme de masques de convolution [26, 27, 28, 29, 30], applicable à des fins de filtrage et segmentation de l'image. Dans [31, 32, 33], les auteurs présentent des méthodes fractionnaires pour la détection des contours. Dans [34], l'auteur applique un opérateur différentiel amélioré pour le rehaussement des images. Dans [35], l'auteur s'appuie sur la définition de Riemann-Liouville, et développe un algorithme en appliquant le modèle pour le rehaussement des textures et des contours de l'image. Dans [36], on applique la différentiation d'ordre fractionnaire basée sur la définition de Grünwald–Letnikov, pour le rehaussement du contraste.

Dans le cas des équations différentielles d'ordre fractionnaire, une équation de diffusion anisotrope d'ordre fractionnaire est présentée dans [37] appliquée au dé-bruitage de l'image. Une autre équation de diffusion de la lumière présentée dans [38], est utilisée pour le rehaussement des images astronomiques. La dérivation fractionnaire des signaux basse fréquences est non nulle [30, 33, 35], alors, la différentiation d'ordre fractionnaire non seulement préserve d'une manière non linéaire les contours de l'image lissée, mais aussi maintient les détails de haute fréquence des contours, où le niveau de gris change considérablement. Il préserve aussi les détails de hautes fréquences de la texture dans les régions où le niveau de gris change légèrement. Actuellement, la dérivation d'ordre fractionnaire constitue un défi majeur devant la dérivation entière classique, à cause de ses avantages dans le traitement des images.

- **Motivation de la thèse**

Dans les algorithmes de segmentation des contours, on commence souvent par un filtrage préalable appelé lissage en utilisant en générale un noyau Gaussien. L'objectif de cette opération est de minimiser les effets du bruit sur la qualité de la segmentation de l'image. Cette même opération est utilisée dans des algorithmes de segmentation multi-échelle des contours. Pour le contrôle du lissage et la sélection spatiale de l'échelle, on agit généralement sur la variance du noyau Gaussien. En fait, l'opération de lissage provoque la délocalisation des contours, et consomme un temps de calcul que l'on peut économiser surtout en temps réel. Alors, dans le contexte de cette thèse, on se propose de contribuer à la résolution de tels problèmes en cherchant l'outil adéquat. Pour cela, nous allons expliciter dans le contexte de cette thèse, notre méthode de construction des opérateurs dérivatifs basés sur le calcul d'ordre fractionnaire. Ces opérateurs ne sont autres que des masques de convolution de genre soustractif ou additif choisis selon l'application visée. Pour la synthèse de ces masques, on a mis en œuvre la définition de Grünwald-Letnikov. On va montrer dans cette thèse que l'utilisation des masques fractionnaire soustractifs dans la segmentation des contours ne nécessite pas l'opération de lissage au préalable. En plus, la segmentation multi-échelle peut être accomplie tout simplement par la variation du facteur fractionnaire de dérivation. Aussi, nous allons montrer l'application des masques fractionnaires additifs à l'opération de filtrage.

- **Structure de la thèse**

Au début de la thèse, on commence par une introduction générale sur l'objectif du traitement d'images et les différentes approches appliquées. Dans le premier chapitre, on présente un état de l'art sur l'application de la dérivation entière au traitement d'images. Alors, nous introduisons en premier lieu, le principe de synthèse des masques gradient et Laplacien par la méthode des éléments finis. En deuxième lieu, nous passons en revue l'utilisation des équations différentielles en général. Dans le deuxième chapitre, nous présentons un état de l'art sur l'application de la dérivation fractionnaire au traitement d'images en commençant par un historique de définitions sur la dérivation d'ordre fractionnaire, et quelques rappels sur le filtrage spatial et fréquentiel. Ensuite, nous passons en revue la synthèse de quelques masques d'ordre fractionnaire et leur utilisation au débruitage, rehaussement et segmentation de textures et contours. Enfin, terminons par l'utilisation des équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire.

Dans le troisième chapitre, nous allons présenter notre contribution au traitement d'images en explicitant la méthode suivie de construction des opérateurs de convolution d'ordre fractionnaire. Ensuite, nous passons aux différentes applications au traitement des images telles que : de filtrage, la détection des contours par l'approche du gradient, la détection multi-échelles des contours, et enfin la détection des contours par l'approche du Laplacien.

# Chapitre 1

## Traitement d'images basé sur la dérivation entière

### 1.1 Introduction

La détection des contours et la segmentation des images, sont probablement les domaines qui ont reçu la plus grande attention, de la part de la communauté de traitement des images. Ceci est en grande partie dû, à la nature très intuitive du contour, qui apparaît très naturellement comme l'indice visuel idéal, dans la plus grande partie des situations. Très schématiquement, les contours sont les lieux de variations significatives de l'information niveaux de gris. Dans cette approche, on suppose que l'image est une mosaïque de régions parfaitement homogènes. C'est à dire que, les contours recherchés sont de type créneaux. De plus, la transition étant stricte, un contour doit être une chaîne de pixels d'épaisseur 1. Cette restriction sur la nature du contour a été imposée dans un premier temps pour des raisons de formalisation mathématique. Il est possible de construire des processus capables d'extraire d'autres types de contours, comme par exemple des vallées ou des toits. Cependant, il n'existe pas à l'heure actuelle de processus complet et général, qui pourrait extraire tous les types des contours.

La notion de contour étant reliée à celle de variation, il est évident qu'une telle définition nous amène tout naturellement vers une évaluation de la variation en chaque pixel. Dans cette évaluation, on met en œuvre généralement les méthodes dérivatives. Une variation existera si le gradient est localement maximum, ou si la dérivée seconde (Laplacien) présente un passage par zéro. Les principaux algorithmes connus (Sobel, Prewitt, Kirsh, Canny, Dérivée, ...) se focalisent sur ce premier aspect du contour. Il existe moins de travaux sur la formalisation de la deuxième partie qui consiste à passer d'une mesure locale de variations à des chaînes de points d'épaisseur égale à l'unité. C'est pourtant cette deuxième partie qui fait souvent la différence, et la qualité visuelle d'un résultat. Les méthodes dérivatives s'appuient sur la constatation que les contours d'image sont traduits généralement par les transitions rapides de l'image, et que les variations lentes seront éliminées par dérivation. Les contours des objets dans des images de dimensions quelconques, correspondent le plus souvent aux extrema locaux du gradient, ou aux zéro du Laplacien de la fonction de niveaux de gris.

La détection des contours dans les images a débuté de façon extrêmement empirique par des opérateurs locaux. Elle se faisait soit par estimation du gradient, soit par convolution de l'image par des masques caractéristiques des contours comme dans Haralick et Shapiro [15]. Dans les années 80, des approches plus systématiques ont été mises en place par Marr et Hildreth [4], puis Canny [39] pour obtenir des contours plus significatifs. Ces travaux ont abouti à une bonne compréhension de ce qu'il faut faire pour détecter les contours, mais la définition même des contours demeure très vague, ce qui rend ces techniques encore peu efficaces sur un problème concret.

De plus, on a pu montrer que le problème de détection des contours est généralement mal posé au sens de la résolution des systèmes. Les seuls modèles des contours utilisables sont ceux des contours idéalisés sous forme de marche d'escaliers, rampe ou toit. Les seuls modèles des contours utilisables sont ceux des contours idéalisés qui sont bien loin de la réalité. Même si de très gros progrès ont été accomplis dans ce domaine, les techniques empiriques utilisant les opérateurs différentiels classiques d'estimation du gradient et du Laplacien restent souvent encore employées.

## **1.2 Définitions**

### **1.2.1 Filtrage d'une image**

Le filtrage est une opération qui consiste à réduire le bruit contenu dans une image. Il est considéré comme une transformation de l'image. Il existe deux grandes catégories de méthodes :

#### **1- Les méthodes du domaine spatial**

Ces méthodes se réfèrent à l'image elle-même, et sont basées sur la manipulation directe des pixels.

#### **2- Les méthodes du domaine fréquentiel**

Ces méthodes sont basées sur la modification de la Transformée de Fourier de l'image.

#### **3- Filtres linéaires exprimés sous forme de convolution**

Ces méthodes utilisent des masques comme noyaux de convolution. Ceux-ci peuvent être séparables en deux composantes horizontale et verticale ou sous forme compacte.

#### **4- Filtres non linéaires**

Dans une opération de filtrage en domaine spatial, le pixel est souvent considéré comme un individu statistique, et on cherche son identité grâce à son voisinage.

### 1.2.2 Filtrage spatial linéaire

Le filtrage spatial linéaire est essentiellement une opération de convolution d'une fonction d'intensité  $f(x, y)$ , avec une fonction  $h(x, y)$  appelée réponse impulsionnelle du filtre.

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) \quad (1.1)$$

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u, v) f(x - u, y - v) du dv \quad (1.2)$$

Dans le cas discret,

$$g(x, y) = \sum_{u=-H/2}^{+H/2} \sum_{v=-H/2}^{+H/2} h(u, v) f(x - u, y - v) \quad (1.3)$$

Où  $H$  correspond à la dimension de l'opérateur de filtrage.

### 1.2.3 Filtrage fréquentiel

Le filtrage fréquentiel consiste à appliquer à l'image une transformation du domaine spatial au domaine fréquentiel où le traitement aura lieu, et de faire l'opération inverse à la fin de ce traitement. Les transformations en question s'appelle, Transformations de Fourier directe (TF) et inverse ( $TF^{-1}$ ) d'une image  $f(x, y)$ , et sont données respectivement par :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy \quad (1.4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{+j(ux+vy)} du dv \quad (1.5)$$

Dans le cas discret, la Transformée de Fourier Discrète directe (TFD) et son inverse ( $TFD^{-1}$ ) sont données respectivement par :

$$F(\Omega, \Psi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m, n) e^{-j(\Omega m + \Psi n)} \quad (1.6)$$

$$f(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\Omega, \Psi) e^{+j(\Omega m + \Psi n)} d\Omega d\Psi \quad (1.7)$$

Pour une image filtrée, la convolution dans le domaine spatial est équivalente à un produit dans le domaine fréquentiel et vice versa, on a donc:

$$\begin{cases} G = \mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(h * f) = H \cdot F \\ g = \mathcal{F}^{-1}(H \cdot F) \end{cases} \quad (1.8)$$

Où  $\mathcal{F}$  est l'opérateur de la TF.

### 1.2.4 Les filtres séparables

Un filtre à réponse impulsionnelle  $h(x, y)$  séparable selon  $x$  et  $y$  est un filtre pour lequel :

$$h(x, y) = h_x(x) * h_y(y) \quad (1.9)$$

Ce qui se traduit en filtrage par :

$$g(x, y) = h_y(x) * (h_x(x) * f(x, y)) \quad (1.10)$$

Et pour les dérivées :

$$\begin{cases} \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = g(x, y) * \left( \frac{\partial h_x(x)}{\partial x} h_y(y) \right) \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = g(x, y) * \left( \frac{\partial h_y(y)}{\partial y} h_x(x) \right) \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\Delta g(x, y) = f(x, y) * (\Delta h_x(x) h_y(y) + \Delta h_y(y) h_x(x)) \quad (1.12)$$

On note que les principaux intérêts des filtres séparables sont :

1. Ramener le problème du filtrage d'un signal bidimensionnel à celui du filtrage d'un signal monodimensionnel.
2. Réduire le temps de calcul de manière que pour une convolution par un masque de filtrage de dimension  $H$ , la complexité est de  $2H$  au lieu de  $H^2$ .
3. Possibilité d'implémenter les filtres récursivement.

### 1.3 Approximation des dérivées par les différences finies

Dans le contexte de traitement d'images numériques, les dérivées partielles d'une fonction  $f(x, y)$  sont généralement exprimées par les différences finies. Certes, cette représentation permet d'implémenter les opérateurs dérivatifs sous forme de masques de convolution communément utilisables en traitement d'images. L'utilisation des masques est largement discutée et réalisé par plusieurs auteurs comme Young et al. [40], Shrivakshan et Chandrasekar [41], Kalpana et al. [42], Al-Amri [43], Maini et Aggarwal [44], et Bergounioux [45]. Supposons que nous pouvons approximer une fonction  $f$  autour d'un point  $x$  par son développement de Taylor comme suit :

$$f(x + h) = f(x) + \frac{hf'(x)}{1!} + \frac{h^2f''(x)}{2!} + \dots + \frac{h^n f^n(x)}{n!} + R_n(x) \quad (1.13)$$

Avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ,  $h$  est un accroissement de  $x$ .

#### 1.3.1 Dérivation du premier ordre

Le développement de Taylor d'ordre 1 s'écrit :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + O(h^2) \quad (1.14)$$

Où  $O(h^2)$  veut dire que le plus grand terme que nous avons négligé est au mieux de l'ordre de  $h^2$ . Alors, dans ce cas on peut écrire :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (1.15)$$

Cette relation s'appelle la différence anticipée. Maintenant si on remplace  $h$  par  $-h$  nous obtenons la différence rétrograde qui s'écrit comme suit :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} = \frac{f(x) - f(x - h)}{h} \quad (1.16)$$

En combinant les deux relations précédentes de la différence anticipée et rétrograde, on obtient la différence dite centrale suivante :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} \quad (1.17)$$

En supposant que le plan d'image est formé d'une grille de points  $(i, j)$  de pas  $h = 1$ . Alors, Les différences décrites précédemment peuvent être étendues à deux dimensions et sont décrites par les approximations correspondantes ci-après.

Les différences anticipées :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = f_i = f(i + 1, j) - f(i, j) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = f_j = f(i, j + 1) - f(i, j) \end{cases} \quad (1.18)$$

Les différences rétrogrades :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = f_i = f(i, j) - f(i - 1, j) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = f_j = f(i, j) - f(i, j - 1) \end{cases} \quad (1.19)$$

Les différences centrales :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = f_i = \frac{f(i + 1, j) - f(i - 1, j)}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = f_j = \frac{f(i, j + 1) - f(i, j - 1)}{2} \end{cases} \quad (1.20)$$

Alors, ce qui permet d'implémenter les dérivées partielles de deux manières différentes, selon le type de la différence choisie. Dans le cas des différences anticipées on a les deux composantes  $M_x$  et  $M_y$  suivantes :

$$M_x = [-1 \quad 1] = M_y^t \quad (1.21)$$

Et pour les différences centrales on a :

$$M_x = \frac{1}{2}[-1 \quad 0 \quad 1] = M_y^t \quad (1.22)$$

L'indexation des positions des pixels est représentée en Figure 1.1 où  $(i, j)$  représentent les positions horizontale et verticale respectivement.

$i - 1, j - 1$	$i, j - 1$	$i + 1, j - 1$
$i - 1, j$	$i, j$	$i + 1, j$
$i - 1, j + 1$	$i, j + 1$	$i + 1, j + 1$

Figure 1.1 : Indexation des positions des pixels.

### 1.3.2 Dérivation du second ordre

Le développement de Taylor d'ordre 2 pour  $\pm h$  s'écrit :

$$\begin{cases} f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h^2 f''(h) + O(h^3) \\ f(x - h) = f(x) - hf'(x) + h^2 f''(h) + O(h^3) \end{cases} \quad (1.23)$$

Où  $O(h^3)$  veut dire que le plus grand terme que nous avons négligé est au mieux de l'ordre de  $h^3$ .

Alors, En combinant les deux développements de Taylor dans la relation (1.23) précédente, on en déduit l'approximation par différences finies des dérivées du deuxième ordre suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{ii} = \frac{1}{2}[f(i-1, j) - 2f(i, j) + f(i+1, j)] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{jj} = \frac{1}{2}[f(i, j-1) - 2f(i, j) + f(i, j+1)] \end{cases} \quad (1.24)$$

La dérivée seconde peut être implémentée par les composantes suivantes :

$$M_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = M_y^t \quad (1.25)$$

## 1.4 Utilisation de la dérivation entière en traitement d'images

### 1.4.1 Approche du gradient

La première approche possible pour détecter les variations locales de la fonction  $f(x, y)$  représentant l'intensité, est d'utiliser une transformation du type gradient équivalente à la dérivée d'ordre 1 de cette fonction. Un contour est détecté par un maximum de la dérivée directionnelle dans la direction  $\emptyset$  du gradient. C'est-à-dire, par le maximum de la fonction :

$$g(\emptyset) = \vec{\nabla}f(x, y) \cdot \vec{\tau} \quad (1.26)$$

Où  $\vec{\nabla}f(x, y)$  est le vecteur gradient, et  $\vec{\tau}$  représente un vecteur unitaire dans la direction du gradient tels que :

$$\vec{\nabla}f(x, y) = \begin{bmatrix} \partial f(x, y) / \partial x \\ \partial f(x, y) / \partial y \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Et,

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{\nabla}f}{|\vec{\nabla}f|} \quad (1.28)$$

On a donc :

$$g(\emptyset) = \frac{df(x, y)}{d\tau} = \cos(\emptyset) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \sin(\emptyset) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad (1.29)$$

Dans le plan de l'image, le gradient est donc caractérisé par un module  $|\vec{\nabla}f|$  et une direction d'angle  $\emptyset$ , qui sont donnés par :

$$|\vec{\nabla}f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2} \quad (1.30)$$

Et,

$$\phi = \arctan\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} / \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \quad (1.31)$$

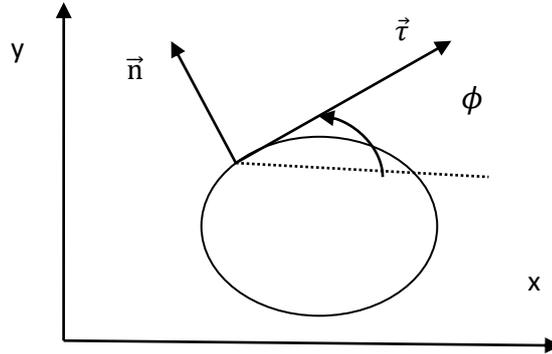


Figure 1.2 : Direction du gradient.

Si on dénote par  $H_x$  la matrice de la dérivée horizontale, par  $H_y$  la matrice de la dérivée verticale et par  $H_\phi$  la matrice de la dérivée arbitraire angulaire. Notons que la direction du gradient maximise la dérivée directionnelle. Alors, d'après Young et al. [40] on a :

$$[H_\phi] = \cos \phi \cdot [H_x] + \sin \phi \cdot [H_y] \quad (1.32)$$

Dans le cas discret, on approxime le gradient d'une image par différences finies. Le résultat final de ces calculs dépend fortement du choix de  $H_x$  et  $H_y$ . Les filtres dérivatifs de base sont donnés par les deux équations ci-après, alors que, le choix entre ces filtres est motivé par leur comportement en phase et en fréquence.

$$[H_x] = [H_y]^t = [1 \quad -1] \quad (1.33)$$

$$[H_x] = [H_y]^t = [1 \quad 0 \quad -1] \quad (1.34)$$

Dans le domaine de Fourier, ces deux filtres diffèrent significativement par leurs amplitudes et leurs phases. Dans l'intervalle des fréquences  $0 \ll \Omega \ll \pi$ , les amplitudes et les fréquences de ces filtres sont donnés respectivement par :

$$[h] = [1 \quad -1] \stackrel{F}{\leftrightarrow} |H(\Omega)| = 2|\sin(\Omega/2)|, \varphi(\Omega) = (\pi - \Omega)/2 \quad (1.35)$$

$$[h] = [1 \quad 0 \quad -1] \stackrel{F}{\leftrightarrow} |H(\Omega)| = 2|\sin(\Omega)|, \varphi(\Omega) = \pi/2 \quad (1.36)$$

Le filtre donné par la première équation ci-dessus conserve les hautes fréquences ( $\Omega \approx \pi$ ) et cause le déphasage, tandis que le filtre donné par la deuxième supprime les hautes fréquences et ne cause pas le déphasage. Les contours sont déterminés par les maxima locaux du module gradient.



Image originale



Opérateur  $[1 \quad -1]$



Opérateur  $[1 \quad 0 \quad -1]$

Figure 1.3 : Effet des opérateurs dérivatifs du premier ordre.

### 1.4.2 Approche du Laplacien

Elle consiste à déterminer les passages par zéro du Laplacien. La dérivée d'ordre 2 d'une fonction peut être générée comme une description scalaire du Laplacien  $\Delta f(x, y)$  d'une image définie par :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (H_x \otimes f) + (H_y \otimes f) \quad (1.37)$$

Où  $H_x$  et  $H_y$  sont respectivement, les dérivées secondes horizontale et verticale du filtre dont un exemple de base est donné par :

$$[H_x] = [H_y]^t = [1 \quad -2 \quad 1] \quad (1.38)$$

Dans le domaine fréquentiel nous avons pour le filtre Laplacien :

$$\nabla^2 f \stackrel{F}{\leftrightarrow} -(u^2 + v^2)F(u, v) \quad (1.39)$$

Alors, la fonction de transfert Laplacien correspondante à la parabole est comme suit:

$$H(u, v) = -(u^2 + v^2) \quad (1.40)$$

Et le spectre de fréquence de ce filtre est :

$$[h] = [1 \quad -2 \quad 1] \xleftrightarrow{F} H(\Omega) = -2(1 - \cos \Omega) \quad (1.41)$$

Le Laplacien est caractérisée par son invariance aux rotations de l'image, et par sa sensibilité au bruit accrue par rapport au gradient.



Image originale



Réponse du Laplacien

Figure 1.4 : Application de l'opérateur Laplacien.

## 1.5 Synthèse et utilisation des opérateurs dérivatifs d'ordre entier en traitement d'images

La synthèse des opérateurs dérivatifs d'ordre entier que l'on appelle couramment masques de convolution, est basée sur l'expression de ces opérateurs par les différences finies. Cette représentation n'est autre qu'une discrétisation des opérateurs dérivatifs pour la compatibilité d'applications aux images numériques.

### 1.5.1 Opérateurs dérivatifs du premier ordre

Ces opérateurs sont des masques obtenus par dérivation du premier ordre, et qui sont utilisés généralement pour la détection des contours par l'approche gradient. Ces masques sont séparables en deux composantes suivant les directions horizontale et verticale. Cette propriété de séparabilité simplifie largement le calcul des composantes du vecteur gradient d'une manière séparée. Il existe plusieurs types ayant chacun ses avantages et ses inconvénients.

Parmi ces masques on distingue :

- **Opérateur de Robert**

L'opérateur de Robert est le plus simple obtenu par simple différentiation dans les directions diagonales. La détection des contours dans une image se fait par simple convolution avec les composantes  $M_x$  et  $M_y$  montrées en Figure 1.6.

Cet opérateur est capable d'atténuer les faibles bruits, néanmoins les bords détectés sont un peu gras. Ce qui fait que les points des contours sont mal localisés. Notons que les différences sont calculées à la position supérieure gauche du masque.

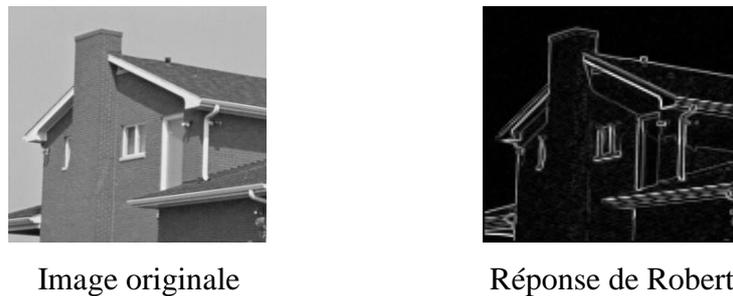


Figure 1.5 : Application de l'opérateur de Robert.

$M_x$	0	1
	-1	0

$M_y$	1	0
	0	-1

Figure 1.6 : Composantes du masque de Robert.

- **Opérateur de Sobel**

L'opérateur de Sobel est plus utilisé dans la détection des contours. Il est étendu sur un voisinage de 3x3. Cet opérateur possède le pouvoir non seulement de détecter les contours, mais aussi de restreindre les bruits. Pour le calcul du gradient Kanopoulos et al. [46], considérons l'arrangement des pixels autour de la position centrale  $(i, j)$  du masque représenté dans la Figure 1.7 suivante :

$a_0$	$a_1$	$a_2$
$a_7$	$(i, j)$	$a_3$
$a_6$	$a_5$	$a_4$

Figure 1.7 : Arrangement des pixels d'un voisinage 3x3.

Les dérivées partielles sont calculés par :

$$\begin{cases} M_x = (a_2 + ca_3 + a_4) - (a_0 + ca_7 + a_6) \\ M_y = (a_6 + ca_5 + a_4) - (a_0 + ca_1 + a_2) \end{cases} \quad (1.42)$$

Où  $c$  est une constante représentant un poids donné aux pixels voisins de la position centrale. Pour obtenir les masques de Sobel, on pose ( $c = 2$ ), alors, ce qui donne les composantes du masque selon les directions horizontale et verticale suivantes :

$$M_x \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad M_y \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Figure 1.8 : Composantes du masque de Sobel.



Image originale



Réponse de Sobel

Figure 1.9 : Application de l'opérateur de Sobel.

- **Opérateur de Prewitt**

L'opérateur de Prewitt a presque le même effet que l'opérateur de Sobel, seulement les contours sont un peu plus larges. Il partage la même équation avec le masque de Sobel mais avec ( $c = 1$ ) ce qui donne alors, les composantes horizontale et verticale suivantes :

$$M_x \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad M_y \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Figure 1.10 : Composantes du masque de Prewitt.



Image originale



Réponse de Prewitt

Figure 1.11 : Application de l'opérateur de Prewitt.

- **Opérateur de Kirsh**

Ils sont des opérateurs à huit masques directionnels correspondants chacun à une configuration préférentielle obtenue par permutation de 1 à 8 des coefficients. Le gradient et l'orientation retenus seront ceux qui correspondent au masque ayant permis d'obtenir le maximum du gradient donné par :

$$\max_{i=1,8} |M_i * f| \quad (1.43)$$

5	5	5
-3	0	-3
-3	-3	-3

Figure 1.12 : Masque de base de type Kirsh.



Image originale



Réponse de Kirsh

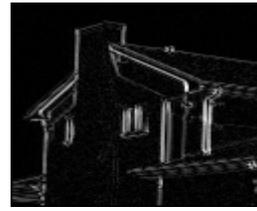
Figure 1.13 : Application de l'opérateur de Kirsh.

- **Opérateur de Robinson**

Ils sont des opérateurs à huit masques directionnels correspondants chacun à une configuration préférentielle, ils sont obtenus par rotation des coefficients de 1 à 8 (comme dans le cas de Kirsh, le gradient et l'orientation retenus seront ceux qui correspondent au masque ayant permis d'obtenir le maximum du gradient).



Image originale



Réponse de Robinson

Figure 1.14 : Application de l'opérateur de Robinson.

1	1	1
1	-2	1
-1	-1	-1

Figure 1.15 : Masque de base type Robinson.

### 1.5.2 Opérateurs dérivatifs du second ordre

Les opérateurs du second ordre sont des masques obtenus par dérivation du second ordre, et qui sont utilisés généralement pour la détection des contours par l'approche Laplacien. Comme le Laplacien est un scalaire, la séparabilité de ces masques n'est pas donc nécessaire. Alors, le calcul du Laplacien se fait par simple convolution avec le masque. Les opérateurs Laplaciens ne sont pas nombreux que dans le cas des opérateurs gradients. Parmi les masques les plus utilisés on distingue :

- **Opérateur Laplacien discret**

L'opérateur Laplacien est très sensible aux bruits Maini et Aggrawal [44], donc, il nécessite un lissage au préalable, ce qui influe sur la localisation des contours qui apparaissent plus larges. Les deux composantes horizontale et verticale de l'opérateur Laplacien obtenues par différences finies sont données dans la Figure suivante:

$M_x$	0	0	0
	1	-2	1
	0	0	0

$M_y$	0	1	0
	0	-2	0
	0	1	0

Figure 1.16 : Composantes du masque Laplacien.





Image originale



Réponse Laplacien de Robinson

Figure 1.20 : Application de l'opérateur Laplacien de Robinson.

## 1.6 Utilisation des filtres optimaux en traitement d'images

Les méthodes dérivatives présentées auparavant consistent à évoluer l'image par des masques de dimension modifiée. Ces approches sont donc dépendantes de la taille des objets traités, et elles sont aussi connues par la sensibilité aux bruits. Il y'a des approches récentes qui tiennent compte des critères d'optimalité de la détection des contours utilisant des filtres de lissage optimaux.

### 1.6.1 Critères de Canny

C'est une approche optimale présentée par Canny [39] très intéressante qui mérite d'être présentée ici. Soit un signal monodimensionnel  $I(x)$  représentant un saut d'amplitude  $A$ , noyé dans un bruit gaussien  $n(x)$  de moyenne nulle et de variance  $n_0^2$  :

$$I(x) = Au_{-1}(x) + n(x) \quad (1.44)$$

Où  $u_{-1}$  désigne la fonction de Heaviside. Soit  $\Theta(x_0)$ , la sortie au point  $x_0$  de la convolution du signal  $I(x)$  avec un opérateur de détection  $f(x)$  :

$$\Theta(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x)f(x - x_0)dx \quad (1.45)$$

Le problème est de trouver  $f(x)$  de manière que  $\Theta(x_0)$  soit maximum sous les 3 critères de performance suivants :

- **Critère de bonne détection :**

Il revient à chercher fonction  $f(x)$  antisymétrique qui maximise le rapport signal sur bruit suivant :

$$\Sigma = \frac{A \int_{-\infty}^0 f(x) dx}{n_0 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx}} \quad (1.46)$$

- **Critère de Bonne Localisation :**

Ce critère correspond à la minimisation de la variance  $\sigma^2$  de la position de passage par Zéro, ce qui revient à maximiser la localisation  $\Lambda$  définie comme l'inverse de  $\sigma^2$  :

$$\Lambda = \frac{A|f'(0)|}{n_0 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx}} \quad (1.47)$$

- **Critère de non multiplicité des réponses :**

Ce critère correspond à la limitation du nombre de maxima locaux détectés en réponse à un seul contour. Alors, soit la contrainte d'égalité suivante notée  $x_{max}$  :

$$x_{max} = 2\pi \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx}} \quad (1.48)$$

Trouver la fonction  $f(x)$  qui maximise le produit  $\Sigma\Lambda$  en fixant le troisième critère à une constante  $k$ , revient alors à trouver la solution de l'équation différentielle suivante :

$$2f(x) - 2\lambda_1 f''(x) + 2\lambda_2 f''''(x) + \lambda_3 = 0 \quad (1.49)$$

Qui admet comme solution :

$$f(x) = a_1 e^{\alpha x} \sin(\omega x) + a_2 e^{\alpha x} \cos(\omega x) + a_3 e^{-\alpha x} \sin(\omega x) + a_4 e^{-\alpha x} \cos(\omega x) \quad (1.50)$$

Cherchant  $f(x)$  comme filtre (RIF) définie sur l'intervalle  $[-W, +W]$  et présentant une pente à l'origine, Canny [39] a imposé les conditions initiales suivantes :

$$f(0) = 0, f(W) = 0, f'(0) = S, f'(W) = 0 \quad (1.51)$$

Ceci permet de calculer les coefficients de  $a_1$  à  $a_4$ , en plus,  $f(x)$  étant impaire ce qui permet d'étendre la solution aux  $x$  négatifs avec  $f(x) = -f(-x)$ .

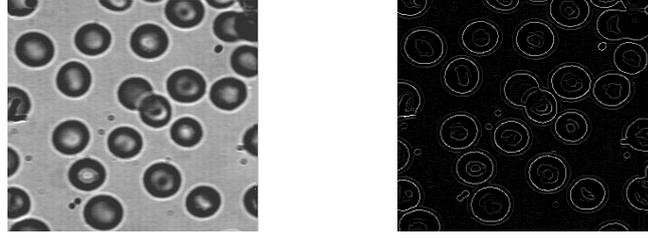


Image originale

Réponse de Canny

Figure 1.21 : Application du filtre optimal de Canny.

### 1.6.2 Filtre de Deriche

Dans son approche Deriche [47] utilise les critères de Canny pour dériver un filtre optimal récursif (RII). Il en résulte une équation différentielle admettant comme solution l'opérateur suivant :

$$f(x) = \frac{S}{\omega} e^{-\alpha|x|} \sin(\omega x) \quad (1.52)$$

En évaluant les différentes intégrales intervenant dans le calcul des indices de performances de cet opérateur, on obtient les résultats suivants :

$$\Lambda = \sqrt{2\alpha}, \Sigma = \sqrt{2\alpha/(\alpha^2 + \omega^2)} \quad (1.53)$$

$$\Sigma\Lambda = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, k = \sqrt{(\alpha^2 + \omega^2)/(5\alpha^2 + \omega^2)} \quad (1.54)$$

En posant  $\alpha = m\alpha$ , on obtient les trois cas suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \ m \gg 1, \Lambda = \sqrt{2\alpha}, \Sigma = \sqrt{2/\alpha}, \Sigma\Lambda = 2, k = 0.44 \\ 2) \ m = 1, \Lambda = \sqrt{2\alpha}, \Sigma = \sqrt{1/\alpha}, \Sigma\Lambda = \sqrt{2}, k = 0.58 \\ 3) \ m = \sqrt{3}, \Lambda = \sqrt{2\alpha}, \Sigma = \sqrt{3/2\alpha}, \Sigma\Lambda = \sqrt{3}, k = 0.5 \end{array} \right. \quad (1.55)$$

Le cas 3 montre que pour une valeur identique de  $k$ , l'indice de performance de l'opérateur de Deriche est près de 90% meilleure que la dérivée première d'une Gaussienne. Le cas 2 montre que pour une valeur identique de  $k$ , l'opérateur de Deriche présente un indice de performance amélioré près de 25% à l'opérateur de Canny.

Le cas 1 présente le meilleur indice et correspond à la limite de l'opérateur de Deriche pour  $\omega \rightarrow 0$ . Il est facile de vérifier que cette limite correspond à l'opérateur  $g(x)$  donné par :

$$g(x) = Sxe^{-\alpha|x|} \quad (1.56)$$

Cet Opérateur est la solution de l'équation différentielle au cas où le discriminant de son équation caractéristique est nulle.

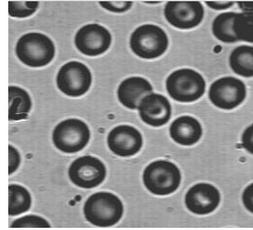
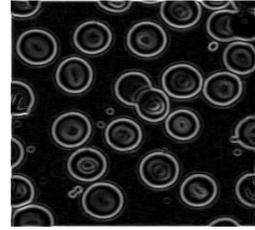


Image originale



Réponse de Deriche

Figure 1.22 : Application du filtre optimal de Deriche.

### 1.6.3 Filtre de Shen-Castan

L'approche développée par Shen-Castan d'après Deriche [47] consiste en l'élaboration d'un filtre passe-bas optimal pour la détection des contours. Le formalisme mathématique s'inspire de celui de Canny [39]. Un modèle de saut d'amplitude bruité est considéré, et un critère à optimiser est alors dérivé. Il en ressort un filtre linéaire optimal de lissage sous forme d'un filtre exponentiel symétrique :

$$s(x) = ae^{-\alpha|x|} \quad (1.57)$$

Qu'il se propose de mettre en œuvre comme suit :

$$\begin{cases} y_1(n) = x(n-1) + e^{-\alpha}y_1(n-1) & \text{pour } n = 1, \dots, M \\ y(n) = y_1(n+1) + e^{-\alpha}y(n-1) & \text{pour } n = M, \dots, 1 \end{cases} \quad (1.58)$$

Etant donné une image, elle est d'abord filtrée par un opérateur de lissage exponentiel. Le résultat obtenu est soustrait de l'image originale pour approximer le Laplacien. Une image binaire est alors produite en mettant à 1 les valeurs positives et à 0 le reste des données. Les frontières des zones positives et négatives forment les points des contours candidats. Une suppression des points isolés ainsi que toutes les taches ayant une surface inférieure à un seuil donné est alors effectué.

Pour distinguer les vrais points des contours des points de bruit, on fait un seuillage sur le gradient dont le calcul se fait d'une manière adaptative. On calcule pour chaque passage par zéro dans l'image originale, les moyennes de niveaux du gris correspondant aux zones 1 et 0 de l'image binaire. Le gradient adaptatif est alors égal à la différence entre ces deux moyennes.

### 1.6.4 Filtre Gaussien

Est une approche de Marr et Hildreth [4] pour la détection des contours qui consiste en un filtrage préalable de l'image  $f(x, y)$  par l'opérateur isotrope Gaussien  $G_\sigma(x, y)$  dans le but d'éliminer le bruit qui se produit au cours du filtrage Laplacien.

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.59)$$

Du fait de la linéarité de la convolution, alors, en appliquant en un premier lieu le Laplacien à la fonction Gaussienne, on obtient un masque LoG (Laplacian of Gaussian), et en deuxième lieu, on achève la convolution avec l'image originale  $f(x, y)$ . Ensuite, on cherche le passage par zéro dans l'image obtenue par convolution de l'image originale par l'opérateur Laplacien d'une Gaussienne.



Image originale



Réponse de l'opérateur LoG

Figure 1.23 : Application de l'opérateur LoG.

$$LoG(x, y) = \nabla^2(G_\sigma(x, y)) \quad (1.60)$$

L'image des contours  $h(x, y)$  est obtenue par accomplissement de la convolution comme suit :

$$h(x, y) = LoG(x, y) * f(x, y) \quad (1.61)$$

## 1.7 Utilisation des Equations aux dérivées partielles d'ordre entier en traitement d'images

On assiste depuis longtemps à une demande accrue au niveau des applications pour des algorithmes efficaces et performants d'amélioration, de restauration, d'analyse multi-échelle, etc. Les équations aux dérivées partielles (EDP) représentent un outil dont l'introduction en traitement des images date de quelques années seulement. Les EDP permettent d'aborder des problèmes non-linéaires, d'obtenir dans de nombreux cas des résultats d'existence et d'unicité de la solution, et voire des schémas de résolutions numériques très efficaces comme dans Aujol [48] et dans Deriche et Faugeras [49]. Pour résoudre le problème de restauration, deux méthodes sont largement utilisées. Une méthode variationnelle basée sur la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie, et une autre méthode basée sur l'utilisation des équations aux dérivées partielles de diffusion isotrope et anisotrope.

### 1.7.1 Equation de diffusion isotrope

Une approche classique développée dans le domaine de la restauration des images utilise une opération de convolution linéaire faite par Deriche et Faugeras [49]. C'est une opération de lissage effectuée afin de réduire l'effet du bruit considéré comme étant un signal haute fréquence.

$$u(x, y, t) = \int_{\Omega} G(x - \zeta, y - \eta, t) u_0(\zeta, \eta) d\Omega, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.62)$$

Où,  $u_0(x, y)$  est une fonction de  $R^2$  dans  $R$  définie sur le rectangle  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ . Les valeurs de la fonction  $u_0$  représentent les valeurs en niveau de gris de l'image originale bruitée,  $u(x, y, t)$  représente l'image restaurée, et  $t$  est un paramètre d'échelle qui contrôle l'importance du lissage de l'opérateur  $G(x, y, t)$ .

Un exemple d'opérateur souvent utilisé pour ses performances, ses propriétés de séparabilité et d'isotropie est l'opérateur Gaussien donné par :

$$G(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \quad (1.63)$$

Dans [50] Koenderink a remarqué le premier qu'une opération de convolution d'une image par un opérateur gaussien de variance  $\sigma^2 = 2t$ , peut être réécrite sous la forme d'un processus de diffusion de l'intensité image autour des pixels voisins durant un temps  $t$ , et qui est en relation directe avec la variance spatiale  $\sigma^2$ .

Cette équation de diffusion est connue sous le nom d'équation de la chaleur, et peut être mise sous forme d'une EDP parabolique linéaire comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1.64)$$

On note que cette équation de diffusion peut être réécrite sous la forme divergence suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \text{div}(\nabla(u(x, y, t))) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1.65)$$

On note aussi que ce processus de diffusion peut se mettre en œuvre dans le domaine spectral comme dans Faugeras [51] et Faugeras-Keriven [52], ou à l'aide de schémas numérique Alvarez et Mazorra [53], mettant en œuvre de manière récursive l'équation de diffusion. Une autre mise en œuvre récursive de l'opération de convolution avec l'opérateur Gaussien et ses dérivées a été décrite dans Deriche [54]. L'EDP parabolique linéaire (1.64) permet une diffusion isotrope, qui s'opère d'une manière identique dans toutes les directions, et ne possède aucune direction privilégiée. Malgré les propriétés caractérisant l'équation de la chaleur, Aubert et Komprobst [55] telles que : échelle , translation, isometry et invariance au décalage du niveau de gris, celle-ci présente des inconvénients dans les taches de restauration. En effet, dans les régions homogènes, ceci modifie bien l'effet du bruit, tandis que dans les régions présentant des discontinuités en niveau du gris, celles-ci seront aussi lissées et on perd l'information sur les contours.

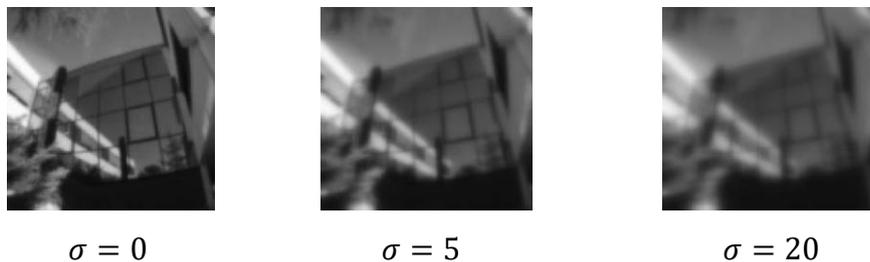


Figure 1.24 : Effet d'un lissage progressive par EDP de la chaleur.

### 1.7.2 Equation de diffusion anisotrope

Pour résoudre les problèmes de diffusion isotrope Perona et Malik ont proposé dans [56, 57] une diffusion conditionnelle, telle que dans les zones de faible gradient la diffusion est

forte, tandis que dans les zone à fort gradient la diffusion est faible. Ce mode de diffusion est formalisé par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \text{div}(c(|\nabla u(x, y, t)|)\nabla u(x, y, t)) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1.66)$$

Où,  $\text{div}$  et  $\nabla$  désignent les opérateurs de divergence et de gradient par rapport aux variables spatiales,  $c$  est une fonction décroissante par exemple :

$$c(|\nabla u|) = e^{-(|\nabla u|/k)^2} \quad (1.67)$$

Ou encore,

$$c(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + (|\nabla u|/k)^2} \quad (1.68)$$

Qui présente la même approximation au premier ordre que la précédente. Alors, le système d'équations (1.66) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u + \nabla u \cdot \nabla c = c\Delta u + \frac{c'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u^T H \nabla u \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1.69)$$

Où  $H$  est le Hessien de  $u$ .

On peut remarquer que si  $c$  est constante, alors la dérivée est nulle et cette équation se réduit à une simple équation de diffusion isotrope décrite dans le paragraphe précédent. En effet, cette méthode présente encore des inconvénients dont le premier est d'ordre pratique et manque d'efficacité dans les zones où le bruit présente de grosses continuités. Le deuxième est d'ordre théorique pour les fonctions  $c$  utilisées l'équation (1.69) n'admet pas de solutions. En effet, pour obtenir au même temps l'existence et l'unicité de la solution, il a été montré dans Catté et al. [58] que la fonction  $c(|\nabla u|)$  doit respecter la condition que le terme  $|\nabla u|c(|\nabla u|)$  soit non décroissant. Si cette condition n'est pas respectée, on peut avoir des solutions instables conduisant à des résultats différents si de petits changements affectent l'image originale. Une solution pour résoudre les inconvénients associés au modèle de Perona et Malik est de travailler avec une version régularisée de l'EDP (1.69) impliquant le gradient  $c(|\nabla G_\sigma * u|)$  au lieu de  $c(|\nabla u|)$ .

Cette approche independamment proposée dans Catte et al [58], Nitzberg et Shiota [59] rend le probleme bien posé et permet de prouver l'existence et l'unicité pour la nouvelle EDP obtenue. Toutefois, la stabilité n'est pas encore garantie pour les valeurs de  $\sigma$  proches de 0.

Une amélioration de cette idée de diffusion anisotrope prenant en compte les remarques précédentes a été proposé par Alvarez et al. [60], qui ont étudié une classe d'EDP parabolique non linéaire qui généralise l'idée de diffusion anisotrope initialement proposée par Perona et Malik. Le schéma proposé est un schéma issu de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla G_\sigma * u|) |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1.70)$$

Où  $g$  est une fonction décroissante de la variable  $|\nabla u|$  qui tend vers 0 quant  $|\nabla u|$  tend vers l'infinie.

On remarquant que le terme  $|\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$  correspond à la dérivée seconde de  $u$  dans la direction orthogonale au gradient  $\nabla u$ . L'équation précédente peut être interpretée comme un lissage anisotrope conditionnel, mais seulement le long des courbes de niveaux de l'image  $u(x, y, t)$ . Le terme impliquant la fonction  $g(|\nabla u|)$  permet de contrôler la vitesse de diffusion. Dans les zones de faible gradient, ce terme est grand et permet une diffusion anisotrope le long de la direction orthogonale au gradient, alors que dans les régions où le gradient est fort, la pondération est faible et annule la diffusion, d'où le nom de la diffusion selective.

Afin d'éviter de diffuser de manière isotrope dans les régions où il n'ya que du bruit, Alvarez et al. dans [60] proposent une version plus fine en prouvant l'existence et l'unicité de la solution, alors, le modèle proposé est:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla G_\sigma * u|) ((1 - h(|\nabla u|)) \Delta u + h(|\nabla u|) |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1.71)$$

Où  $h(|\nabla u|)$  est une fonction lisse non décroissante telle que :  $h(|\nabla u|) = 0$  si  $|\nabla u| \leq e$ , et  $h(|\nabla u|) = 1$  si  $|\nabla u| \geq 2e$ .

Il a été introduit un terme dans l'équation (1.71) qui force la solution  $u(x, y, t)$  proche de l'image initiale  $u_0(x, y)$  telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) - \operatorname{div}(c(|\nabla u(x, y, t)|)\nabla u(x, y, t)) = u_0 - u \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1.72)$$

A titre d'exemple, la Figure 1.25 illustre les résultats de simulation concernant le filtrage isotropique (par l'équation de la chaleur) et anisotropique (par la méthode de Perona et Malik).



Image originale



Equation de la chaleur



Perona-Malik

Figure 1.25 : Effet du filtrage isotrope et anisotrope sur une image.

## 1.8 Approches variationnelles en traitement d'images

Le débruitage est l'un des objectifs majeurs du traitement d'images. L'approche variationnelle consiste à reconstruire une image optimale nette  $u$ , à partir de la version  $u_0$  dégradée par le bruit  $\eta$ . Le problème revient donc à minimiser une fonctionnelle d'énergie.

### 1.8.1 Modèle variationnel

Une image bruitée peut être modélisée mathématiquement selon [61] par :

$$u_0 = R * u + \eta \quad (1.73)$$

Où  $R$  représente un opérateur linéaire continue de  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , permettant le passage de l'image non bruitée  $u$  à l'image bruitée  $u_0$ ,  $\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est un bruit Gaussien (à moyenne nulle et variance  $\sigma^2$ ),  $\Omega$  est le domaine de l'image. Une approche classique pour résoudre ce problème, est connu par la méthode des moindres carrés, qui consiste à minimiser une fonctionnelle. Alors, une approximation à  $u$  peut être obtenu en résolvant le problème suivant Aubert et Kornprobst [55] :

$$\inf_u \int_{\Omega} |u_0 - Ru|^2 dx \quad (1.74)$$

Cependant, l'opérateur  $R$  n'est pas nécessairement inversible, et même lorsqu'il est inversible, la restauration de  $u$  par déconvolution est inefficace à cause du terme de bruit. Il s'agit d'un problème inverse mal posé. Pour résoudre cette difficulté, une certaine forme de régularisation raisonnable est nécessaire.

## 1.8.2 Régularisation

Pour résoudre le problème mal posé de minimisation, dans [62] Levine a ajouté un terme de régularisation à l'énergie tel que :

$$F(u) = \int_{\Omega} |u_0 - Ru|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad (1.75)$$

Où le deuxième terme est un terme de lissage qui produit la régularisation de la solution. Le premier terme est connu sous le nom de terme de fidélité,  $\lambda$  est une constante réelle positive qui maintient un compromis entre le lissage et la fidélité.

L'équation d'Euler-Lagrange caractérise la solution unique suivante :

$$R^*Ru - R^*u_0 - \lambda\Delta u = 0 \quad (1.76)$$

Avec les conditions aux limites de Neumann,

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad (1.77)$$

Où  $R^*$  est l'adjointe de  $R$ ,  $N$  est la normale à  $\partial N$ . Ce type de régularisation est dit régularisation  $H^k$  ( $H^k$  - regularization). Comme l'opérateur Laplacien possède la propriété d'un lissage isotrope fort et ne préserve pas les bords, Aubert et Kornprobst [55], la solution de (1.76) n'est pas bon candidat pour le problème de la restauration. Rudin et al. [63] introduisent la régularisation à variation bornée BV (Bounded-Variation) qui définit le terme de lissage comme un BV semi-norme. Pour les fonctions lissées, il est exprimé par :

$$\lambda \int_{\Omega} |\nabla u| \quad (1.78)$$

La minimisation de (1.78) est une problématique pour les forts gradients. Choisir le terme de régularisation adéquat est important pour la qualité de la solution . Dans Cimrak et Melicher [64], les auteurs proposent un terme de régularization plus général qui évite l'effet de bords dus à la régularisation  $H^k$  et BV. Ainsi, ce terme de régularisation peut être formulé comme suit :

$$\lambda \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) dx \quad (1.79)$$

On peut avoir plusieurs choix de  $\Phi$ , cependant, ces choix peuvent satisfaire certaines propriétés telles que, la convexité et l'accroissement linéaire, mais l'image reconstruite est formée par des régions homogènes séparée par des contours aigus.

### 1.8.3 Contours actifs

L'approche des contours actifs appelés 'Snakes' proposée par Kass et al. [16], (voir aussi Blake et Isard [65]), est une méthode variationnelle semi-itérative utilisée pour la segmentation des contours. Elle consiste à placer dans l'image un ensemble de points formant une courbe initialisée par l'utilisateur près des frontières de l'objet à détecter. La courbe est ensuite déplacée et déformée sous l'effet de plusieurs forces. Le déplacement est dû à un processus itératif cherchant à minimiser une fonctionnelle d'énergie. Les contours actifs sont modélisés par la courbe paramétrique suivante :

$$v(s) = [x(s), y(s)]^t, \quad s \in [0, 1] \quad (1.80)$$

Où  $s$  est l'abscisse curviligne.

La fonctionnelle d'énergie totale est décrite par :

$$E_{totale} = \int_0^1 [E_{interne}(v(s)) + E_{image}(v(s)) + E_{externe}(v(s))] ds \quad (1.82)$$

Avec :

$$E_{interne} = \alpha(s) \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \beta(s) \left( \frac{d^2v}{ds^2} \right)^2 \quad (1.83)$$

Où  $\alpha, \beta$  sont respectivement les coefficients d'élasticité et de rigidité de la courbe.

$E_{image}$ : est généralement liée au gradient ou au niveau du gris.

$E_{externe}$  : est fixée par l'utilisateur.

Donc, le problème variationnel consiste à minimiser l'énergie totale suivante :

$$E_{totale} = \int_0^1 \left[ \alpha(s) \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \beta(s) \left( \frac{d^2v}{ds^2} \right)^2 - \nabla f \right] ds \quad (1.84)$$

Le contour initial à un point est décrit par :

$$\begin{cases} V^k = [v_1^k, \dots, v_n^k]^t = (A + \gamma I)^{-1} (\gamma V^{k-1} - g_v(V^{k-1})) \\ g_v = -|\nabla f(v)|^2 \end{cases} \quad (1.85)$$

Où  $K$  est la variable temps discret du processus itératif,  $\gamma$  est l'inertie,  $A$  est une matrice en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $I$  est la matrice identité.

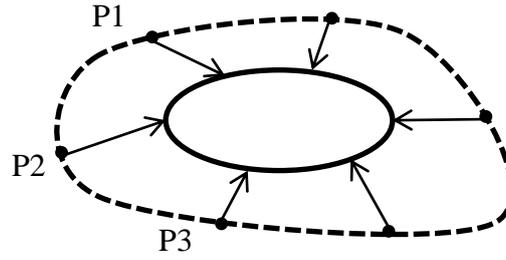


Figure 1.26 : Evolution d'un contour actif.

## 1.9 Concept d'échelle spatiale

En général, l'image contient des structures à large variété d'échelles. A première vue, l'échelle de la structure décrivant l'information désirée n'est pas claire, ce qui oblige d'avoir une représentation de l'image à des échelles multiples. En outre, en comparant les structures obtenues pour différentes échelles, on peut avoir une hiérarchie de structures qui facilitent l'interprétation ultérieure de l'image. Selon Joachim Weickert [66], l'échelle d'espace est une représentation de l'image à différentes échelles continues, en incorporant l'image  $f$  dans une famille  $\{T_t f | t \geq 0\}$  de versions graduellement simplifiées. Pour  $t = 0$ , la représentation échelle-espace donne l'image originale  $f$ , et le filtrage peut être partitionné en une séquence de banques de filtres. La transformation ne doit pas créer des artefacts en passant d'une petite échelle à une grande échelle, comme aussi ne doit pas avoir des structures additionnelles causées par le filtrage.

$$\begin{cases} T_0 f = f \\ T_{t+s} f = T_t(T_s f) \quad \forall s, t \gg 0 \end{cases} \quad (1.86)$$

Historiquement, le premier et le meilleur échelle-espace investi est l'échelle-espace Gaussien, qui est obtenu à travers la convolution de l'image avec un noyau Gaussien en variant la variance par un filtrage de diffusion linéaire. Dans [67] Iijima considère l'observation que la transformation  $\Phi$  qui dépend d'un paramètre d'échelle  $\sigma$ , et qui transforme l'image originale à une version confuse  $\Phi[f(x'), x, \sigma]$  par la relation suivante :

$$\Phi[f(x'), x, \sigma] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\{f(x'), x, x', \sigma\} dx' \quad (1.87)$$

La transformation précédente doit satisfaire les cinq conditions suivantes :

1- Linéarité par rapport a la multiplication

$$\Phi[Af(x'), x, \sigma] = A\Phi[f(x'), x, \sigma] \quad (1.88)$$

2- Invariance à la translation

$$\Phi[f(x' - a), x, \sigma] = \Phi[f(x'), x - a, \sigma] \quad (1.89)$$

3- Invariance d'échelle

$$\Phi[Af(x'/\lambda), x, \sigma] = \Phi[f(x'), x/\lambda, \sigma'], \quad \sigma' = \sigma'(\sigma, \lambda) \quad (1.90)$$

4- Propriété du semi groupe généralisée

$$\begin{aligned} \Phi[\Phi[f(x''), x', \sigma_1], x, \sigma_2] &= \Phi[f(x''), x, \sigma_3], \\ \sigma_3 &= \sigma_3(\sigma_1, \sigma_2) \end{aligned} \quad (1.91)$$

5- Préservation de positivité

$$\Phi[f(x'), x, \sigma] > 0 \quad \forall f(x') > 0, \quad \forall \sigma > 0 \quad (1.92)$$

Sous ces conditions, Iijima [67] a dérivé la relation suivante :

$$\Phi[f(x'), x, \sigma] = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp\left(\frac{-(x - x')^2}{4\sigma^2}\right) dx' \quad (1.93)$$

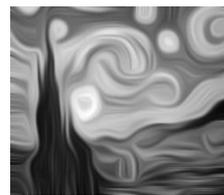
Donc,  $\Phi[f(x'), x, \sigma]$  est juste la convolution entre  $f$  et une Gaussienne avec une variance d'ordre  $\sigma\sqrt{2}$ . La Figure 1.27 suivante illustre l'effet de l'échelle d'espace sur le rehaussement par diffusion anisotropique en variant le facteur d'échelle.



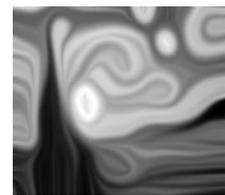
Image originale



Echelle réduite



Echelle moyenne



Echelle accentuée

Figure 1.27 : Effet d'échelle spatiale sur une image.

## 1.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art concernant l'application de la dérivation entière du premier et du second ordre en traitement d'images. Pour la segmentation des contours, nous avons présenté les approches usuelles du gradient et du Laplacien. Les masques utilisés comme opérateurs de convolution sont construits en utilisant l'approximation par les différences finies de la dérivée. Notons que, l'utilisation des filtres optimaux en traitement d'images est motivée par leurs bons critères de performances. En outre, les équations différentielles et l'approche variationnelle marquent aussi un outil mathématique très puissant dans le domaine du traitement d'images. A titre d'exemple, l'équation de la chaleur et l'équation de diffusion de la lumière permettent d'effectuer les opérations du lissage en jouant sur un paramètre d'échelle spatiale.

## Chapitre 2

# Traitement d'images basé sur la dérivation fractionnaire

### 2.1 Introduction

Le calcul fractionnaire est apparu il y'a trois siècles. Cependant, à l'époque il n'était pas considéré comme matière d'impact dans la science de l'ingénieur. Le calcul fractionnaire est un domaine de la mathématique qui généralise la dérivation et l'intégration d'un ordre entier à un ordre non entier  $\alpha$  (réel ou complexe) appelée facteur fractionnaire. Couramment, l'opération d'intégration ou de dérivation est appelée indifféremment dérivation fractionnaire, mais, le signe du facteur fractionnaire est seul déterminant de l'opération. Si le facteur fractionnaire est négatif, on est présence d'une intégration. Dans le cas contraire en est en présence d'une dérivation.

Dernièrement, les ingénieurs et physiciens ont découvert l'utilité pratique du calcul fractionnaire dont les applications submergent de jour en jour plusieurs domaines. Les avantages du calcul fractionnaire ont été largement démontrés par plusieurs applications dans le domaine de la science et de l'ingénierie Sabatier et al. [68], Dalir et Bashour [69]. Ces succès ont motivé les chercheurs à appliquer les dérivées fractionnaires au traitement numérique de l'image. Zhang et al. [70] ont développé un algorithme basé sur la définition de Riemann-Liouville qui a été appliqué au rehaussement de textures et contours. Sejdic et al. [71] ont essayé l'utilisation de la Transformée de Fourier fractionnaire en traitement du signal. Pesquet-Popescu et véhel [72] ont développés un modèle fractal stochastique en traitement d'image. Pu et al. [73] ont appliqués la différenciation fractionnaire pour la segmentation des textures. Dans [74, 75] Gao et al. ont appliqué la différenciation fractionnaire pour le rehaussement de l'image en couleur. Wang et al. [76] ont proposé et implémenté un filtre fractionnaire déphaseur de 90 degrés. Ce filtre est basé sur la définition de Grünwald-Letnikov côté gauche (Left-Handed) et côté droit (Right-Handed). Bien que certaines issues mathématiques restent non résolues, la plus part des difficultés ont été surmontées, et la plus part des problèmes mathématiques principaux ont été résolus à un point où plusieurs outils mathématiques pour le calcul d'ordre entier et fractionnaire sont identiques. En fait, il existe plusieurs définitions conduisant à des résultats différents

Podlubny [77], Tsao et al. [78], Bagley [79], causant ainsi l'instabilité des systèmes. En faisant face à ces problèmes, dans [80] Ortigueira et al. assume l'une des stratégies suivantes :

- choisir une formulation, a priori, sur la base de préférence personnel.
- décider de travailler dans un espace fonctionnel où toutes les définitions donnent le même résultat Carpinteri [81].
- choisir les formulations ou des outils communs qui assurent la généralisation des résultats

## 2.2 Définitions

Dans cette section nous allons considérer l'historique des différentes définitions du calcul fractionnaire Dalir et Bashour [69].

### 2.2.1 Euler (1730)

Euler a généralisé la formule :

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1) \dots (m-n+1)x^{m-n} \quad (2.1)$$

Par usage des propriétés de la fonction Gamma suivante :

$$\Gamma(m+1) = m(m-1) \dots (m-n+1)\Gamma(m-n+1) \quad (2.2)$$

On obtient :

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (2.3)$$

La fonction Gamma est définie comme suit :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (2.4)$$

### 2.2.2 J. B. J. Fourier (1820-1822)

Par la représentation intégrale :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px - pz) dp \quad (2.5)$$

Il a écrit :

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(px - pz + n\frac{\pi}{2}\right) dp \quad (2.6)$$

### 2.2.3 N. H. Abel (1823-1826)

Abel considérait la représentation intégrale  $\int_0^x \frac{s'(\eta) d\eta}{(x-\eta)^\alpha} = \psi(x)$  pour une valeur arbitraire de  $\alpha$ , alors il écrit :

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{-\alpha} \psi(x)}{dx^{-\alpha}} \quad (2.7)$$

### 2.2.4 Liouville (1832-1855)

I. Dans sa première définition, suivant la représentation exponentielle de la fonction

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$ , il généralisa la formule  $\frac{d^m e^{ax}}{dx^m} = a^m e^{ax}$  à ce que :

$$\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x} \quad (2.8)$$

II. Le second type de sa définition était l'intégrale fractionnaire

$$\int^\mu \Phi(x) dx^\mu = \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)} \int_0^\infty \Phi(x + \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha \quad (2.9)$$

$$\int^\mu \Phi(x) dx^\mu = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \Phi(x - \alpha) \alpha^{\mu-1} d\alpha \quad (2.10)$$

En substituant  $\tau = x + \alpha$  et  $\tau = x - \alpha$  respectivement dans les formules précédentes, il obtint :

$$\int^\mu \Phi(x) dx^\mu = \frac{1}{(-1)^\mu \Gamma(\mu)} \int_x^\infty (\tau - x)^{\mu-1} \Phi(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

$$\int^\mu \Phi(x) dx^\mu = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^x (x - \tau)^{\mu-1} \Phi(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

III. La troisième définition inclut les dérivées fractionnaires,

$$\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu}{h^\mu} \left( F(x) + \frac{\mu}{1} F(x+h) + \dots + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} F(x+2h) - \dots \right) \quad (2.13)$$

$$\frac{d^\mu F(x)}{dx^\mu} = \frac{1}{h^\mu} \left( F(x) + \frac{\mu}{1} F(x-h) + \dots + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} F(x-2h) - \dots \right) \quad (2.14)$$

### 2.2.5 G. F. B. Riemann (1847-1876)

Sa définition de l'intégrale fractionnaire est

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \psi(t) \quad (2.15)$$

### 2.2.6 N. Ya. Sonin (1869), A. V. Letnikov (1872), H. Laurent (1884), N. Nekrasove (1888), K. Nishimoto (1987)

Ils considèrent la formule de l'intégrale de Cauchy,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \quad (2.16)$$

Et ils substituèrent  $n$  par  $\nu$  pour obtenir,

$$D^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_c^{x^+} \frac{f(t)}{(t-z)^{\nu+1}} dt \quad (2.17)$$

### 2.2.7 Riemann-Liouville

Dans le calcul fractionnaire, cette définition est la plus populaire qui combine les deux définitions précédentes.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (2.18)$$

### 2.2.8 Grünwald-Letnikov

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (2.19)$$

### 2.2.9 M. Caputo (1967)

La seconde définition populaire est : Tapez une équation ici.

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}}, (n - 1 \leq \alpha < n) \quad (2.20)$$

### 2.2.10 K. S. Miller. B. Ross (1993)

Ils utilisèrent l'opérateur différentiel  $D$  comme,

$$D^{\bar{\alpha}} f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} f(t), \quad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (2.21)$$

Où,  $D^{\alpha_i}$  est les définitions de Riemann-Liouville ou de Caputo.

## 2.3 Filtrage linéaire par dérivation d'ordre fractionnaire

Le principe général du filtrage linéaire reste applicable ici, seulement l'ordre de la dérivation est généralisée à un ordre fractionnaire. Pour le filtrage spacial, la formule de la dérivation d'ordre fractionnaire appliquée à l'image constitue une convolution de l'image elle-même, avec les coefficients binomiaux généralisés. Ces coefficients constituent, les coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre d'ordre fractionnaire. En plus, dans le cas 2D cette réponse impulsionnelle est séparables dans les directions horizontale et verticale. Ce qui permet de simplifier l'opération de filtrage. Dans le domaine fréquentiel, l'image est transformée selon le cas, en utilisant la Transformée de Laplace ou la Transformée de Fourier, toutes les deux sont d'ordre fractionnaire. Après traitement, la Transformée inverse est alors accomplie.

### 2.3.1 Filtrage spatial par convolution

Comme une image  $f(x, y)$  peut être considérée comme une fonction à deux dimensions réelle et bornée, alors, l'approximation de grünwald-Letnikov peut être étendue selon Nakib [82] en deux dimensions de la forme suivante :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(s, y) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha f(x, y) \\ &\approx \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{k=-\lfloor M/2 \rfloor}^{\lfloor M/2 \rfloor} \sum_{l=-\lfloor N/2 \rfloor}^{\lfloor N/2 \rfloor} p(k, l) f(x - kh, y - lh) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Où  $h$  est le pas d'échantillonnage,  $M, N$  sont les dimensions de l'image  $f$  considérée,  $M \times N$  la taille du masque, et  $[x]$  représente la partie entière de  $x$ .

$p(k, l) = \omega_k(\alpha)x\omega_l(\alpha)$  sont les éléments de la matrice  $P_M^{(\alpha)}(p(k, l))_{0 \leq k \leq M}$  calculée en utilisant :

$$\begin{cases} \omega_0(\alpha) = 1 \\ \omega_{k+1}(\alpha) = \frac{(k+1) - \alpha - 1}{(k+1)} \omega_k(\alpha), \quad k = 0.1.2 \dots, M-1 \end{cases} \quad (2.23)$$

L'expression de la dérivée d'ordre fractionnaire peut être vue comme un produit d'une convolution 2D d'une image  $f$  avec un filtre 2D  $P_M^{(\alpha)}$  telle que:

$$g(x, y) = D^\alpha f(x, y) \otimes P_M^{(\alpha)}(x, y) \quad (2.24)$$

### 2.3.2 Filtrage fréquentiel par Transformée de Fourier d'ordre fractionnaire

La Transformée de Fourier d'ordre fractionnaire est une généralisation de la Transformée de Fourier (FT : Fourier Transform). Cette transformation représente une distribution dans l'espace temps-fréquence, lui offrant une grande utilité pratique. A cause de ses avantages, la Transformée de Fourier d'ordre fractionnaire émerge plusieurs domaines comme, le domaine de l'optique, de la mécanique quantique, et le traitement du signal en général. Actuellement, les applications dans le domaine du traitement d'images, comme le débruitage, la compression, le criptage, etc..., commencent à progresser de jour en jour.

La transformation de Fourier d'ordre fractionnaire  $p$  (FRFT : Fractional Fourier Transform), est un opérateur linéaire provoquant la rotation du signal d'un angle arbitraire  $\alpha = p\pi/2$ . En d'autres termes, c'est une représentation d'un signal le long de l'axe fréquentiel  $u$  formant un angle  $\alpha$  avec l'axe temporel  $t$ .

La FRFT d'un signal analogique  $f(t)$  est de la forme Narayanan et Prabhu [83]:

$$\mathcal{F}^p[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} K_p(t, u) f(t) dt, \quad 0 \leq |p| \leq 2 \quad (2.25)$$

Où  $K_p(t, u)$  est le noyau de de la transformation équivaut à :

$$K_p(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} \exp\left(j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \alpha - j \frac{tu}{\sin \alpha}\right), & \text{si } \alpha \neq n\pi \\ \delta(t - u), & \text{si } \alpha = 2n\pi \\ \delta(t + u), & \text{si } \alpha = 2(n + 1)\pi \end{cases} \quad (2.26)$$

L'inverse de la FRFT d'ordre  $p$  c'est la FRFT d'ordre  $-p$ .

$$f(x) = \mathcal{F}^{-p}[\mathcal{F}^p(f(t))] \quad (2.27)$$

### 2.3.3 Transformée de Fourier d'ordre fractionnaire discrète

La Transformée de Fourier discrète (DFT :Discrete Fourier Transform)  $F(k)$  d'un signal discret  $f(n)$  de  $(N + 1)$  échantillons est donnée par la somme centrée Pan et al. [84] suivante :

$$F(k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} f(n) e^{-j \frac{2\pi k}{N} n}, \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} \quad (2.28)$$

En se basant sur la définition précédente, alors, la Transformée de Fourier d'ordre fractionnaire discrète DFRFT ( Discrete Fractional Fourier Transform) d'ordre  $\alpha$  est de la forme :

$$F^\alpha(k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} f(n) e^{-j \frac{2\pi k}{N} \alpha n}, \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} \quad (2.29)$$

Maintenant, étant donné un signal  $f(n_1, n_2)$  de dimension  $(N + 1) \times (N + 1)$ ,  $-\frac{N}{2} \leq n_1, n_2 \leq \frac{N}{2}$ , alors, nous avons la DFRFT en 2D est donnée par :

$$F^\alpha(k_1, k_2) = \sum_{n_1=-N/2}^{N/2} \sum_{n_2=-N/2}^{N/2} f(n_1, n_2) e^{-j \frac{2\pi n_1}{N} \alpha k_1 - j \frac{2\pi n_2}{N} \alpha k_2} \quad (2.30)$$

### 2.3.4 Implémentation de la DFRFT

Tellement la Transformée de Fourier d'ordre fractionnaire discrète a une grande utilité pratique, ce qui nous pousse à introduire le principe de son implémentation. Alors, pour

l'implémentation Il existe plusieurs méthodes dans la littérature. Dans ce paragraphe, nous allons présenter la méthode des vecteurs propres basée sur la décomposition de la matrice de transformation de la Transformée de Fourier discrète Lin [85].

Pour cela, considérons la DFT classique à  $N$  échantillons suivante :

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.31)$$

Où  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  est un facteur de normalisation.

La Transformée de Fourier discrete précédente peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{X}_F = \mathbf{F}_N \mathbf{x} \quad (2.32)$$

Où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{X}_F$  sont deux vecteurs colonnes  $N \times 1$ , et soit  $\mathbf{F}_N$  la matrice de transformation  $N \times N$ , qui transforme le vecteur  $\mathbf{x}$  du domaine spatial, au vecteur  $\mathbf{X}_F$  du domaine fréquentiel. La matrice  $\mathbf{F}_N$  étant symétrique, d'après la théorie des matrices, elle est diagonalisable et peut se décomposer comme suit:

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T \quad (2.33)$$

Où  $\mathbf{U}$  est une matrice orthogonale, et  $\mathbf{D}$  une matrice diagonale formée par les valeurs propres de  $\mathbf{F}_N$  donnée par :

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}1} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \dots & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}4} & \dots & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)2} & \dots & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

La matrice  $\mathbf{F}_N$  étant symétrique, d'après la théorie des matrices, elle est orthogonalement diagonalisable et dans ce cas, nous pouvons calculer la matrice de transformation fractionnaire  $\mathbf{F}_N^\alpha$  de la manière suivante :

$$\mathbf{F}_N^\alpha = \mathbf{U} \mathbf{D}^\alpha \mathbf{U}^T \quad (2.35)$$

Sachant que les valeurs propres de la TFD sont :  $\{+1, -1, +j, -j\}$  et les multiplicités, on peut écrire :

$$\mathbf{F}_N^\alpha = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4] \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_1)^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-\mathbf{I}_2)^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-j\mathbf{I}_3)^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (j\mathbf{I}_4)^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^T \\ \mathbf{U}_2^T \\ \mathbf{U}_3^T \\ \mathbf{U}_4^T \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Pour la construction des vecteurs  $\mathbf{U}_i$  ( $i = 1,2,3,4$ ), soit la matrice  $\mathbf{S}$  qui commute avec  $\mathbf{F}$  ( $\mathbf{FS} = \mathbf{SF}$ ), et  $\omega = 2\pi/N$  telle que :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 \cos(\omega) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos(2\omega) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \cos[(N-2)\omega] & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \cos[(N-1)\omega] \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Dans ce cas, les vecteurs sont calculés comme suit :

$\mathbf{U}_1$  est construit par les vecteurs propres  $v$  de  $\mathbf{S}$  qui satisfont  $\mathbf{F}v = v$ ,

$\mathbf{U}_2$  est construit par les vecteurs propres  $v$  de  $\mathbf{S}$  qui satisfont  $\mathbf{F}v = -v$ ,

$\mathbf{U}_3$  est construit par les vecteurs propres  $v$  de  $\mathbf{S}$  qui satisfont  $\mathbf{F}v = -jv$ ,

$\mathbf{U}_4$  est construit par les vecteurs propres  $v$  de  $\mathbf{S}$  qui satisfont  $\mathbf{F}v = jv$ .

Enfin, la DFRFT sera de la forme :

$$\mathbf{X}_F^\alpha = \mathbf{F}_N^\alpha \mathbf{x} \quad (2.38)$$

### 2.3.5 Méthode d'application de la DFRFT

Un exemple type d'utilisation de la DFRFT est le filtrage par rotation du signal. Si les composantes du signal bruité interagissent dans le domaine temps-fréquence, il est difficile d'isoler le bruit du signal par la FT classique. Cependant, il est possible d'utiliser des

rotations à l'aide de la FRFT, ensuite, séparer les composantes signal et bruit, tellement leur distributions de Wigner sont disjointes, en appliquant un filtre pass-haut ou pass-bas.

La Figure 2.1 ci-dessous, représente la distribution de Wigner d'un signal bruité, il faut 3 rotations successives des axes 1, 2, et 3 pour éliminer l'énergie se trouvant dans le côté de l'axe indiqué par la flèche. Dans chaque rotation l'axe concerné est ramené dans la position verticale (parallèle à l'axe des temps  $t$ , et perpendiculaire à l'axe des fréquences  $u$ ), après quoi un filtre passe-bas est appliqué pour éliminer l'énergie du bruit se trouvant du côté indiqué par la flèche.

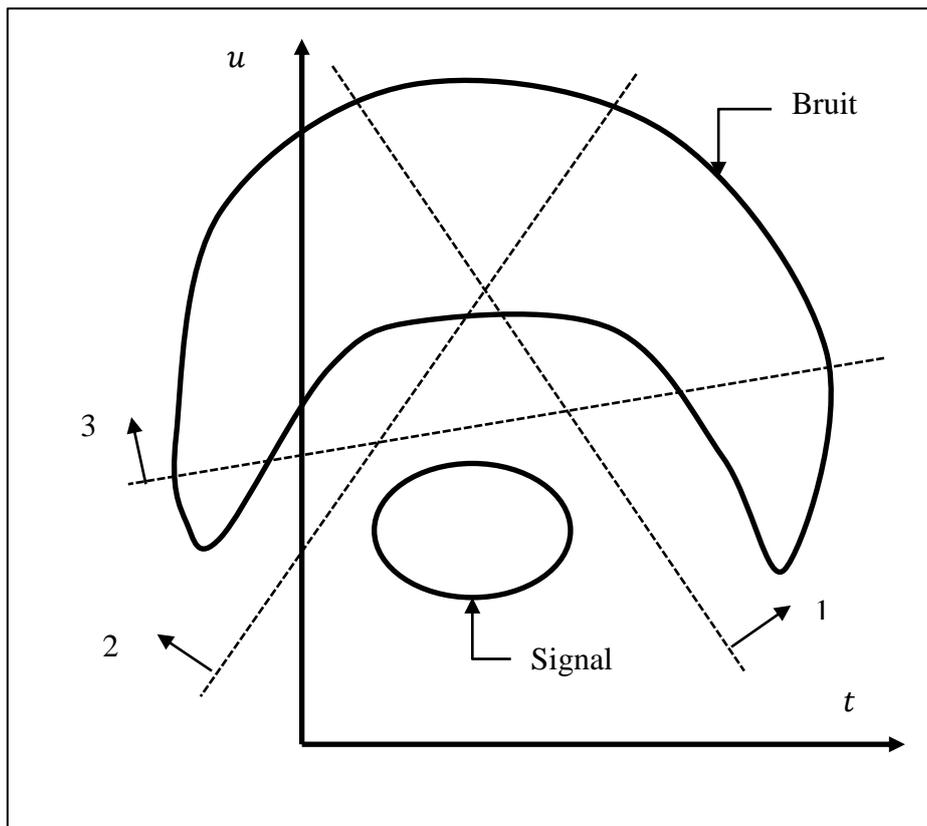


Figure 2.1 : Filtrage par rotation à l'aide de la FRFT.

## 2.4 Synthèse et application des opérateurs dérivatifs d'ordre fractionnaire

Dans cette section nous allons décrire quelques méthodes utilisées pour la construction des opérateurs d'ordre fractionnaire, ainsi que leurs application en traitements d'images pour les opérations de débruitage, de rehaussement, et de segmentation des contours, etc...

En général, la méthode de synthèse des opérateurs est basée, soit sur l'utilisation de la définition discrète de Grünwald-Letnikov directement, soit sur l'utilisation des définitions analogiques comme celle de Riemann-Liouville que l'on discrétise par des méthodes appropriées. Le principe de la construction des masques d'ordre fractionnaire est assez simple, néanmoins ça nécessite un calcul volumineux.

### 2.4.1 Débruitage de l'image par intégration d'ordre fractionnaire

Dans [86] Hamid and Rabha ont proposé un masque utilisant l'intégration d'ordre fractionnaire à deux paramètres. L'utilisation de cet opérateur préserve la texture et les contours de l'image traitée. La construction de ce masque est basée sur l'opérateur de l'intégrale d'ordre fractionnaire généralisée de Srivastava-Owa [87].

La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $f(z)$  est définie par :

$$D_z^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi) d\xi}{(z-\xi)^\alpha}, (0 \leq \alpha < 1) \quad (2.39)$$

Où,  $f(z)$  est une fonction analytique dans la région continue du plan complexe  $z$  de  $\mathbb{C}$  contenant l'origine et la multiplicité  $(z-\xi)^{-\alpha}$  levée en considérant  $\log(z-\xi)$  soit réel quant  $(z-\xi) > 0$ .

L'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $f(z)$  est définie par :

$$I_z^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z f(\xi) (z-\xi)^{\alpha-1} d\xi, (\alpha > 0) \quad (2.40)$$

Dans [88] Ibrahim a dérivé une formule pour l'intégrale d'ordre fractionnaire généralisée pour un ordre  $\alpha$ . Considérant pour un entier naturel  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  et le réel  $\mu$  l'intégrale  $n$  fois de la forme,

$$I_z^{\alpha, \mu} f(z) = \int_0^z \xi_1^\mu d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \xi_2^\mu d\xi_2 \dots \int_0^{\xi_{n-1}} \xi_n^\mu f(\xi_n) d\xi_n \quad (2.41)$$

En utilisant la formule des intégrales itérées de Cauchy, il en résulte,

$$\int_0^z \xi_1^\mu d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \xi^\mu f(\xi) d\xi = \frac{1}{\mu+1} \int_0^z (z^{\mu+1} - \xi^{\mu+1}) \xi^\mu f(\xi) d\xi \quad (2.42)$$

En répétant le raisonnement précédent  $(n-1)$  fois on aura :

$$I_z^{\alpha, \mu} f(z) = \frac{(\mu + 1)^{1-n}}{(n-1)!} \int_0^z (z^{\mu+1} - \xi^{\mu+1})^{n-1} \xi^\mu f(\xi) d\xi \quad (2.43)$$

Ce qui implique l'opérateur fractionnaire type,

$$I_z^{\alpha, \mu} f(z) = \frac{(\mu + 1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z^{\mu+1} - \xi^{\mu+1})^{\alpha-1} \xi^\mu f(\xi) d\xi \quad (2.44)$$

Où  $\alpha$  et  $\mu \neq -1$ , cette relation est maintenant appliquée pour la construction de l'opérateur de la forme intégrale d'ordre fractionnaire généralisée. Pour accomplir l'opération d'intégration d'une fonction analytique  $s(z)$ , on considère  $\nu < 0$ , alors la relation précédente peut être réécrite comme suit :

$$I_z^{\nu, \mu} s(z) = \frac{(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^{1+\nu}}{\Gamma(-\nu)} \int_0^z (\xi^{\mu+1})^{-\nu-1} (z - \xi)^\mu s(z - \xi) d\xi \quad (2.45)$$

L'intégrale précédente peut être discrétisée sur l'intervalle  $[0, z]$ , et dans ce cas, elle peut être mise sous la forme d'une somme d'intégrales de  $N$  parties égales comme suit :

$$I_z^{\nu, \mu} s(z) = \frac{(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^{1+\nu}}{\Gamma(-\nu)} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kz/N}^{(k+1)z/N} \frac{(z - \xi)^\mu s(z - \xi)}{(\xi^{\mu+1})^{\nu+1}} d\xi \quad (2.46)$$

En outre, l'intégrale à l'intérieur de la somme précédente peut être développée de la manière suivante :

$$\int_{kz/N}^{(k+1)z/N} \frac{(z - \xi)^\mu s(z - \xi)}{(\xi^{\mu+1})^{\nu+1}} d\xi \cong \frac{(S_k + S_{k+1})((k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1})}{-2\nu(\mu+1)} \times \left[ \left( \left( \frac{kz+z}{N} \right)^{\mu+1} \right)^{-\nu} - \left( \left( \frac{kz}{N} \right)^{\mu+1} \right)^{-\nu} \right] \quad (2.47)$$

En fait, l'intégrale précédente est monodimensionnelle, mais pour l'application en traitement d'images numériques, cette expression est étendue en deux dimensions. Alors, pour les deux variables sur la direction négative des coordonnées  $z$  et  $w$ , on a obtenu les valeurs suivantes :

$$I_z^{\nu, \mu} s(z_-, w) = \frac{(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(-2\nu)\Gamma(-\nu)} s(z, w) + \frac{(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(-2\nu)\Gamma(-\nu)}$$

$$x \sum_{k=1}^{N-1} ((k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1}) (((k+1)^{\mu+1})^{-\nu} - (k^{\mu+1})^{-\nu}) s(z-k, w) \quad (2.48)$$

Et

$$I_z^{\nu, \mu} s(z, w_-) = \frac{(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(-2\nu)\Gamma(-\nu)} s(z, w) + \frac{(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(-2\nu)\Gamma(-\nu)}$$

$$x \sum_{k=1}^{N-1} ((k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1}) (((k+1)^{\mu+1})^{-\nu} - (k^{\mu+1})^{-\nu}) s(z, w - k) \quad (2.49)$$

Alors que, pour les deux variables sur la direction positive des coordonnées  $z$  et  $w$ , on a obtenu les valeurs suivantes :

$$I_z^{\nu, \mu} s(z_+, w) = \frac{(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(-2\nu)\Gamma(-\nu)} s(z, w) + \frac{(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(2\nu)\Gamma(-\nu)}$$

$$x \sum_{k=1}^{N-1} ((k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1}) (((k+1)^{\mu+1})^{-\nu} - (k^{\mu+1})^{-\nu}) s(z+k, w) \quad (2.50)$$

Et

$$I_z^{\nu, \mu} s(z, w_+) = \frac{(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(-2\nu)\Gamma(-\nu)} s(z, w) + \frac{(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(2\nu)\Gamma(-\nu)}$$

$$x \sum_{k=1}^{N-1} ((k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1}) (((k+1)^{\mu+1})^{-\nu} - (k^{\mu+1})^{-\nu}) s(z, w + k) \quad (2.51)$$

Les valeurs non nulles des termes correspondants dans la formule précédente sont :

$$\psi_0 = \frac{(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(-2\nu)\Gamma(-\nu)}, \quad (\mu \geq 0, \nu < 0)$$

$$\psi_1 = \frac{(2^{\mu+1} - 1)(2^{(-\nu)(\mu+1)} - 1^{-\nu(\mu+1)})(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(2\nu)\Gamma(-\nu)},$$

$$\psi_2 = \frac{(3^{\mu+1} - 2^{\mu+1})(3^{(-\nu)(\mu+1)} - 2^{-\nu(\mu+1)})(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(2\nu)\Gamma(-\nu)}, \quad (2.52)$$

·  
·  
·

$$\psi_{n-1} = \frac{(n^{\mu+1} - (n-1)^{\mu+1})(n^{(1-\nu)(\mu+1)} - (n-1)^{(1-\nu)(\mu+1)})(2^{\mu+1} - 1)(\mu + 1)^\nu}{(2\nu)\Gamma(-\nu)},$$

Ces valeurs  $\psi_n$  vont être utilisées comme coefficients du masque d'intégration d'ordre fractionnaire généralisée. En fait, ce masque est l'ensemble de huit composantes dont chacune est caractérisée par une direction  $\theta$  prenant ses valeurs dans l'ensemble des angles  $\{180^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 45^\circ, 315^\circ, 335^\circ, 225^\circ\}$ .

L'amplitude  $G_\theta(i, j)$  pour chaque filtre est calculée par la relation,

$$G_\theta(i, j) = \sum_{n=1}^{16} a_n(i, j) * f_\theta(n) \quad (2.53)$$

Où  $n = 1, \dots, m$  représente la position du pixel dans chaque masque,  $f_\theta(n)$  représente les coefficients du filtre d'intégration d'ordre fractionnaire suivant la direction  $\theta$ , et  $a_n(i, j)$  représente la valeur du gris du pixel dans la position  $(i, j)$ .

$\psi_{n-1}$	...	$\psi_2$	$\psi_1$	$\psi_0$

(a)

$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$	...	$\psi_{n-1}$

(b)

		$\psi_{n-1}$		
		$\vdots$		
		$\psi_2$		
		$\psi_1$		
		$\psi_0$		

(c)

		$\psi_0$		
		$\psi_1$		
		$\psi_2$		
		$\vdots$		
		$\psi_{n-1}$		

(d)

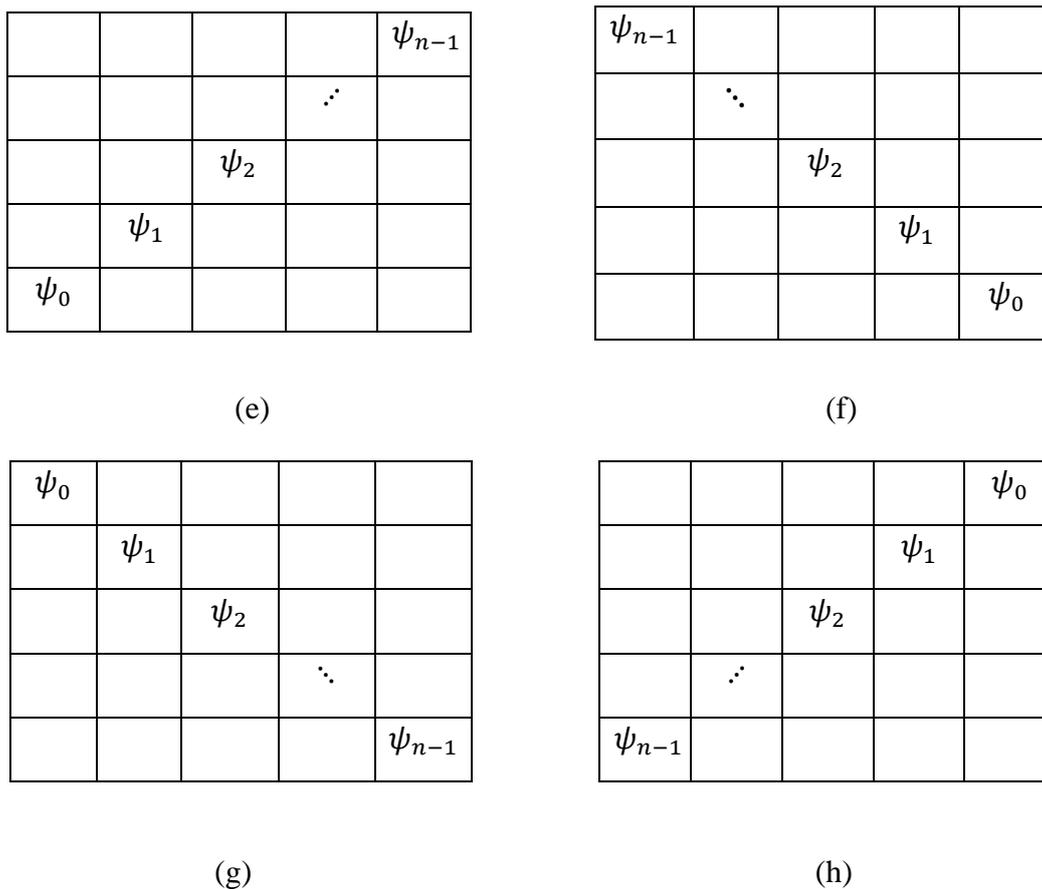


Figure 2.2 : Masques fractionnaires de (a) à (h) dans les 8 directions de  $\theta$ .

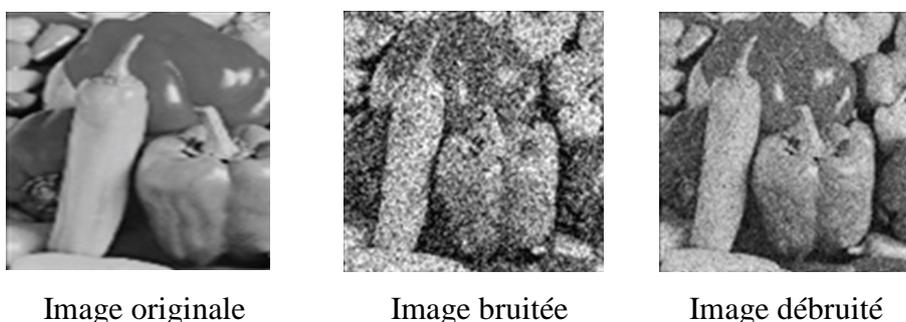


Figure 2.3 : Débruitage par integration d'ordre fractionnaire à deux paramètres d'une image avec bruit Gaussien de variance 0.05.

### 2.4.2 Rehaussement de texture basé sur une définition de G-L améliorée

Le rehaussement de texture joue un grand rôle dans l'identification des objets des régions d'intérêt dans une image. Dans le but de rehausser l'information de texture et dépasser les limitations des opérateurs dérivatifs classiques, Garg et Singh [89] proposèrent un masque basé sur une version de la dérivée d'ordre fractionnaire améliorée de Grünwald-Letnikov.

Etant donné un signal  $s(t)$ , alors, la dérivée fractionnaire d'ordre  $\nu$  de ce signal peut être définie par l'approximation suivante :

$$D_t^\nu = \frac{h^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m-\nu)}{\Gamma(m+1)} s(t-mh) \quad (2.54)$$

Où,  $\Gamma$  est la fonction Gamma,  $s(t) \in [a, t]$ ,  $a < t$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , quand  $\nu > 0$ ,  $m > [\nu]$  ( $[\nu]$  est la partie entière de  $\nu$ ).

En introduisant des valeurs de  $s(t)$  à l'extérieur des nœuds, alors l'équation précédente peut prendre la forme suivante :

$$D_t^\nu = \frac{h^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m-\nu)}{\Gamma(m+1)} s\left(t + \frac{\nu h}{2} - mh\right) \quad (2.55)$$

En plus, supposons  $m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ , et considérons les trois nœuds  $s(t+h-mh)$ ,  $s(t-mh)$ ,  $s(t-h-mh)$ .

Alors, l'interpolation de 3 points de Lagrange implique :

$$\begin{aligned} s(\xi) \approx & \frac{(\xi-t+mh)(\xi-t-h+mh)}{2h^2} s(t+h-mh) \\ & - \frac{(\xi-t-h+mh)(\xi-t+h+mh)}{h^2} s(t-mh) \\ & + \frac{(\xi-t-h+mh)(\xi-t+mh)}{2h^2} s(t-h-mh) \end{aligned} \quad (2.56)$$

En remplaçant  $\xi = t + (\nu h/2) - mh$  on obtient,

$$\begin{aligned} s\left(t + \frac{\nu h}{2} - mh\right) \cong & \left(\frac{\nu}{4} + \frac{\nu^2}{8}\right) s(t+h-mh) \\ & + \left(1 - \frac{\nu^2}{4}\right) s(t-mh) \\ & + \left(\frac{\nu^2}{8} - \frac{\nu}{4}\right) s(t-h-mh) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Combinons les équations précédentes on obtient enfin,

$$\frac{\partial^\nu}{\partial t} s(t) = \frac{h^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m-\nu)}{\Gamma(m+1)} X \left[ s_m + \frac{\nu}{4} (s_{m-1} - s_{m+1}) + \frac{\nu^2}{8} (s_{m-1} - 2s_m + s_{m+1}) \right] \quad (2.58)$$

C'est l'expression de la dérivée fractionnaire de G-L améliorée Yi-Fei et al. [90].

Les trois points d'interpolations sont :

$$\begin{cases} s_m = s(t - mh) \\ s_{m-1} = s(t + h - mh) \\ s_{m+1} = s(t - h - mh) \end{cases} \quad 2.59$$

La convolution d'une image  $f(x, y)$  avec un masque pareil  $w(s, t)$  est donnée sous la forme Gan et Yang [ 91] :

$$g(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t) \quad (2.60)$$

Si le masque est sous forme d'une matrice  $T$  de dimension  $m \times m$  ayant  $m$  couches ( $m$  étant impaire), alors, il y'a 8 directions respectives de  $T$  qui sont :  $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4},$  et  $\frac{7\pi}{8}$ . et pour  $\nu \in (0,1)$ , il s'ensuit que :

$$T_i = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \left[ \frac{\Gamma(i-\nu+1)}{(i+1)!} + \frac{\Gamma(i-\nu)}{i!} \left( 1 - \frac{\nu^2}{4} \right) + \frac{\Gamma(i-\nu-1)}{(i-1)!} \left( -\frac{\nu}{4} + \frac{\nu^2}{8} \right) \right] \quad (2.61)$$

Où  $T_i$  est la valeur de la  $i^{\text{ème}}$  couche du masque,  $\nu \in \mathbb{R}^+$ , de manière à avoir une somme nulle des coefficients on a :

$$T_0 = -1 * \sum_{i=1}^n 8 * i * T_i \quad (2.62)$$

En fait, le résultat de la convolution avec le masque  $T$  provoque un amencissement des contours. Alors, pour le rehaussement de l'image, on ajoute l'image originale à l'image des contours obtenue en utilisant  $T$ . Dans ce cas, on est obligé de passer du masque  $T$  au masque  $R$  comme dans Gan et Yang [91] ce qui donne alors,

$$\begin{cases} R_i = \gamma T_i, & (i > 0) \\ R_0 = 1 + \gamma T_0, & (i = 0) \end{cases} \quad (2.63)$$

Où,  $\gamma$  est le facteur d'intensité, quant  $\nu \in (0,1)$  et à partir de 2.62 et 2.63 on aura,

$$\begin{cases} R_i = \gamma T_i, & (i > 0) \\ R_0 = 1 - \sum_{i=1}^n 8 * i * R_i, & (i = 0) \end{cases} \quad (2.64)$$

Un masque basé sur la forme de Grünwald-Letnikov amélioré est donnée en Figure 2.4.

$R_1$	$R_1$	$R_1$
$R_1$	$R_0$	$R_1$
$R_1$	$R_1$	$R_1$

Figure 2.4 : Masque basé sur la définition de G-L améliorée.



Image originale

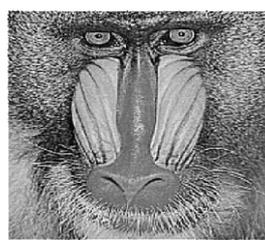


image obtenue avec  $\nu = 0$

Figure 2.5 : Effet d'un masque basé sur la définition de G-L améliorée.

### 2.4.3 Rehaussement de texture par différentiation d'ordre fractionnaire de riesz

Le rehaussement de la texture est l'un des grands intérêts dans le traitement de l'image, et joue un rôle majeur en imagerie médicale Yu et al. [92]. La qualité de l'image et spécialement la texture a une grande signification dans les diagnostics cliniques des maladies. L'utilisation des opérateurs fractionnaires dans le rehaussement des textures permet de maintenir les détails inhérents aux contours de basses fréquences dans les régions lissées, comme permet aussi de rehausser les contours de hautes fréquences d'une manière non linéaire dans les régions où l'échelle du gris change considérablement. Pour cela, on applique l'opérateur de différentiation d'ordre fractionnaire du second ordre de Riesz pour améliorer le rehaussement en augmentant le rapport signal/bruit. L'analyse théorique de cet opérateur peut être formulée comme suit :

La dérivée fractionnaire de Riesz  $\partial^\nu u(t)/\partial|t|^\nu$  d'ordre  $\nu$  ( $0 < \nu \leq 2$ ) pour un intervalle infini  $-\infty < t < \infty$ ) Yu et al. [93] est définie par :

$$\frac{\partial^\nu u(t)}{\partial|t|^\nu} = -c_\nu \left( \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} + \frac{\partial^\nu}{\partial(-t)^\nu} \right) u(t) \quad (2.65)$$

Où  $c_\nu = [2\cos(\pi\nu/2)]^{-1}$  avec  $\nu \neq 1$ ,  $p - 1 < \nu \leq p \leq 2$  pour  $p \in \mathbb{N}$ .

Ce qui permet d'écrire les deux relations suivantes :

$$\frac{\partial^\nu u(t)}{\partial t^\nu} = \frac{1}{\Gamma(p-\nu)} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \int_{-\infty}^t \frac{u(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{\nu+1-p}} \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial^\nu u(t)}{\partial (-t)^\nu} = \frac{(-1)^p}{\Gamma(p-\nu)} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \int_t^\infty \frac{u(\xi) d\xi}{(\xi-t)^{\nu+1-p}} \quad (2.67)$$

La dérivée fractionnaire de Riesz est approximée en utilisant le schéma de la différence d'ordre fractionnaire centrée donnée par Ortigueira [94] :

$$\frac{\partial^\nu u(t)}{\partial |t|^\nu} = -\frac{1}{h^\nu} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-k+1\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+k+1\right)} u(t-kh) + O(h^2) \quad (2.68)$$

Ici, les auteurs définissent deux algorithmes basés sur l'opérateur fractionnaire de Riesz : l'algorithme FCD-1 pour  $0 < \nu < 1$  et l'algorithme FCD-2 pour  $1 < \nu < 2$ .

- **Premièrement** : pour  $0 < \nu < 1$  l'équation précédente peut être exprimée par :

$$\frac{\partial^\nu u(t)}{\partial |t|^\nu} \approx -\frac{1}{2 \cos(\pi\nu/2) h^\nu} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k u(t-kh) + \sum_{k=-\infty}^0 \omega_k u(t-kh) \right] \quad (2.69)$$

Où,

$$\begin{cases} \omega_0 = -\frac{\Gamma(1-\nu/2)}{\nu\Gamma(1+\nu/2)\Gamma(-\nu)} \\ \omega_k = -\frac{(-1)^{k+1}\Gamma(\nu/2)\Gamma(1-\nu/2)}{\Gamma(\nu/2-k+1)\Gamma(\nu/2+k+1)\Gamma(-\nu)}, k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.70)$$

Pour une image  $s(x, y)$ , la différence fractionnaire centrée peut être étendue en deux dimensions. Un exemple de cette extension après troncature de  $n + 1$  divisions sur l'axe des  $x$  positifs est donnée par :

$$\frac{\partial^\nu s(x, y)}{\partial x^\nu} \cong -\frac{1}{2 \cos(\pi\nu/2) h^\nu} \sum_{k=0}^n \omega_k s(x-kh, y), 0 < \nu < 1 \quad (2.71)$$

La convolution de l'image  $S(x, y)$  avec les composantes du masque FCD-1 de dimension  $(2m + 1) \times (2m + 1)$  dans les 8 directions peuvent être obtenue en utilisant les relations suivantes :

$$\begin{cases} S_l(x, y) = \sum_{i=M_l}^{N_l} \sum_{j=P_l}^{Q_l} W_l(i, j) s(x + i, y + j), l = 1, 2, 3, 4 \\ S_l(x, y) = \sum_{i=M_l}^{N_l} \sum_{j=P_l}^{Q_l} 2^{-\frac{\nu}{2}} W_l(i, j) s(x + i, y + j) \\ + \left(1 - 2^{-\frac{\nu}{2}}\right) W_l(0, 0) s(x, y), l = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (2.72)$$

Où,

$$\begin{cases} M_1 = M_6 = M_7 = P_3 = P_5 = P_7 = -2m \\ M_3 = M_4 = P_1 = P_2 = -m \\ M_2 = M_5 = M_8 = N_1 = N_6 = N_7 = P_4 = P_6 = P_8 = Q_3 = Q_5 = Q_7 = 0 \\ N_3 = N_4 = Q_1 = Q_2 = m \\ N_2 = N_5 = N_8 = Q_4 = Q_6 = Q_8 = 2m \end{cases} \quad (2.73)$$

Alors,

$$s(x, y) = \frac{\sum_{l=1}^8 S_l(x, y)}{4 \left[ \sum_{k=0}^n C_{sk} + \sum_{k=1}^n 2^{-\frac{\nu}{2}} C_{sk} + C_{s0} \right]} \quad (2.74)$$

Où,  $C_{sk}$  sont les coefficients du masque qui se calculent par :

$$C_{sk} = -\frac{1}{2 \cos(\pi\nu/2) h^\nu} \omega_k, k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.75)$$

- **Deuxièmement** : pour  $1 < \nu < 2$  on définit les coefficients du masque FCD-2 par :

$$C_{s0} = -\frac{1}{2 \cos(\pi\nu/2) h^\nu} \frac{(\nu - 1)\Gamma(1 - \nu/2)}{\Gamma(1 + \nu/2) \Gamma(2 - \nu)} \quad (2.76)$$

$$C_{sk} = -\frac{1}{2 \cos(\pi\nu/2) h^\nu} \frac{(-1)^k \nu (\nu - 1) \Gamma(\nu/2) \Gamma(1 - \nu/2)}{\Gamma(\nu/2 - k + 1) \Gamma(\nu/2 + k + 1) \Gamma(2 - \nu)} \quad (2.77)$$

Pour  $k = 1, 2, 3, \dots, n$

La Figure 2.6 illustre les résultats du filtrage par application de l'algorithme FCD-1 d'ordre fractionnaire 0.5 avec un masque de  $3 \times 3$ .



Figure 2.6 : Filtrage avec l'algorithme FCD-1 d'ordre 0.5.

#### 2.4.4 Segmentation robuste par dérivation d'ordre fractionnaire

Dans VijayaSaradhi et al. [95] les auteurs proposent un masque pour la segmentation des vaisseaux sanguins dans la rétine oculaire. C'est un masque basé sur la dérivation d'ordre fractionnaire qui permet la détection des contours. La base de départ est l'utilisation de la définition de la différentiation d'ordre fractionnaire qui se trouve dans l'article Soares et al. [96].

Soit une fonction  $y(x)$  et un intervalle d'échantillonnage  $\Delta x$ . Alors, la formulation directe de la différentiation fractionnaire avec un index  $r$  s'exprime par :

$$\frac{d^r y(x)}{dx^r} = \frac{1}{(\Delta x)^r} \left( y(x) - r y(x + \Delta x) + \frac{r(r-1)}{2!} y(x + 2\Delta x) - \dots \right), r \in \mathbb{R} \quad (2.78)$$

Alors que la formulation inverse de la différentiation fractionnaire s'exprime par :

$$\frac{d^r y(x)}{dx^r} = \frac{1}{(\Delta x)^r} \left( y(x) - r y(x - \Delta x) + \frac{r(r-1)}{2!} y(x - 2\Delta x) - \dots \right), r \in \mathbb{R} \quad (2.79)$$

Les masques images pour différents indexes  $r$  sont obtenus en utilisant la méthode expliquée dans Soares et al. [96]. L'amplitude du gradient est calculée au centre du masque en combinant les deux formulations de différentiation directe et inverse. Pour un masque de dimension  $5 \times 5$ , huit directions angulaires de  $a - a$  à  $h - h$  sont obtenues. La Figure 2.7 montre les directions suivant lesquelles la différentiation directe et inverse étant effectuée, ainsi que les intervalles d'échantillonnage suivant ces directions. Les différentes étapes pour le calcul des coefficients du masque de dimension  $5 \times 5$  sont énumérées ci-après.

1. Calculer les intervalles d'échantillonnage spatial notés  $T_a, T_b, T_c, T_d, T_e, T_f, T_g$ , et  $T_h$  pour chaque direction de  $a - a$  à  $h - h$  en utilisant les équations suivantes :

$$\begin{cases} T_a = T_e = 1.0 \\ T_b = T_d = T_f = T_h = \sqrt{4T_a^2 + T_e^2} = \sqrt{5} \\ T_c = T_g = \sqrt{T_a^2 + T_e^2} = \sqrt{2} \end{cases} \quad (2.80)$$

2. Calculer les coefficients de l'opérateur gradient  $a_i, i = 0.1.2$  en utilisant l'expression suivante :

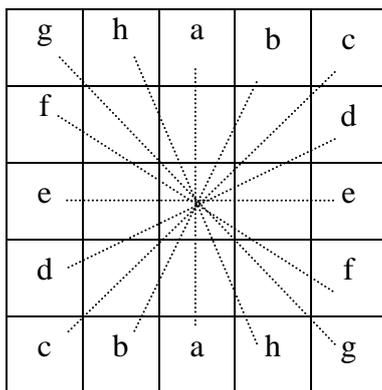
$$a_i(-1)^i \binom{r}{i} \quad (2.81)$$

3. Calculer l'ensemble des coefficients de l'opérateur de détection des contours en utilisant les coefficients suivants :

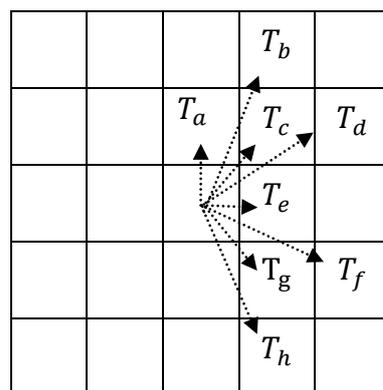
$$A_i = \frac{a_i}{T_a^r}, B_i = \frac{a_i}{T_b^r}, C_i = \frac{a_i}{T_c^r}, D_i = \frac{a_i}{T_d^r} \quad (2.82)$$

$$E_i = \frac{a_i}{T_e^r}, F_i = \frac{a_i}{T_f^r}, G_i = \frac{a_i}{T_g^r}, H_i = \frac{a_i}{T_h^r} \quad (2.83)$$

$$P_i = \sum_{x=a}^{x=h} \frac{2}{T_x^r} \quad (2.84)$$



Les 8 directions



Echantillonnage dans les 8 directions

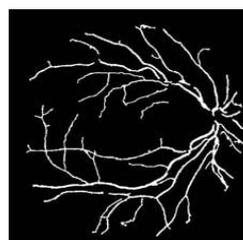
Figure 2.7 : Masque différentiateur d'ordre fractionnaire.

$G_2$	$H_1$	$A_2$	$B_1$	$C_2$
$F_1$	$G_1$	$A_1$	$C_1$	$D_1$
$E_2$	$E_1$	$P$	$E_1$	$E_2$
$D_1$	$C_1$	$A_1$	$G_1$	$F_1$
$C_2$	$B_1$	$A_2$	$H_1$	$G_2$

Figure 2.8 : Forme générale du masque différentiateur d'ordre fractionnaire.



Image originale



Résultat de segmentation

Figure 2.9 : Effet de segmentation robuste par dérivation d'ordre fractionnaire avec  $r = 0.98$ .

### 2.4.5 Détection des contours par différentiation d'ordre fractionnaire

La détection des contours est une tâche essentielle en traitement d'image et de la vision par ordinateur. Classiquement, cette tâche s'achève par la méthode du gradient ou du Laplacien. En effet, ces méthodes ont des effets secondaires tels que l'élargissement des bords et la sensibilité aux bruits qui se répercutent sur la qualité du contour. Alors, dans Mathieu et al. [32], on a introduit un détecteur (CRONE : Contour Robuste d'Ordre Non Entier) basé sur la différentiation fractionnaire qui se caractérise par la sélectivité et la robustesse aux bruits. Dans ce travail les auteurs appliquent la dérivée fractionnaire à une transition de type parabolique, et en particulier, comparer l'abscisse de son maximum à

l'abscisse du point d'inflexion de cette transition en Figure 2.10. Cette transition de type parabolique est décrite analytiquement par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ f(x) = ax^2 & \text{pour } 0 \leq x \leq x_0 \\ f(x) = -ax^2 + 4ax_0x - 2ax_0^2 & \text{pour } x_0 \leq x \leq 2x_0 \\ f(x) = 2ax_0^2 & \text{pour } x \geq 2x_0 \end{cases} \quad (2.85)$$

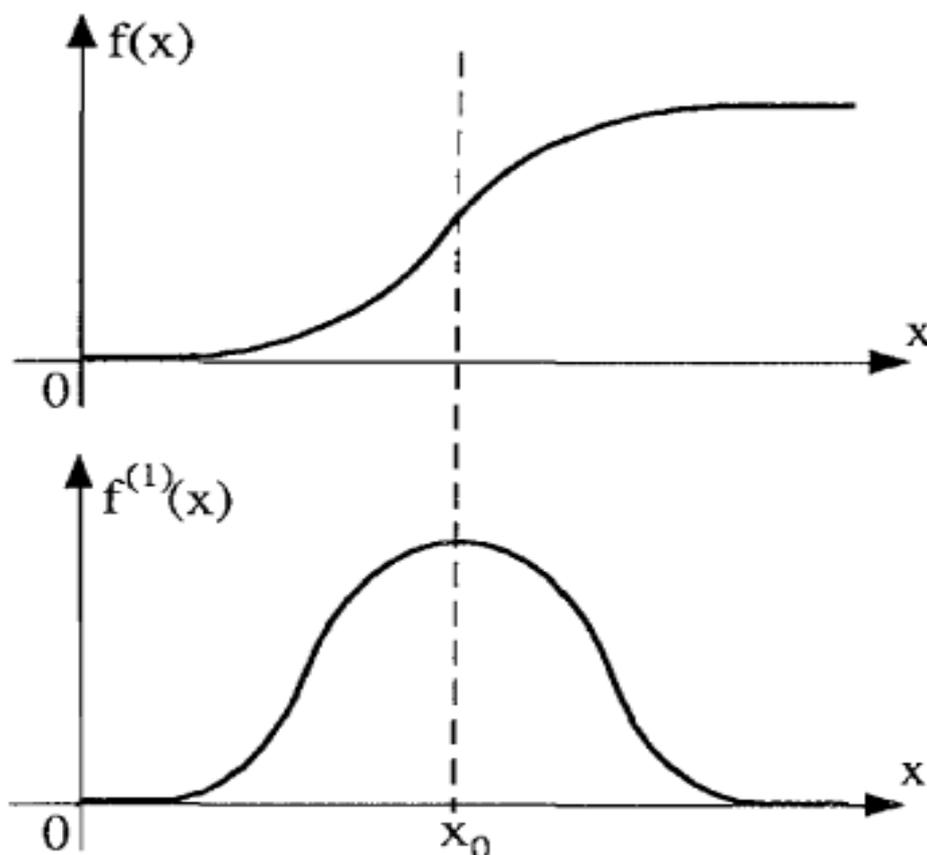


Figure 2.10 : Transition de type parabolique.

La dérivée d'ordre  $n$  de cette transition parabolique au point  $x = x_0$  est donnée par :

$$\left[ \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \right]_{x=x_0} = \frac{2a}{\Gamma(-n+2)} x_0^{-n+1} \quad (2.86)$$

Notons que dans le cas où  $n \in [0,1[$ , l'abscisse du maximum de la dérivée fractionnaire ne correspond pas à celle du point d'inflexion, et le décalage entre ces deux abscisses reste inférieur à  $x_0$ . Alors que dans le cas où  $n \in ]1,2[$ , l'abscisse du maximum de la dérivée fractionnaire correspond bien à celle du point d'inflexion, et la sélectivité dans la détection augmente. En appliquant le formalisme de Cauchy, le calcul de la dérivée fractionnaire d'ordre  $n$  d'une fonction  $f(x)$  est donné par Erdelyi [97,98]:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{pour } x \leq 0 \\
 f^{(n)}(x) = \frac{2a}{\Gamma(-n+3)} x^{-n+2} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq x_0 \\
 f^{(n)}(x) = \frac{-4a}{\Gamma(-n+3)} (x-x_0)^{-n+2} + \frac{2a}{\Gamma(-n+3)} x^{-n+2} \quad \text{pour } x_0 \leq x \leq 2x_0 \\
 f^{(n)}(x) = \frac{-4a}{\Gamma(-n+3)} (x-x_0)^{-n+2} + \frac{2a}{\Gamma(-n+3)} x^{-n+2} \\
 \quad + \frac{2a}{\Gamma(-n+3)} (x-2x_0)^{-n+2} \quad \text{pour } x \geq 2x_0
 \end{array} \right. \quad (2.87)$$

### 2.4.6 Stratégie pour l'augmentation de la sélectivité

La direction de la sélectivité d'un point d'inflexion  $S_N$ , peut être définie comme l'inverse de la largeur de bande  $\Delta x$ , évalué à  $N\%$  de la réponse maximale du détecteur Figure 2.11. Le principe est d'améliorer la sélectivité de detection du point d'inflexion. La stratégie pour cette amélioration consiste à schématiser un opérateur où la réponse à un échelon parabolique présente un point de rebroussement qui se traduit par une pente infinie, de part et d'autre de l'abscisse du point d'inflexion.

$$S_N = \frac{1}{\Delta x} \quad (2.88)$$

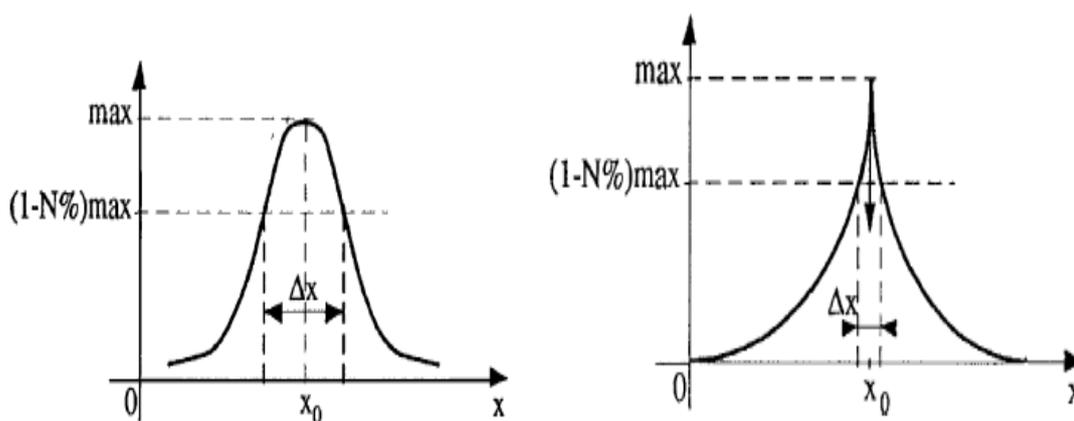


Figure 2.11 : Augmentation de la sélectivité par création d'un point de rebroussement.

### 2.4.7 Méthode de réalisation du détecteur CRONE

On a vu que, lorsque l'ordre de la dérivation fractionnaire est compris entre 0 et 1, alors, l'abscisse du maximum de cette dernière ne coïncide pas avec celle du point d'inflexion.

Alors, on s'intéresse à réaliser le détecteur CRONE uniquement quand l'ordre de dérivation est entre 1 et 2. Car dans ce cas, on montre que l'abscisse du maximum de la dérivée correspond à l'abscisse du point d'inflexion de la transition parabolique. En plus, la pente calculée avec  $x$  croissant est infinie à droite du point d'inflexion, elle l'est aussi à gauche du point d'inflexion lorsque elle est calculée avec  $x$  décroissant.

Pour l'implémentation du détecteur CRONE, on soustrait la dérivée calculée avec  $x$  décroissant à la dérivée calculée avec  $x$  croissant pour créer ainsi un point de rebroussement. Alors dans ce cas, l'opérateur spatial caractérisant le détecteur CRONE désignée par  $D_{\leftrightarrow}^n$  s'écrit comme suit :

$$D_{\leftrightarrow}^n f(x) = D_{\rightarrow}^n f(x) - D_{\leftarrow}^n f(x) \quad (2.89)$$

Où,  $D_{\rightarrow}^n$  et  $D_{\leftarrow}^n$  désignent la dérivée fractionnaire calculée avec  $x$  croissant et  $x$  décroissant respectivement. Le résultat obtenu forme un masque centré de dimension  $(2m + 1)$ , qui peut être étendu à deux dimensions dont les composantes horizontale et verticale sont données ci-dessous.

$$[+a_m \dots + a_1, 0, -a_1 \dots - a_m] \quad (2.90)$$

$$[+a_m \dots + a_1, 0, -a_1 \dots - a_m]^T \quad (2.91)$$

Les performances du détecteur CRONE sont exprimées en termes de la sélectivité et de la robustesse aux bruits.



Image originale



Résultat du détecteur CRONE

Figure 2.12 : Effet d'un détecteur CRONE pour  $n = 0.8$ .

## 2.5 Application des équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire

Le filtrage de l'image au moyen des équations différentielles d'ordre fractionnaire est pour la première fois considéré en traitement d'images. Parallèlement à l'utilisation des équations aux dérivées partielles d'ordre entier, on utilise les mêmes équations mais la différentiation est faite d'ordre fractionnaire.

### 2.5.1. Equation de diffusion de la chaleur d'ordre fractionnaire

Dans le filtrage d'image par diffusion d'ordre fractionnaire est considéré en premier lieu par Cuesta et Finat [99], où une généralisation de l'équation de la chaleur a été mise en œuvre comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(t, \mathbf{x}) = \Delta u(t, \mathbf{x}), & (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \partial_t u(0, \mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, \mathbf{x}) = 0, & (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial\Omega \end{cases} \quad (2.92)$$

Où,  $\partial_t^\alpha$  est la dérivée fractionnaire par rapport au temps d'ordre  $1 < \alpha < 2$  au sens de Riemann-Liouville. En intégrant membre à membre l'expression précédente, on obtient :

$$u(t, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Delta u(s, \mathbf{x}) ds \quad (2.93)$$

Aussi, avec les conditions aux limites homogènes de Neumann, l'équation précédente peut se mettre sous la forme compacte suivante :

$$u(t, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \partial^{-\alpha} \Delta u(t, \mathbf{x}) \quad (2.94)$$

Où,  $\partial^{-\beta}$  pour  $\beta > 0$ , est l'intégrale fractionnaire d'ordre  $\beta \in \mathbb{R}^+$  au sens de Riemann-Liouville.

Soit  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , cet intégrale est définie comme intégrale de convolution et s'écrit :

$$\partial^{-\beta} g(t) = \int_0^t k_\beta(t-s)g(s)ds, \quad t \geq 0 \quad (2.95)$$

Où,  $k_\beta(t) = t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$ , pour  $t > 0$  Kilbas [100].

Maintenant la définition de la dérivée fractionnaire d'ordre  $\beta \geq 0$  est

$$\partial^\beta g(t) = \frac{d^m}{dt^m} \partial^{\beta-m} g(t), t \geq 0 \quad (2.96)$$

Où  $m \in \mathbb{N}, m - 1 < \beta \leq m$ .

Dans le cas où  $\alpha = 1$  le système d'équations précédent (2.92) représente une interpolation linéaire de l'équation (parabolique) de la chaleur, et une interpolation linéaire de l'équation (hyperbolique) de l'onde dans le cas où  $\alpha = 2$ .

- **Discrétisation spatiale**

Considérons maintenant la discrétisation spatiale du Laplacien figurant dans l'équation différentielle (2.92). On adopte le schéma de la différence centralisée avec une maille de dimension  $h > 0$ . De telle manière que, pour une image de dimension  $M \times M$ ,  $\Delta$  se transforme en une matrice penta-diagonale  $\Delta_h$  de dimensions  $M^2 \times M^2$ , et  $u(t, x)$  est transformé en une fonction de valeurs vectorielles  $u(t)$  de dimension  $M^2 \times 1$ , et qui représente le vecteur d'arrangement des pixels image au temps  $t$ . Cette approche consiste à remplacer l'ordre de dérivation  $\alpha$  de l'équation (2.92) par plusieurs valeurs pour chaque pixel de l'image. Cette approche correspond à l'évaluation matricielle de l'équation linéaire de Voltera.

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \mathbf{K}(t-s) \mathbf{u}(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.97)$$

Où  $u_0$  est un arrangement vectoriel de données initiales (image bruitée), et le noyau de convolution est défini par :

$$\mathbf{K}(t) = I(t) \cdot \Delta_h \quad (2.98)$$

Où,

$$I(t) = \begin{bmatrix} \frac{t^{\alpha 1}}{\Gamma(\alpha 1 + 1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{t^{\alpha 2}}{\Gamma(\alpha 2 + 1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{t^{\alpha M^2}}{\Gamma(\alpha M^2 + 1)} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Et,  $\alpha < \alpha_j < 2$ , pour  $j = 1, 2, \dots, M^2$ ,  $\mathbf{K}$  est une évaluation matricielle de fonction.

- **Discrétisation temporelle**

Dans le cas de la discrétisation d'une fonction sectorielle on adopte la méthode de Lubich-Ostermann [101]. Soit une fonction complexe  $G$  définie dans un secteur, s'il existe  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , et  $\mu, M > 0$  de telle sorte que  $G$  est analytique dans ce secteur.

$$S_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\arg(\lambda - c)| < \pi - \theta\} \quad (2.100)$$

Et

$$|G(\lambda)| \leq \frac{M}{|\lambda|^\mu}, \lambda \in S_\theta \quad (2.101)$$

En vertu de ces deux considérations, la Transformée inverse de Laplace de  $G$  peut être donnée par la formule,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda t} G(\lambda) d\lambda \quad (2.102)$$

Où  $\gamma$  est un chemin complexe reliant  $-i\infty$  à  $+i\infty$ .

La Transformée de Laplace de  $\mathbf{K}$  existe comme une fonction de valeurs matricielles, si  $\tilde{\mathbf{K}}$  désigne cette Transformée, alors l'inverse sera de la forme :

$$\mathbf{k}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda t} \tilde{\mathbf{K}}(\lambda) d\lambda \quad (2.103)$$

Où  $\gamma(r) = a + ri$ ,  $-\infty < r < +\infty$ , pour  $a \in \mathbb{R}^+$ .

- **Quadrature de convolution**

Pour le calcul de l'intégrale on utilise la quadrature de convolution inverse d'Euler. Soit  $\tau > 0$  le pas temporel de la discrétisation. L'intégrale de convolution sera :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \mathbf{K}(t-s) \mathbf{u}(s) ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda(t-s)} \tilde{\mathbf{K}}(\lambda) d\lambda \mathbf{u}(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{\mathbf{K}}(\lambda) Y(\lambda, t) d\lambda \end{aligned} \quad (3.104)$$

Où  $(\lambda, t)$  est la solution standard de l'équation différentiel ordinaire :

$$y'(t) = \lambda y(t) + u(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad y(0) = 0 \quad (2.105)$$

La quadrature de convolution inverse d'Euler est obtenue comme suit :

$$\int_0^{t_n} K(t_n - s)\mathbf{u}(s) ds \approx \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{K}(\lambda) Y_n(\lambda) d\lambda \quad (2.106)$$

Où  $t_n = n\tau$ ,  $Y_n(\lambda)$  étant l'approximation de  $Y(\lambda, t_n)$ , dans ce cas la convolution de quadrature sera ainsi :

$$\int_0^{t_n} K(t_n - s)\mathbf{u}(s) ds \approx \sum_{j=0}^n \mathbf{Q}_{n-j}^{(\alpha)} \mathbf{u}(t_j) \quad (2.107)$$

Où les pondérations  $\mathbf{Q}_j^{(\alpha)}$  sont définies en fonction des coefficients du polynome caractéristique inverse d'Euler  $\rho(z)/\delta(z) = z/(z-1)$  évalué à  $\xi = 1/z$ . En fait, ces coefficients deviennent à :

$$\tilde{K}\left(\frac{1-\zeta}{\tau}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Q}_j^{(n)} \zeta^j \quad (2.108)$$

Qui s'expriment explicitement par :

$$\mathbf{Q}_j^{(n)} = \tau^\alpha \begin{vmatrix} \binom{\alpha_1}{j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \binom{\alpha_2}{j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \binom{\alpha M^2}{j} \end{vmatrix} \cdot \Delta_h, j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.109)$$

Les résultats de simulation donnés par les auteurs sont illustrés en Figure 2.13. Il s'agit du filtrage de l'image 'Lady' bruitée avec un bruit Gaussien de variance  $\sigma = 25$ .



Image originale

Image bruitée

Perona-Malik

ED Fractionnaire

Figure 2.13 : Résultats du filtrage par la méthode de Perona-Malik et la méthode de l'équation de diffusion d'ordre fractionnaire.

### 2.5.2 Equation de diffusion de la lumière d'ordre fractionnaire

Dans [38 ] Blackledge a généralisé l'opérateur de diffusion de la lumière,

$$\nabla^2 - \sigma \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.110)$$

Ayant la forme fractionnaire figurant dans Hilfer [102, 103]

$$\nabla^2 - \sigma^q \frac{\partial^q}{\partial t^q} \quad (2.111)$$

Où,  $q \in [1,2]$  et  $D^q = 1/\sigma^q$  est la diffusivité fractionnaire.

La solution de l'équation différentielle fractionnaire de ce type, requière l'application du calcul fractionnaire comme a déjà été formulé dans les travaux de Oldham et spanier [104], Miller et Ross [105], Dold et Eckmann [106], Samko et al. [107], et Kiryakova [108].

Considérons l'équation de diffusion fractionnaire à deux dimentions pour l'intensité de la lumière  $I(x, y, t)$ , dans le plan image localisé au plan  $z$  définie comme suit :

$$\nabla^2 I(\mathbf{r}, t) - \sigma^q \frac{\partial^q}{\partial t^q} I(\mathbf{r}, t) = I_0(\mathbf{r}, t) \quad (2.112)$$

Où,  $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{X}}x + \hat{\mathbf{Y}}y$ ,  $r \equiv |\mathbf{r}|$ , et  $I_0(\mathbf{r}, t)$  la fonction source bidimensionnelle. En utilisant l'opérateur de Fourier pour la dérivée fractionnaire, on peut transformer cette équation et la mettre sous la forme :

$$(\nabla^2 + \Omega_q^2) \tilde{I}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{I}_0(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.113)$$

Où,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{I}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{r}, t) \exp(-i \omega t) dt \\ \tilde{I}_0(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\mathbf{r}, t) \exp(-i \omega t) dt \\ \Omega_q^2 = -i\omega\sigma, \quad \Omega_q = \pm i(i\omega\sigma)^{q/2} \end{array} \right. \quad (2.114)$$

La fonction de Green solution de cette équation dans un domaine infini est,

$$\tilde{I}(\mathbf{r}, \omega) = g(r, \omega) \otimes_2 \tilde{I}_0(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.115)$$

Où  $g$  résulte de la fonction de Green donnée par Evans et al.[109] (pour  $|\Omega_q r| \gg 1$  et en ignorant le facteur d'échelle).

$$g(r, \omega) \cong \frac{\exp(i\Omega_q r)}{\sqrt{\Omega_q r}} \quad (2.116)$$

Pour  $\Omega_q = i(i\omega\sigma)^{q/2}$ , l'inverse de Fourier donne la fonction de Green (obtenue en écrivant la fonction exponentielle sous forme d'une série) dépendante du temps suivante :

$$G(r, t) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{\sigma^{\frac{q}{4}} t^{1-\frac{q}{4}}} - \sqrt{r} \sigma^{\frac{q}{4}} \delta^{\frac{q}{4}}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} r^{\frac{2n+1}{2}} \sigma^{\frac{3nq}{4}} \delta^{\frac{3nq}{4}}(t) \quad (2.117)$$

La solution de  $I(\mathbf{r}, t)$  est donnée par :

$$I(\mathbf{r}, t) = G(r, t) \otimes_2 \otimes_t I_0(\mathbf{r}, t) \quad (2.118)$$

Où,  $\otimes_t$  représente la convolution intégrale sur le temps  $t$ . En particulier, notons que  $\sigma \rightarrow 0$  alors,

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{r} \sigma^{\frac{q}{4}} t^{1-\frac{q}{4}}} \quad (2.119)$$

Alors, pour  $I_0(\mathbf{r}, t) = I_0(x, y)\delta(t)$  on peut considérer une solution à l'équation de diffusion fractionnaire bidimensionnelle de la forme :

$$I(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/4}} \otimes_2 I_0(x, y) \quad (2.120)$$



Image originale      Déconvolution

Figure 2.14 : Effet de la déconvolution basée sur la diffusion d'ordre fractionnaire.

### 2.5.3 Equation de diffusion anisotrope

Dans Bai et Xiang [37], les auteurs proposent des équations de diffusion anisotrope d'ordre fractionnaire faisant partie des équations d'une fonctionnelle de cout d'Euler-Lagrange. Les pseudo-équations différentielles mènent à une interpolation naturelle, entre les équations de Perona-Malik [57] et les équations de diffusion anisotropes du quatrième ordre dans You et Kaveh [110]. Dans ce travail, les auteurs mettent en œuvre la Transformée de Fourier d'ordre fractionnaire pour le calcul des différences d'ordre fractionnaire. Au départ, considérons le schéma de la diffusion anisotrope classique formulé par Perona-Malik [57] dans lequel le processus de lissage est réalisé par les équations différentielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(c(|\nabla u|^2)\nabla u) \quad (2.121)$$

Où  $c(\cdot)$  représente le coefficient de diffusion

Cette équation est associée à la fonctionnelle d'énergie :

$$E(u) = \int_{\Omega} f(|\nabla u|)d\Omega \quad (2.122)$$

Où  $\Omega$  est le support de l'image, et  $f(\cdot) \geq 0$  une fonction décroissante associée au coefficient de diffusion tel que :

$$c(s) = \frac{f'(\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \quad (2.123)$$

La diffusion anisotrope est maintenant vue comme un processus dissipatif d'énergie qui demande le minimum de fonctionnelle d'énergie. Considérons la fonctionnelle définie dans l'espace continue des images sur le support  $\Omega$  suivante :

$$E(u) = \int_{\Omega} f(|D_{\alpha}u|)d\Omega \quad (2.124)$$

Où,  $D_{\alpha}$  denote l'opérateur d'ordre fractionnaire défini par :

$$\begin{cases} D_{\alpha}u = (D_{\alpha x}u, D_{\alpha y}u) \\ |D_{\alpha}u| = \sqrt{D_{\alpha x}^2 + D_{\alpha y}^2} \end{cases} \quad (2.125)$$

On peut calculer les équations d'Euler-Lagrange de ce problème d'optimisation de la manière suivante :

Prenons une fonction de test  $\eta \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$ , et définissons l'équation suivante :

$$\Phi(a) = \int_{\Omega} f(|D_{\alpha}u + aD_{\alpha}\eta|) dx dy \quad (2.126)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \Phi'(0) = \frac{d}{da} \int_{\Omega} f(|D_{\alpha}u + aD_{\alpha}\eta|) dx dy \Big|_{a=0} = \\ \int_{\Omega} (D_{\alpha x}^*(c(|D_{\alpha}u|^2)D_{\alpha x}u) + (D_{\alpha y}^*(c(|D_{\alpha}u|^2)D_{\alpha y}u))\eta) dx dy \end{aligned} \quad (2.127)$$

Pour tout  $\eta \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$ , ou  $D_{\alpha x}^*$  est l'adjointe de  $D_{\alpha x}$  de meme  $D_{\alpha y}^*$  est l'adjointe de  $D_{\alpha y}$ . Alors, l'équation d'Euler-Lagrange est :

$$D_{\alpha x}^*(c(|D_{\alpha}u|^2)D_{\alpha x}u) + D_{\alpha y}^*(c(|D_{\alpha}u|^2)D_{\alpha y}u) = 0 \quad (2.128)$$

Notons que, dans notre Euler-Lagrange équation pour un inconnu  $u \in H^{2\alpha}(\Omega)$ , nous allons premièrement prolonger  $u$  à  $Eu \in H^{2\alpha}(\mathbb{R}^2)$  par l'opérateur de prolongation  $E$  quand travaillant avec la Transformée de Fourier  $\hat{u}$  de  $u$  et alors imposons  $D_{\alpha}u \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ , où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega$ . Quand  $\alpha = 1$  on trouve l'équation de Perona-Malik, quand  $\alpha = 2$  on trouve l'équation de diffusion du quatrième ordre, quand  $1 \leq \alpha \leq 2$ , ceci mène à une interpolation naturelle entre les deux, laquelle nous nous interessons dans cette section.



Image originale



Filtre fractionnaire



Perona-Malik

Figure 2.15 : Débruitage d'une image par un filtre de diffusion anisotrope d'ordre fractionnaire et par un filtre anisotrope d'ordre non fractionnaire par la méthode de Perona-Malik.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art concernant l'application de la dérivation d'ordre fractionnaire au traitement d'images, tout en commençant par quelques définitions. Dans le cas du filtrage, nous avons présenté quelques méthodes spatiales et fréquentielles. Les opérateurs d'ordre fractionnaire utilisés comme masques de convolution, sont construits en utilisant les approximations numériques de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces opérateurs sont appliqués dans le domaine du filtrage, de la segmentation des contours, et le rehaussement des textures. Les équations différentielles d'ordre fractionnaire qui sont obtenues en discrétisant les équations différentielles classiques telles que, l'équation de la chaleur d'ordre fractionnaire et l'équation de la diffusion de la lumière d'ordre fractionnaire sont aussi appliquées dans le domaine de traitement d'images.

## Chapitre 3

# Contribution au traitement d'images basé sur la dérivation fractionnaire

### 3.1 Introduction

Dans la plus part des techniques développées à ce jour, plusieurs opérateurs locaux de dérivation du premier ordre et du second ordre sont utilisés. Ils sont alors suivis respectivement d'une recherche des maxima locaux et des passages par zéro. Toutefois, ces opérateurs ne donnent souvent pas, à eux seuls, de bons résultats sur une image réelle où les changements d'intensité sont rarement nets et abrupts. Une opération de seuillage et un suivi de contours sont en effet nécessaires pour éliminer le bruit et affiner les contours à une épaisseur d'un pixel. Depuis quelques années, on assiste cependant à de nouvelles approches en extraction des contours qui procèdent par optimisation des critères [39, 47, 48] prenant en compte un modèle prédéfini du contour à détecter. Ces approches qui permettent une meilleure formulation du problème se sont avérées nettement plus performantes que les toutes premières techniques proposées. Une alternative à l'approche classique est basée sur la différentiation d'ordre fractionnaire qui semble un outil récent utilisé dans le traitement du signal [18, 19] et dont plusieurs travaux sont déjà entrepris dans la segmentation de l'image en particulier [29], [95].

#### 3.1.1 Plan de la contribution

Au cours de cette contribution, dans un premier temps, nous allons exposer d'une manière assez détaillée la méthode suivie concernant la construction d'un opérateur d'ordre fractionnaire. Cet opérateur est très souvent appelé masque de convolution dans le contexte du traitement d'images. Pour ce fait, notre approche sera basée sur l'utilisation de la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire discrète formulée par Grünwald-Letnikov.

Dans un deuxième temps, nous allons donner quelques exemples d'applications au traitement d'images en utilisant l'opérateur approprié. Parmi ces applications nous citons : le filtrage, la détection des contours par l'approche dérivative d'ordre fractionnaire du premier et du second ordre, et enfin la segmentation multi-échelles des contours. Pour fonder l'évaluation de notre contribution, nous avons instauré une stratégie de comparaison en implémentons en parallèle les algorithmes classiques nécessaires pour chaque cas d'application. Alors, pour comparer les applications du filtrage basé sur l'approche des

masques fractionnaires, nous avons implémenté en parallèle le filtre Gaussien, le filtre médian, et le filtre de la moyenne. Pour comparer la détection des contours par la méthode dérivative fractionnaire du premier ordre, nous avons implémenté en parallèle l'algorithme basé sur la méthode classique du gradient satisfaisant les critères de Canny [39]. Enfin, pour comparer la détection des contours par la méthode dérivative fractionnaire du second ordre, nous avons implémenté en parallèle l'algorithme basé sur la méthode classique du Laplacien qui s'appuie sur le concept LoG (Laplacian of Gaussian) entrepris par Marr et Hildreth [4].

### 3.1.2 But de la contribution

A l'issue de cette contribution, nous allons mettre en évidence les performances des opérateurs d'ordre fractionnaire appliqués au traitement d'images. Caractérisés par leur Robustesse aux bruits et leur sélectivité de détection [30, 32, 69, 86, 95], les opérateurs basés sur la dérivation d'ordre fractionnaire sont susceptibles d'assumer la fonction de filtrage d'une manière implicite. Nous allons montrer que l'utilisation de ces opérateurs dans les algorithmes de détection des contours permet de dépasser l'étape de lissage par filtrage Gaussien faite préalablement dans les détecteurs classiques basés sur la dérivation entière. Par conséquent, les calculs seront plus simples causant ainsi la réduction du temps d'exécution qui est un facteur essentiel dans les applications en temps réel.

.

### 3.1.3 Outils d'implémentation et de simulation

L'implémentation et la simulation se sont déroulées dans l'environnement du système d'exploitation Windows 32 bits. Le code source est écrit en langage Visual C Sharp (C #) supporté par la plate-forme Microsoft Visual Studio (SDK 2010). Le programme tourne sur une machine de bureau équipée d'un processeur Intel Pentium (R) Dual CPU 1.8 MHz. La machine est dotée d'un espace 2GB de mémoire RAM.

Pour la visualisation des images de simulation, on a développé une interface graphique faisant l'objet de l'implémentation de quelques opérations du traitement d'images. Parmi ces opérations, on cite le filtrage et la détection des contours. Cette interface présente des commandes permettant la sélection des opérations désirées de traitement d'images. La Figure 3.1 représente une illustration de l'interface en question montrant un exemple de simulation de la détection des contours d'une image.

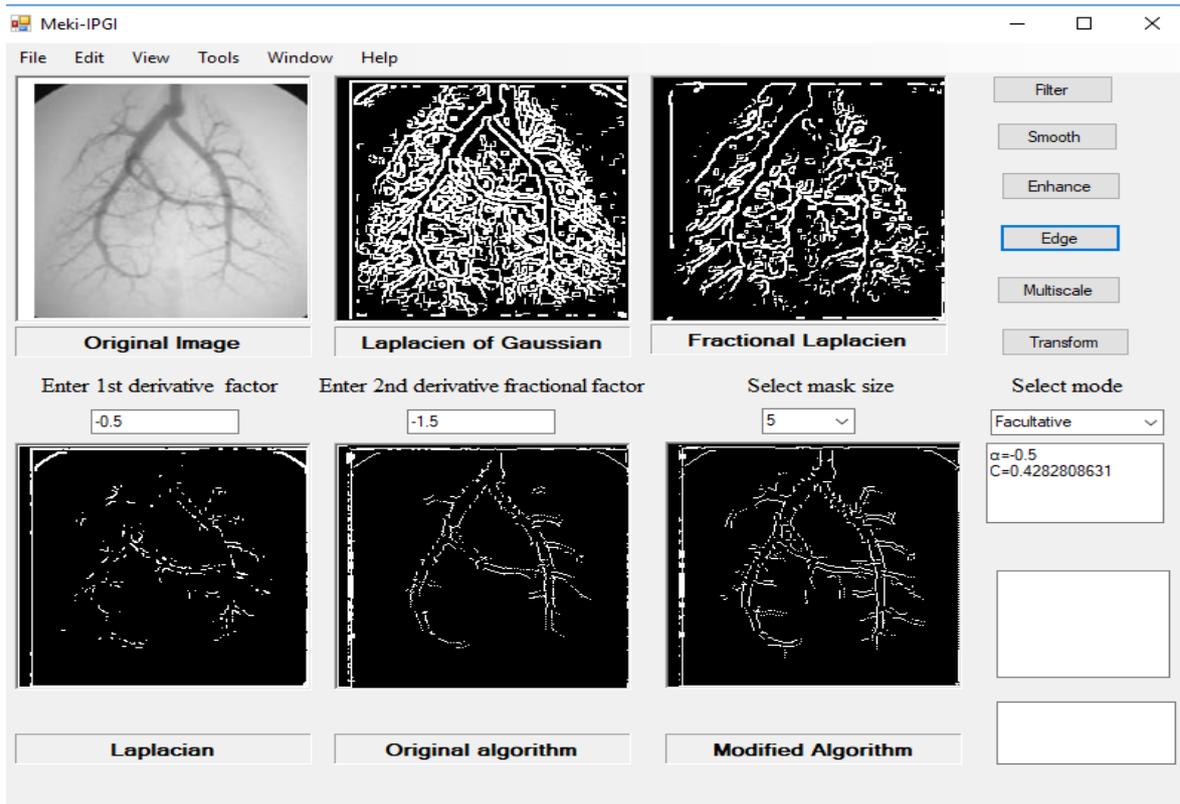


Figure 3.1 : Interface graphique de simulation.

## 3.2 Définitions

Dans cette section, nous allons expliciter la méthode de construction des opérateurs d'ordre fractionnaire que nous allons utiliser dans les différentes applications. Comme ces opérateurs sont basés sur l'approximation numérique de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par Grünwald-Letnikov, alors, nous allons introduire quelques définitions utiles ci-dessous.

### 3.2.1 Définition de Riemann-Liouville

Sur un domaine  $a < t < b$ , la dérivée d'ordre fractionnaire peut être exprimée en fonction des échantillons situés dans le demi domaine  $[a, t]$  (à gauche de  $t$ ), ou en fonction des échantillons situés dans le demi domaine  $[t, b]$  (à droite de  $t$ ). Pour des raisons de simplification, on préfère utiliser les acronymes d'origine anglo-saxonne LH (Left-Handed) et RH (Right-Handed) pour désigner respectivement, le sens de dérivation à gauche du point  $t$  et le sens de dérivation à droite du point  $t$ . D'après [111], les dérivées d'ordre fractionnaire LH et RH de Riemann-Liouville sont données respectivement par les deux relations suivantes :

$${}^R_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

$${}^R_t D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (-D)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

Où  $D = d/dt$ ,  $\alpha > 0$ , et  $n-1 < \alpha < n$ .

### 3.2.2 Définition de Caputo

De la même manière, les dérivées d'ordre fractionnaire LH et RH de Caputo sont données respectivement d'après [111] par les deux relations suivantes :

$${}^C_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} D^n f(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

$${}^C_t D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} (-D)^n f(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

### 3.2.3 Définition de Grünwald-Letnikov

Soit  $0 < \alpha < 1$ , alors, les dérivées d'ordre fractionnaire LH et RH de Grünwald-Letnikov sont données respectivement d'après [112] par les deux relations suivantes :

$${}^G_a D_t^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t-kh) \quad (3.5)$$

$${}^G_t D_b^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t+kh) \quad (3.6)$$

Où  $\binom{\alpha}{k}$  est la généralisation des coefficients binomiaux.

## 3.3 Synthèse des opérateurs d'ordre fractionnaire

Dans la synthèse, nous nous basons sur la combinaison des deux définitions LH et RH. Pour la segmentation des contours, on utilise la différence LH-RH. Tandis que pour le débruitage, on utilise la somme LH+RH. Cette considération est motivée par la dépendance locale de l'information dans une image. Alors, ce qui permet de mettre en œuvre la contribution d'une manière symétrique des échantillons de l'image à gauche et à droite du point de dérivation. Notons que le caractère d'intégration ou de la dérivation dépend du

signe du facteur fractionnaire, et se conserve en faisant la différence ou la somme de deux intégrations ou de deux dérivations. Afin de simplifier l'écriture des deux définitions de Grünwald-Letnikov précédentes, considérons  $M + 1$  échantillons d'un signal  $f(t)$ , alors, les deux définitions sont approximées respectivement par :

$${}^{\text{GL}}D_t^\alpha f(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^M \omega_k \cdot f(t - kh) \quad (3.7)$$

$${}^{\text{GL}}D_b^\alpha f(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^M \omega_k \cdot f(t + kh) \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \omega_0 = 1 \\ \omega_k = (-1)^k \frac{(\alpha)(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)}{k!}, \quad k = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.9)$$

En traitement d'images, le pas est généralement  $h = 1$ , alors ce qui donne:

$${}^{\text{GL}}D_t^\alpha f(t) \cong \sum_{k=0}^M \omega_k f(t - k) \quad (3.10)$$

$${}^{\text{GL}}D_b^\alpha f(t) \cong \sum_{k=0}^M \omega_k f(t + k) \quad (3.11)$$

### 3.3.1 Synthèse par la différence

Soit  $D$  la différence entre les dérivées d'ordre fractionnaire LH et RH donnée par :

$$D = \sum_{k=0}^M \omega_k f(t - k) - \sum_{k=0}^M \omega_k f(t + k) \cong \quad (3.12)$$

$$\omega_1 f(t - 1) + \omega_2 f(t - 2) + \dots + \omega_M f(t - N)$$

$$- \omega_1 f(t + 1) - \omega_2 f(t + 2) - \dots - \omega_M f(t + N)$$

Il en résulte,

$$D = \sum_{k=-M}^M a_k \cdot f(t - k) = a * f \quad (3.13)$$

Où  $*$  est l'opérateur de convolution, et  $a_k$  sont les coefficients d'un filtre à réponse impulsionnelle finie tels que :  $a_0 = 0$ ,  $a_k = \omega_k$ ,  $a_{-k} = -\omega_k$ .

Maintenant, considérons une image  $f(x, y)$  où  $(x, y)$  représentent les coordonnées d'un pixel. Si on dénote par  $D_x$  la dérivé dans la direction de  $x$  et par  $D_y$  la dérivée dans la direction de  $y$ , alors, d'après la relation précédente on peut écrire :

$$D_x = \sum_{k=-M}^M a_k \cdot f(x - k, y) \quad (3.14)$$

$$D_y = \sum_{k=-M}^M a_k \cdot f(x, y - k) \quad (3.15)$$

En traitement d'images, la dépendance locale de l'information nécessite la mise en œuvre de la contribution des pixels voisins. Ceci peut être fait par extension des relations précédentes en deux dimensions comme suit :

$$D'_x = \sum_{k=-M}^M \sum_{l=-M}^M h_x(k, l) \cdot f(x - k, y - l) = h_x * f \quad (3.16)$$

$$D'_y = \sum_{k=-M}^M \sum_{l=-M}^M h_y(k, l) \cdot f(x - k, y - l) = h_y * f \quad (3.17)$$

Où  $h_x(k, l) = a_k$  et  $h_y(k, l) = a_l$ , Il s'ensuit que,  $h_x$  et  $h_y = h_x^T$  sont respectivement, les opérateurs horizontal et vertical bidimensionnels d'ordre fractionnaire. Les formes générales des composantes horizontale et verticale du masque fractionnaire soustractif sont représentées en Figure 3.2 ci-dessous.

$h_x$	$\omega_M$	...	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	...	$-\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	...	$-\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	...	$-\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	...	$-\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	...	$-\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	...	$-\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	...	$-\omega_M$

$h_y$

$\omega_M$						
...	...	...	...	...	...	...
$\omega_1$						
0	0	0	0	0	0	0
$-\omega_1$						
...	...	...	...	...	...	...
$-\omega_M$						

Figure 3.2 : Composantes du masque fractionnaire soustractif.

### 3.3.2 Synthèse par la somme

Soit  $S$  la somme des dérivées d'ordre fractionnaire LH et RH donnée par :

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=0}^M \omega_k f(t - k) + \sum_{k=0}^M \omega_k f(t + k) \cong \\
 &\omega_0 f(t) + \omega_1 f(t - 1) + \omega_2 f(t - 2) + \dots + \omega_M f(t - N) \\
 &+ \omega_0 f(t) + \omega_1 f(t + 1) + \omega_2 f(t + 2) + \dots + \omega_M f(t + N)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Il en résulte :

$$S = \sum_{k=-M}^{k=M} b_k \cdot f(t - k) = b * f \tag{3.19}$$

Où  $*$  est l'opérateur de convolution, et  $b_k$  sont les coefficients d'un filtre à réponse impulsionnelle finie tels que :  $b_0 = 2\omega_0$ ,  $b_k = b_{-k} = \omega_k$ .

Maintenant, considérons une image  $f(x, y)$  où  $(x, y)$  représentent les coordonnées d'un pixel. Si on dénote par  $S_x$  la dérivé dans la direction de  $x$  et par  $S_y$  la dérivé dans la direction de  $y$ , alors, d'après la relation précédente on peut écrire :

$$S_x = \sum_{k=-M}^M b_k \cdot f(x - k, y) \tag{3.20}$$

$$S_y = \sum_{k=-M}^M b_k \cdot f(x, y - k) \tag{3.21}$$

Par extension des relations précédentes en deux dimensions on obtient :

$$S'_x = \sum_{k=-M}^M \sum_{l=-M}^M g_x(k, l) \cdot f(x - k, y - l) = g_x * f \quad (3.22)$$

$$S'_y = \sum_{k=-M}^M \sum_{l=-M}^M g_y(k, l) \cdot f(x - k, y - l) = g_y * f \quad (3.23)$$

Où  $g_x(k, l) = b_k$  et  $g_y(k, l) = b_l$ , Il s'ensuit que  $g_x$  et  $g_y = g_x^T$  sont respectivement, les opérateurs horizontal et vertical bidimensionnels d'ordre fractionnaire. Les formes générales des masques  $g_x$  et  $g_y$  sont données en Figure 3.3 ci-après.

$g_x$	$\omega_M$	...	$\omega_1$	$2\omega_0$	$\omega_1$	...	$-\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	$2\omega_0$	$\omega_1$	...	$\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	$2\omega_0$	$\omega_1$	...	$\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	$2\omega_0$	$\omega_1$	...	$\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	$2\omega_0$	$\omega_1$	...	$\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	$2\omega_0$	$\omega_1$	...	$\omega_M$
	$\omega_M$	...	$\omega_1$	$2\omega_0$	$\omega_1$	...	$\omega_M$
$g_y$	$\omega_M$						
	...	...	...	...	...	...	...
	$\omega_1$						
	$2\omega_0$						
	$\omega_1$						
	...	...	...	...	...	...	...
	$\omega_M$						

Figure 3.3 : Composantes du masque fractionnaire additif.

### 3.3.3 Synthèse par la somme et Rotation

L'équation (3.19) nous permet d'obtenir un masque monodimensionnel suivant :

$\omega_M$	...	$\omega_1$	$2\omega_0$	$\omega_1$	...	$\omega_M$
------------	-----	------------	-------------	------------	-----	------------

Figure 3.4 : Masque fractionnaire monodimensionnel additif.

Par rotation successive d'un angle de  $\pi/4$  et superposition dans l'espace  $(2M + 1) \times (2M + 1)$ , on obtient le masque bidimensionnel suivant :

$\omega_M$	0	0	$\omega_M$	0	0	$\omega_M$
0	...	0	...	0	...	0
0	0	$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1$	0	0
$\omega_M$	...	$\omega_1$	$8\omega_0$	$\omega_1$	...	$\omega_M$
0	0	$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1$	0	0
0	...	0	...	0	...	0
$\omega_M$	0	0	$\omega_M$	0	0	$\omega_M$

Figure 3.5 : Masque fractionnaire additif obtenu par rotation.

Quelque soit le type de masque soustractif, additif, ou même additif obtenu par rotation, on peut envisager deux catégories de masques suivant le signe du facteur fractionnaire. En fait, lorsque le facteur fractionnaire est positif, le masque acquière le caractère de différentiation, alors que, si le facteur fractionnaire est négatif, le masque acquière le caractère d'intégration. Un masque type de ce dernier est décrit dans [113] sous l'acronyme FIM (Fractional Integral Mask).

## 3.4 Application au filtrage d'images

Dans les opérations du filtrage, on travaille avec des valeurs négatives du facteur fractionnaire. Car d'une part, ce choix est motivé par les meilleurs résultats obtenus au cours de la simulation par rapport aux mauvais résultats obtenus avec des valeurs positives du facteur fractionnaire, et d'autre part, théoriquement le masque se comporte comme un intégrateur héritant les propriétés d'un filtre passe bas, ne permettant pas l'amplification des bruits contrairement à son homologue différentiateur.

### 3.4.1 Filtrage par masque fractionnaire additif obtenu par rotation

Dans le cas du filtrage, le masque additif obtenu par rotation est mieux adapté. Car, la contribution du pixel de l'image correspondant au pixel central du masque doit être prépondérante. Ceci est remarquable dans le masque utilisé représenté en Figure 3.6 de dimension 5x5 obtenu pour  $\alpha = -0.5$ , où la valeur de l'intensité du pixel de l'image correspondant à la position centrale du masque est pondérée par 8.

0.375	0	0.375	0	0.375
0	0.5	0.5	0.5	0
0.375	0.5	8	0.5	0.375
0	0.5	0.5	0.5	0
0.375	0	0.375	0	0.375

Figure 3.6 : Masque fractionnaire additif obtenu par rotation pour  $\alpha = -0.5$ .

### 3.4.2 Filtrage par masque Gaussien fractionnaire

Par analogie au filtrage Gaussien, nous introduisons une nouvelle approche où l'opérateur de filtrage est obtenu en utilisant la dérivation d'ordre fractionnaire de la fonction gaussienne  $G_\sigma(x, y)$  donnée par la relation 2.59 dans la section 1.6.4 du chapitre 1. Pour le calcul, on se sert de la formule de dérivation étendue à deux dimensions donnée par Nakib [82] suivante:

$$D^\alpha f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha f(x, y) \quad (3.24)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha f(x, y) \approx \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{k=-\lfloor \frac{M}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \sum_{l=-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} p(k, l) f(x - kh, y - lh) \quad (3.25)$$

Tels que :  $\alpha$  est le facteur fractionnaire,  $h$  est le pas d'échantillonnage,  $M$  et  $N$  déterminent les dimensions du masque,  $f(x, y) = G_\sigma(x, y)$ , et enfin,  $p(k, l) = \omega_k(\alpha) \cdot \omega_l(\alpha)$ , avec  $\omega_0(\alpha) = 1$ ,  $\omega_{k+1}(\alpha) = \frac{(k+1)^{-\alpha-1}}{(k+1)} \omega_k(\alpha)$  pour  $k = 0, 1, \dots (M-1)$ . Un exemple type de ce masque de dimension 5x5 pour  $\alpha = -0.5$  est donné en Figure 3.7.

0.267	0.427	0.413	0.427	0.267
0.427	0.474	0.542	0.474	0.427
0.413	0.542	0.587	0.542	0.413
0.427	0.474	0.542	0.474	0.427
0.267	0.427	0.413	0.427	0.267

 Figure 3.7 : Masque Gaussien fractionnaire pour  $\alpha = -0.5$ .

Pour la comparaison, nous avons implémenté trois filtres qui sont : Le Filtre Gaussien de variance 1.2, le filtre médian, et le filtre de la moyenne. Les images de test utilisées sont bruitées avec un bruit gaussien additif de moyenne nulle et de variance 0.01. Pour mesurer la qualité du filtrage, on utilise le rapport signal sur bruit noté PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) qui est le plus utilisé dans la pratique et qui est défini par :

$$PSNR = 20 \log_{10} \left( \frac{(2^n - 1)}{\sqrt{MSE}} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{(2^n - 1)^2}{MSE} \right) \quad (3.26)$$

Où,  $n$  est un entier désignant le nombre de bits de codage de l'image, dans notre cas le niveau du gris des pixels de l'image est codé sur 8 bits, alors que  $MSE$  donné par la relation 3.27 désigne l'erreur quadratique moyenne entre l'image originale  $I(i, j)$  et l'image filtrée  $\hat{I}(i, j)$  après dégradation.  $M$  et  $N$  désignent la largeur et la hauteur de l'image.

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_0^{M-1} \sum_0^{N-1} [\hat{I}(i, j) - I(i, j)]^2 \quad (3.27)$$

### 3.4.3 Filtrage par masque de taille variable

Dans ce cas, on fixe le facteur fractionnaire à  $\alpha = -0.5$  et faisons varier la taille du masque tel qu'on ait les masques de 3x3, 5x5 et 7x7. Les images de test sont entachées par un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance 0.01. Alors, les différents résultats de simulation obtenus sont donnés en PSNR dont l'unité est le décibel (dB), et sont résumés dans les trois tableaux (Tableau 3.1, Tableau 3.2 et Tableau 3.3) ci-dessous.

Pour simplifier la notation dans le contexte de ce chapitre, on adopte les contractions FFA, FFG, FG, FMoy et FMed pour désigner respectivement : Le Filtre Fractionnaire Additif, le Filtre Fractionnaire Gaussien, le Filtre Gaussien, le Filtre de la Moyenne, et le Filtre Médian.

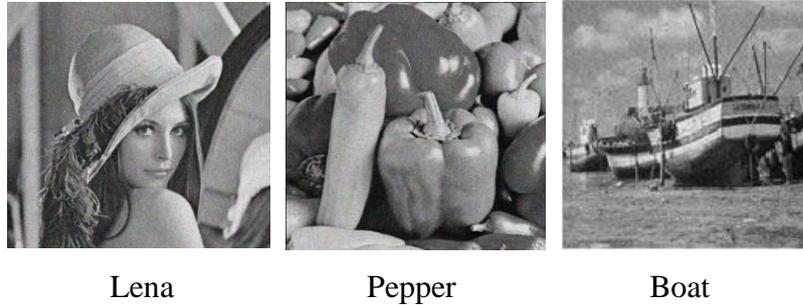


Figure 3.8 : Images de test avec bruit additif Gaussien de variance 0.01.

Images	FFA	FFG	FG	FMoy
Lena	37.66	29.60	29.75	22.53
Pepper	38.05	29.86	30.16	21.71
Boat	35.05	27.00	27.19	26.53

Tableau 3.1: Résultats du filtrage avec masque 3x3.

Images	FFA	FFG	FG	FMoy
Lena	33.15	26.46	27.43	20.60
Pepper	33.39	26.66	27.45	20.14
Boat	31.01	24.38	25.05	22.46

Tableau 3.2 : Résultats du filtrage avec masque 5x5.

Images	FFA	FFG	FG	FMoy
Lena	31.87	25.28	26.83	18.33
Pepper	32.09	25.39	27.11	17.48
Boat	29.87	23.41	24.76	18.50

Tableau 3.3 : Résultats du filtrage avec masque 7x7.

D'après les résultats de simulation, on remarque que la réponse du filtre de la moyenne est la plus mauvaise par rapport aux autres filtres quel que soit la dimension du masque. Ceci est due au fait que tous les coefficients de ce dernier ont le même poids égale à

l'unité, alors ce qui égalise la contribution des pixels sur toute la fenêtre de filtrage. Ce fait, cause l'influence des pixels portant des informations non pertinentes à l'image qui se trouvent loin de la position centrale sur la réponse du filtre.

Par contre, la qualité du filtrage par un masque de type fractionnaire additif est la meilleure par rapport aux autres types de filtres. Ceci peut s'expliquer par la pondération décroissant des intensités des pixels allant du centre vers l'extérieur du masque. Cette propriété fait acquérir au masque le pouvoir de favoriser les pixels les plus proches à la position centrale porteurs de l'information pertinente à l'image pour déterminer la qualité. Dans [27, 86], ces masques ont été déjà appliqués aux débruitage des images à cause de leur comportement immunitaire vis-à-vis des bruits.

En fait, la réponse du filtre Gaussien fractionnaire est légèrement inférieure à celle du filtre Gaussien, et par conséquent, le filtre Gaussien fractionnaire n'a aucun intérêt par rapport au filtre Gaussien classique du moment qu'il ne rapporte aucune amélioration, et exige encore une charge de calculs supplémentaires pur la dérivation fractionnaire. Enfin, on peut conclure que la qualité du filtrage se dégrade en général avec l'augmentation de la taille du masque utilisé.

### 3.4.4 Filtrage par facteur fractionnaire variable

Dans ce cas, on fixe la taille du masque à la valeur intermédiaire 5x5 avec  $\alpha$  ajustable dans l'intervalle  $] -2,0[$ . Les valeurs du PSNR en dB résultant du filtrage par masque fractionnaire additif de l'image 'House' sont portées au Tableau 3.4. On note que, l'image de test est entachée par un bruit Gaussien de moyenne nulle et de variance 20.

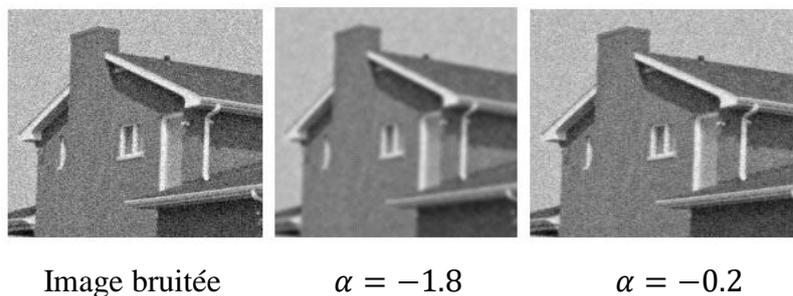


Figure 3.9 : Résultats du filtrage par variation du facteur fractionnaire.

$\alpha$	-1.8	-1.6	-1.4	-1.2	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2
FFA	25.78	26.10	26.5	27.01	27.68	28.61	29.97	32.19	36.70

Tableau 3.4 : Résultats du filtrage par variation du facteur fractionnaire.

Sachant que les coefficients du masque sont contrôlés par le facteur fractionnaire, alors la diminution de la valeur absolue de ce dernier réduit le pouvoir de contribution des pixels loin de la position centrale et limite l'amplification du bruit. Ceci est visible sur les résultats dont les valeurs croient avec la diminution de la valeur absolue du facteur fractionnaire. Ce qu'on peut déduire de cette simulation, c'est l'application au filtrage adaptative, en d'autres termes, la valeur du facteur fractionnaire peut être retrouvée récursivement par correspondance à la valeur maximale du PSNR.

### 3.4.5 Filtrage du bruit impulsionnel

Un exemple du bruit impulsionnel est le bruit connu sous le jargon anglo-saxon Salt&Pepper (Sel&Poivre). Pour le filtrage de ce type de bruit, on utilise généralement le filtre spatial médian avec lequel nous allons faire la comparaison. L'image de test utilisée en Figure 3.10 est bruitée par un bruit impulsionnel Salt&Pepper de densité 30%. Les PSNR en dB des réponses des filtres utilisés chacun avec un masque de dimension 5x5 sont donnés au Tableau 3.5, la valeur du facteur fractionnaire étant fixée à  $\alpha = -0.5$ .

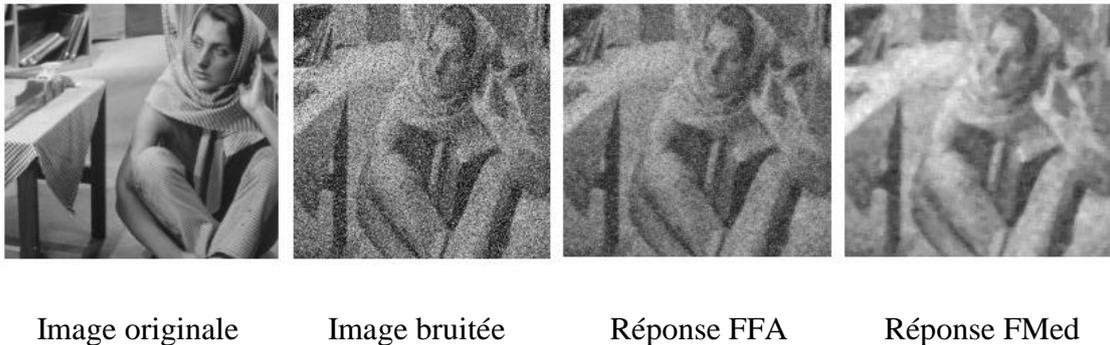


Figure 3.10 : Résultats du filtrage du bruit impulsionnel.

Image	FFA	FMed
Barbara	26.78	16.65

Tableau 3.5 : Résultats du filtrage du bruit impulsionnel.

La différence des résultats entre le filtre fractionnaire additif et le filtre médian est très remarquable sur le tableau. En fait, tenant compte des résultats précédents (dans le cas du filtrage par variation de la taille du masque ou par variation du facteur fractionnaire), nous pouvons conclure que notre opérateur de filtrage peut jouer un rôle polyvalent qui pourrait être appliqué aussi bien au filtrage des bruits aléatoires qu'aux bruits impulsionnels.

## 3.5 Application à la détection des contours par l'approche du gradient fractionnaire

La détection des contours est le processus de localiser et d'identifier les changements brusques des propriétés physiques ou géométriques de l'image perçue, et forment ainsi des attributs très importants pour l'analyse de l'image. L'extraction des contours joue un rôle primordial dans tous les systèmes de vision par ordinateur. Pour la détection des contours par l'approche du gradient d'ordre entier classique, beaucoup d'efforts ont été entrepris et plusieurs techniques ont été proposées à ce jour.

Du point de vue performance, l'algorithme de Canny [39] basé sur des critères d'optimisation semble le plus utilisé actuellement pour la détection des contours. Au cours de cette contribution, Nous allons implémenter deux algorithmes de détection des contours. Le premier comprend quatre étapes est implémenté en respectant les critères de Canny que l'on appelle désormais algorithme original. Alors que, le second comprend uniquement trois étapes, et qui est obtenu à partir du premier en éliminant l'étape de filtrage préalable que l'on appelle algorithme modifié. Ce travail a fait l'objet de deux productions scientifiques se résumant dans un article de conférence [113] en 2014, complété par un article de journal [114].

### 3.5.1 Algorithme original

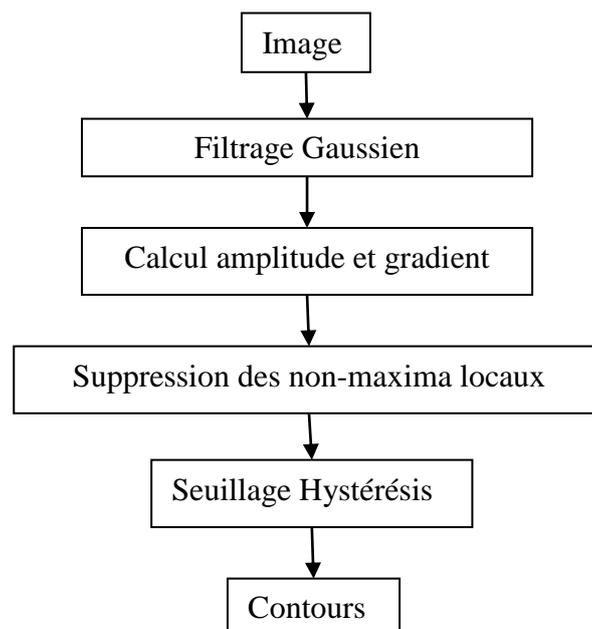


Figure 3.11 : Algorithme original.

### 1- Filtrage par lissage Gaussien.

Il est inévitable que les images prises avec une caméra ne soient pas entachées d'une quantité de bruit. Pour prévenir que le bruit accompagnant l'image soit pris comme faux contours, alors, le bruit doit être modifié d'autant plus que possible. L'opération de lissage est achevée par convolution de l'image avec l'opérateur Gaussien représenté par la fenêtre de dimensions 5x5 avec une variance  $\sigma = 1.4$  ayant la forme suivante :

$$\frac{1}{159} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 5 & 12 & 15 & 12 & 5 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

### 2- Estimation du gradient

Il s'agit de trouver les contours où l'intensité du gris présente des discontinuités ou des changements brusques représentant les hautes fréquences. Le gradient en chaque position des pixels est obtenu par convolution de l'image par l'opérateur de Sobel. Cet opérateur est séparable en deux masques horizontal et vertical, alors ce qui permet d'obtenir séparément les composantes horizontale et verticale du gradient. Maintenant, l'amplitude du gradient peut être obtenue en utilisant la relation trigonométrique suivante:

$$|G(x, y)| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} \quad (3.29)$$

Ou bien l'approximation linéaire,

$$|G(x, y)| \approx |G_x| + |G_y| \quad (3.30)$$

La direction du gradient est obtenue par :

$$\theta(x, y) = \tan^{-1} \left( \frac{G_y}{G_x} \right) \quad (3.31)$$

### 3- Suppression des non-maxima locaux

A cause des réponses multiples, l'amplitude du contour  $M(x, y) = |G(x, y)|$  contient de larges bords autour du maxima local. La suppression des non-maxima locaux élimine les non-

maxima des intensités des pixels en préservant la connectivité des contours. Cette opération peut être résumée dans les points suivants :

- Pour chaque position  $(x, y)$ , on se place dans les deux directions perpendiculaires à l'orientation  $\theta(x, y)$  du contour.
- On dénote le pixel initial par  $C$ , les deux autres pixels voisins dans les directions perpendiculaires par  $A$  et  $B$ .
- Si  $M(A) > M(C)$  ou  $M(B) > M(C)$ , on écarte le pixel en  $(x, y)$  en mettant  $M(x, y) = 0$ , sinon on le retient.

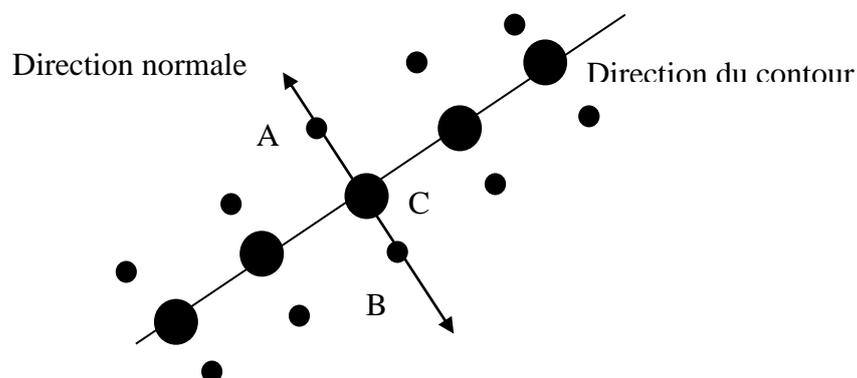


Figure 3.12 : suppression des mon-maxima locaux

#### 4- Seuillage Hystérésis

Le résultat de l'élimination des non-maxima locaux contient encore des maxima qui sont dus aux bruits, car le contraste peut être différent dans les différents points du contour. Un soigneux seuillage des amplitudes  $M(x, y)$  est nécessaire pour éliminer ces faibles contours en préservant la connectivité de ces contours. Dans l'algorithme de seuillage, on utilise deux seuils qui sont : le seuil bas  $T_L$  et le seuil haut  $T_H$ . Alors, le seuillage Hystérésis retient uniquement les pixels d'amplitudes  $M_{NMS}(x, y)$  suivant les conditions suivantes :

- Un pixel  $(x, y)$  est dit fort si  $M_{NMS}(x, y) > T_H$
- Un pixel  $(x, y)$  est dit faible si  $M_{NMS}(x, y) \leq T_L$
- Tous les autres pixels sont dits candidats

L'algorithme de seuillage Hystérésis se résume alors dans les trois étapes suivantes :

- Dans chaque position  $(x, y)$ , on écarte le pixel  $(x, y)$  s'il est faible, et on garde le pixel s'il est fort.
- Si le pixel est candidat, on poursuit la chaîne des maxima locaux dans les deux directions suivant le contour, tellement que  $M_{NMS}(x, y) > T_L$ .
- Si le pixel  $(x, y)$  candidat de départ est connecté à un pixel fort, on garde le pixel candidat, sinon, on l'écarte.

### 3.5.2 Algorithme modifié

Cet algorithme est obtenu en réduisant l'algorithme original à trois étapes uniquement au lieu de quatre. En quelques sortes, dans l'algorithme original, on remplace l'opérateur de Sobel par notre opérateur d'ordre fractionnaire. Alors dans ce cas, grâce à la robustesse aux bruits de notre masque intégral fractionnaire (FIM) [113], on peut omettre l'opération de lissage par filtrage Gaussien.

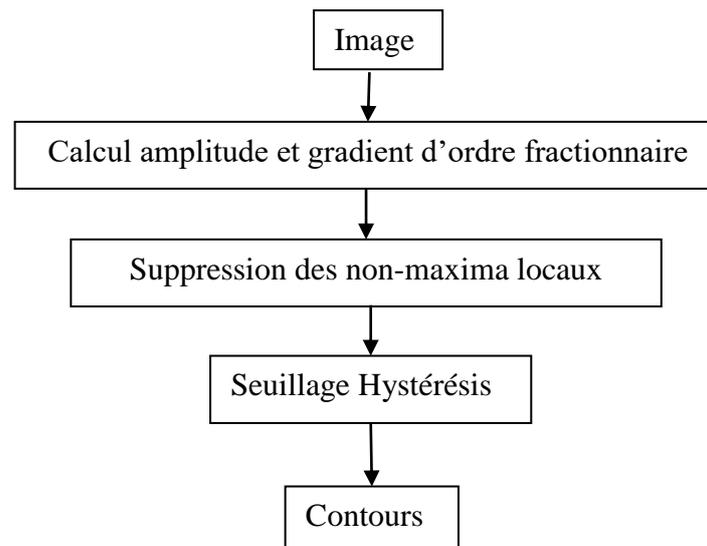


Figure 3.13 : Algorithme modifié

#### 1- Estimation du gradient d'ordre fractionnaire

L'estimation du gradient d'ordre fractionnaire se fait d'une manière séparable en utilisant les composantes du gradient  $h_x$  et  $h_y$  dans les deux directions. Dans la simulation, on va étudier l'effet de la taille du masque et l'effet de variation du facteur fractionnaire  $\alpha$  sur la qualité de détection des contours. Pour simplifier le calcul de la convolution, nous allons exploiter la symétrie de notre opérateur d'ordre fractionnaire.

Comme exemple, considérons le bloc d'image de dimension 5x5 en Figure 3.14, et les masques  $h_x$  et  $h_y$  donnés en Figure 3.15. On remarque que la somme des coefficients des opérateurs est nulle, alors ce qui prouve leur comportement en filtres passe haut pour la sélection des contours.

$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$
$Z_6$	$Z_7$	$Z_8$	$Z_9$	$Z_{10}$
$Z_{11}$	$Z_{12}$	$Z_{13}$	$Z_{14}$	$Z_{15}$
$Z_{16}$	$Z_{17}$	$Z_{18}$	$Z_{19}$	$Z_{20}$
$Z_{21}$	$Z_{22}$	$Z_{23}$	$Z_{24}$	$Z_{25}$

Figure 3.14 : bloc image de 5x5.

$\omega_2$	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	$-\omega_2$
$\omega_2$	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	$-\omega_2$
$\omega_2$	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	$-\omega_2$
$\omega_2$	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	$-\omega_2$
$\omega_2$	$\omega_1$	0	$-\omega_1$	$-\omega_2$

$h_x$

$\omega_2$	$\omega_2$	$\omega_2$	$\omega_2$	$\omega_2$
$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1$	$\omega_1$
0	0	0	0	0
$-\omega_1$	$-\omega_1$	$-\omega_1$	$-\omega_1$	$-\omega_1$
$-\omega_2$	$-\omega_2$	$-\omega_2$	$-\omega_2$	$-\omega_2$

$h_y$

Figure 3.15 : Composantes du masque fractionnaire  $h_x$  et  $h_y$ .

La convolution du bloc image avec chacun des masques  $h_x$  et  $h_y$  est achevée en utilisant uniquement 2 multiplications et 19 additions, ainsi on obtient :

$$h_x * f = \omega_2 \left( \sum_{i=1}^5 Z_{5i} - \sum_{i=0}^4 Z_{5i+1} \right) + \omega_1 \left( \sum_{i=1}^5 Z_{5i-1} - \sum_{i=0}^4 Z_{5i+2} \right) \quad (3.32)$$

$$h_y * f = \omega_2 \left( \sum_{i=21}^{25} Z_i - \sum_{i=1}^5 Z_i \right) + \omega_1 \left( \sum_{i=16}^{20} Z_i - \sum_{i=6}^{10} Z_i \right) \quad (3.33)$$

## 2- Suppression des non-maxima locaux

Cette étape reste inchangée et conserve la même implémentation que dans l'algorithme original.

### 3- Seuillage Hystérésis

Cette étape reste aussi inchangée et conserve la même implémentation que dans l'algorithme original.

#### 3.5.3 Implémentation et simulation

Dans un premier lieu, on se propose de tester notre algorithme modifié. Pour cela, nous avons réalisé son implémentation en utilisant un masque de taille 5x5 pixels. Pour garder l'immunité au bruit plus effective, le masque doit se comporter comme un opérateur intégral. Pour cette raison, le facteur d'ordre fractionnaire  $\alpha$  est ajusté dans l'intervalle  $] -1, 0[$ . Le choix du facteur fractionnaire négatif est justifié d'une part, par la qualité des résultats obtenus, et d'autre part, permet d'avoir un masque intégral fractionnaire permettant d'éviter les bruits causés par l'opération de différentiation. Rappelons que les résultats de de simulation sont donnés en effectuant le seuillage hystérésis en prenant 30 comme seuil bas et 100 comme seuil haut.

La Figure 3.16 illustre le résultat de simulation en utilisant l'image originale de test 'Mandrill'. La segmentation des contours de cette image est faite d'une manière progressive en ajustant  $\alpha$  dans l'intervalle  $] -1, 0[$ . Par exemple, pour deux valeurs de  $\alpha$  proches des extrémités de l'intervalle, on constate que l'image des contours segmentés à bas niveau ( $\alpha = -0.2$ ) présente une perte de détails sur les contours, tandis que, l'image des contours segmentés à haut niveau ( $\alpha = -0.8$ ) présente un excès de détails.

Ceci peut être interprété par le fait que, le masque de convolution fractionnaire est fonction du facteur fractionnaire  $\alpha$  qui contrôle l'amplitude du masque de convolution. On conclut que, lorsque la valeur absolue du facteur fractionnaire  $\alpha$  augmente, alors, les détails des contours de l'image augmentent et vice versa. En fait, les détails plus fins sont communément interprétés par des contours bruités, cependant, une interprétation signifiante peut être issue telle que, le système visuel humain est incapable de détecter de tels détails inhérents aux vrais contours, mis à part, ceux qui sont dus aux bruits résiduels.

Dans la simulation on a constaté que le coefficient de corrélation est maximisé ( $r = 0.457$ ) pour une valeur optimale ( $\alpha = -0.3$ ) qui donne l'image optimale des contours admissible pour le système visuel humain. Notons que, la valeur optimale est celle pour laquelle les performances de notre détecteur sont plus améliorées pour donner un résultat

satisfaisant. La courbe de corrélation  $r$  en fonction du facteur fractionnaire  $\alpha$  est représentée en Figure 3.17.

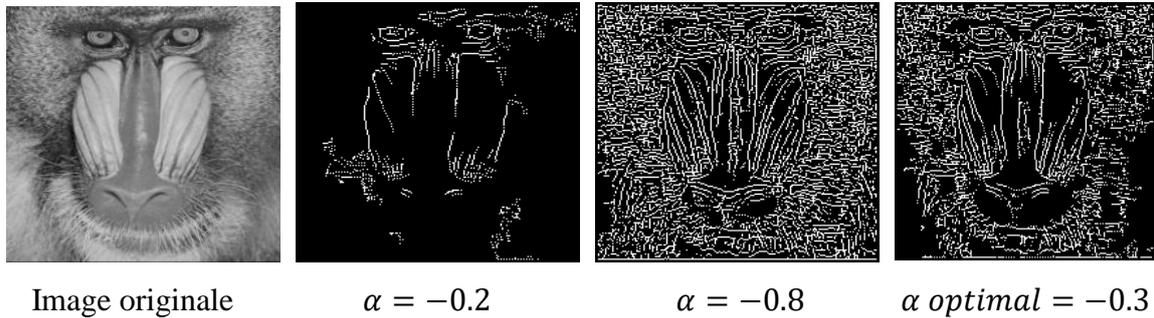


Figure 3.16 : Résultat de l'algorithme modifié en variant  $\alpha$ .

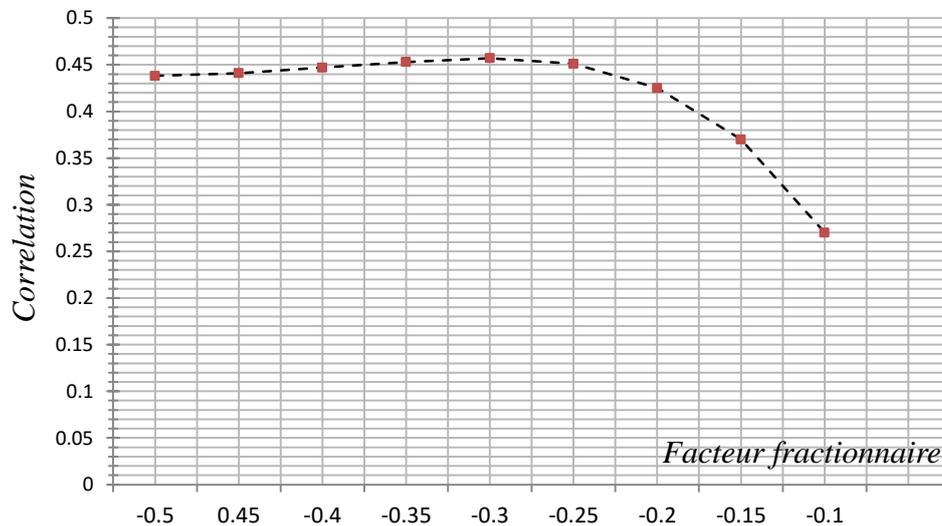
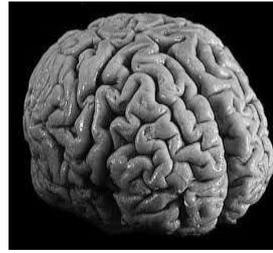
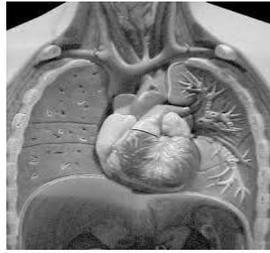
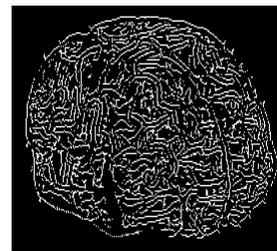
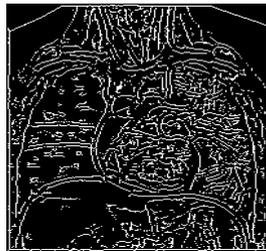


Figure 3.17 : Corrélation de Pearson en fonction de  $\alpha$ .

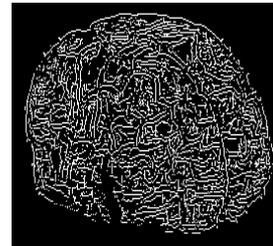
Dans un deuxième lieu, on se réserve à la comparaison avec l'algorithme original que nous avons aussi implémenté. Pour cette comparaison on a utilisé deux images de test qui sont: l'anatomie du thorax et le cerveau, alors que les résultats de simulation sont illustrés en Figure 3.18. Notons que les résultats de l'algorithme modifié sont obtenus pour des valeurs optimales du facteur fractionnaire. Dans cette simulation, les contours des images anatomie du thorax et cerveau sont obtenus pour  $\alpha = -0.35$  et  $\alpha = -0.5$  respectivement. Alors, nous constatons que les contours obtenus par l'algorithme original et ceux obtenus par l'algorithme modifié sont très proches, ce qui rend le système visuel humain incapable de distinguer la différence. Mais, ce fait n'exclut pas l'avantage du gain en temps et la simplification des calculs en omettant l'étape de filtrage dans le cas de l'algorithme original.



Images Originales (anatomie du thorax et du cerveau)



Réponses de l'algorithme original



Réponses de l'algorithme modifié

Figure 3.18 : Réponses de l'algorithme original et de l'algorithme modifié

## 3.6 Amélioration des performances

L'amélioration des performances dans notre contribution se résume dans l'optimisation du temps d'exécution et l'optimisation du facteur d'ordre fractionnaire  $\alpha$ . Le processus d'amélioration des performances s'achève par la mesure de qualité de la réponse de notre détecteur d'ordre fractionnaire.

### 3.6.1 Optimisation du temps d'exécution

Le but essentiel de notre contribution à la détection des contours est la réduction du temps d'exécution en surpassant l'étape du filtrage préalable effectuée dans les algorithmes classiques. D'une part, le fait d'omettre l'étape de lissage est un grand acquit permettant d'économiser une partie considérable du temps consommé au cours de l'exécution. D'autre part, on a montré auparavant que l'exploitation de la symétrie de notre opérateur simplifie le calcul de la convolution, ce qui contribue aussi à un gain additionnel de temps.

### 3.6.2 Optimisation du facteur fractionnaire

La valeur optimale du facteur d'ordre fractionnaire est celle pour laquelle la performance du détecteur est améliorée. Le choix de la valeur optimale n'est pas une chose facile, car, elle dépend de la méthode utilisée pour la mesure de qualité. En plus, rendre ce choix d'une manière automatique cause un temps de calcul supplémentaire, ce qui restreint l'application de notre détecteur en temps réel. Pour le choix de la valeur optimale  $\alpha$ , on utilise le coefficient de corrélation de Pearson (Pearson's corrélation coefficient) donné par Lee et Nicewander [115]. Ce coefficient de corrélation permet de faire la mesure de similarité entre l'image des contours  $I_r$  considérée comme référence, est l'image des contours  $I_\alpha$  dépendante du facteur fractionnaire  $\alpha$ . Le coefficient de corrélation de Pearson est défini par :

$$r = \frac{\sum_i (x_i - x_m)(y_i - y_m)}{\sqrt{\sum_i (x_i - x_m)^2} \sqrt{\sum_i (y_i - y_m)^2}} \quad (3.34)$$

Où  $x_i$  et  $y_i$  sont respectivement les intensités du  $i$ ème pixel dans les images des contours  $I_r$  et  $I_\alpha$ , alors que,  $x_m$  et  $y_m$  sont respectivement les moyennes des intensités dans les images des contours  $I_r$  et  $I_\alpha$ .

### 3.6.3 Evaluation des performances

L'évaluation des performances peut être faite subjectivement par analyse visuelle du contour détecté ou objectivement par comparaison du contour obtenu avec un prototype dit vérité de terrain (Ground Truth en anglais). Pour cela, on utilise la relation introduite par Abdou et Pratt dans [116] reconnue dans la littérature par le terme Pratt Figure Of Merit (PFOM) donné par :

$$PFOM = \frac{1}{\max(N_I, N_B)} \sum_{i=1}^{N_B} \frac{1}{1 + a d_i^2} \quad (3.35)$$

Où  $N_I$  et  $N_B$  sont respectivement, le nombre des points dans le contour obtenu par application de l'algorithme dont on veut évaluer les performances, et le nombre des points dans le contour donné comme prototype dans la base de données. Alors que,  $d_i$  est la distance entre un pixel du contour obtenu par l'algorithme et le plus proche pixel du contour donné comme prototype, et  $a = 1/9$  est une constante de calibration empirique. A titre d'exemple, l'image de test utilisée et le prototype de son contour sont montrés en

Figure 3.19. On note que ces images sont extraites de la base de données référencée par BSDSB500 (Berkeley Segmentation Data Set and Benchmarks 500). La mesure de qualité en fonction du facteur fractionnaire est donnée en Figure 3.20.



Figure 3.19 : L'image originale et son contour prototype (Ground Truth).

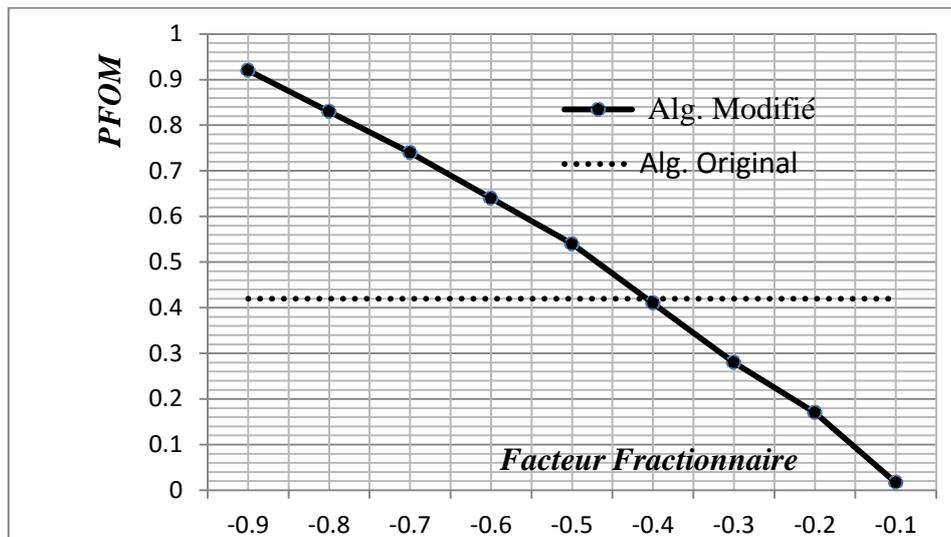


Figure 3.20 : Courbe de mesure du *PFOM* en fonction de  $\alpha$ .

En observant les courbes, il se voit que la courbe correspondante à l'algorithme modifié pour  $\alpha \in [-0.9, -0.4[$  est au dessus de la courbe correspondante à l'algorithme original. Dans ce cas, l'algorithme original est moins performant. Alors que pour  $\alpha \in [-0.4, -0.1]$  la courbe correspondante à l'algorithme modifié devient au dessous, ce qui rend ce dernier moins performant. Dans la pratique, il est conseillé de travailler avec des valeurs de  $\alpha$  légèrement inférieures à -0.4 pour assurer un certain compromis avec la valeur optimale.

### 3.6.4 Test de la robustesse aux bruits

La robustesse aux bruits des masques d'ordre fractionnaire a été démontrée dans des travaux anticipés. Afin d'illustrer les performances de notre masque fractionnaire en terme de la robustesse aux bruits, on utilise un bruit additive Gaussien de moyenne nulle et de variance 20 pour obtenir l'image bruitée en Figure 3.21. Notons que, la réponse de l'algorithme modifié est obtenue pour une valeur optimale  $\alpha = -0.25$ . On observe que l'image des contours obtenue par l'application de

l'algorithme original est entachée par des extra points inhérents aux bruits résiduels malgré le lissage préalable. Tandis que, l'image des contours obtenue par l'application de l'algorithme modifié ne l'est pas à cause du filtrage implicite des masques fractionnaires.

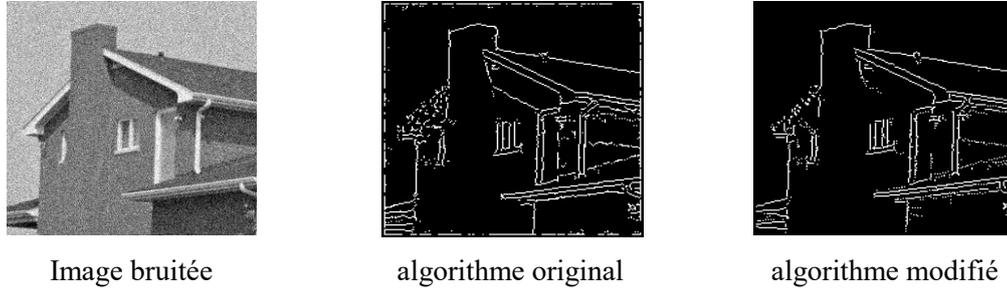


Figure 3.21 : Réponses des algorithmes original et modifié pour une image bruitée.

### 3.6.5 Effets de la taille du masque sur la détection par gradient fractionnaire

Dans cette section, nous allons appliquer les masques de tailles 3x3, 5x5, et 7x7. Ensuite, on va voir les effets sur la valeur optimale du facteur fractionnaire. L'image de test et les différents résultats sont illustrés en Figure 3.22.

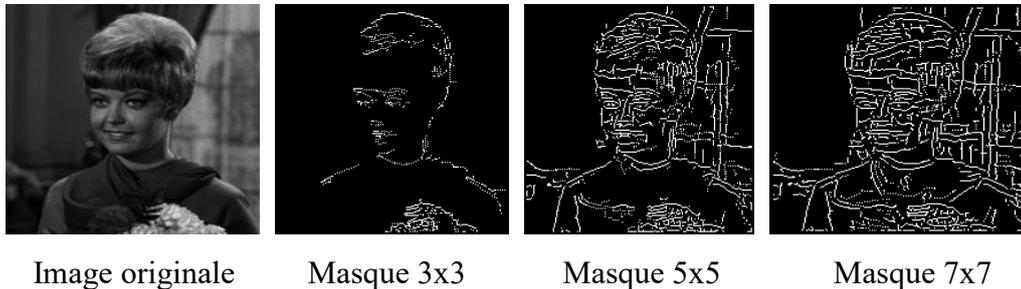


Figure 3.22 : Résultats de segmentation par masques de taille variable.

Masques	$\alpha$ optimal	Corrélation
3x3	-0.5	0.32
5x5	-0.35	0.55
7x7	-0.2	0.52

Tableau 3.6 : Résultats de segmentation par masques de taille variable.

D'après les images des contours obtenues, nous constatons que les détails sont d'autant plus révélés que la taille du masque augmente. Pour chaque masque on a une valeur optimale distincte qui augmente d'une manière monotone avec la taille du masque.

Par contre, la corrélation ne suit pas la loi de cette monotonie et enregistre une valeur maximale de 0.55 pour  $\alpha = -0.35$  correspondant à un masque de taille 5x5. Alors, ce qui fait à retenir que le résultat optimal de la segmentation des contours est celle obtenu avec un masque de taille 5x5.

### 3.7 Application à la détection multi-échelles des contours

La détection multi-échelles des contours est le processus de sélectionner une seule partie des points d'un contour progressivement en ajustant un paramètre d'échelle. La forme optimale du contour est reconstruite à partir des points du contour qui sont plus proches des points du contour de l'image originale. Pratiquement, on peut utiliser l'approche multi-résolution des ondelettes pour décomposer l'image en sous-bandes, ensuite, on applique l'algorithme de détection des contours aux sous-bandes obtenues. Néanmoins, cette méthode nécessite beaucoup de calcul pour décomposer l'image en sous-bandes. En alternative, il existe d'autres méthodes plus simples comme Marr-Hildreth [4] et Witkin [7], qui sont basées sur la convolution de l'image avec une fonction Gaussienne. Ces méthodes visent l'opération de lissage préalable et la sélection multi-échelles des contours en ajustant la variance de cette fonction Gaussienne. Comme l'objectif du lissage est uniquement le filtrage et n'a aucun rôle dans la détection des contours. Alors, il n'a que le désavantage de causer la délocalisation des contours et la perte de temps dans des calculs supplémentaires. D'autres schémas basés sur la diffusion anisotrope présentés par Perona-Malik [57] et Weickert [66], où les contours à différentes échelles sont révélés aux différentes itérations du processus de diffusion.

#### 3.7.1 Algorithme de détection multi-échelles des contours

Dans cette contribution, on adresse une solution aux problèmes cités précédemment, en introduisant un algorithme de trois étapes pour la détection multi-échelles des contours montré en Figure 3.23.

##### 1- Détection du contour initial

Par cette étape on s'attend à obtenir une forme du contour de référence  $E_r$  qui va être stocké en mémoire à des fins de comparaison. Pour faire ceci, on applique à l'image  $I_0$  notre algorithme de détection des contours d'ordre fractionnaire présenté ci-dessus. Cette image de référence donne les points plus précis du contour, car, aucune opération de filtrage qui peut affecter les contours n'a été réalisée.

Pour minimiser l'effet du bruit, le voisinage est restreint à une connexité de 8 pixels utilisant un noyau d'ordre fractionnaire  $K_\alpha$  de 3x3 pixels. La convolution est achevée en prenant  $\alpha = -1$ . Notons que le noyau  $K_{-1}$  de 3x3 pixels est équivalent à l'opérateur de Prewitt.

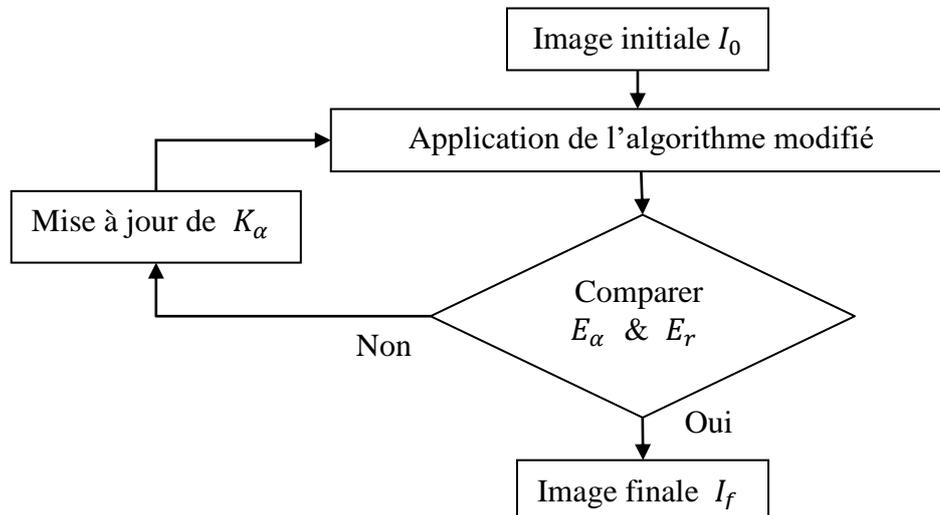


Figure 3.23 : Schéma bloc du détecteur multi-échelles des contours

## 2- Détection des contours des images dont l'échelle est nouvellement sélectionnée

Dans cette étape, on applique notre algorithme d'une manière récursive à l'image de référence  $I_0$ . Cette opération est faite après la mise à jour du noyau  $K_\alpha$  par variation du facteur d'ordre fractionnaire  $\alpha$  dans la plage considérée dans l'application. Notons que pour étendre la contribution des pixels déterminants les points du contour, la convolution est achevée en prenant un noyau de 5x5 pixels.

## 3- Comparaison et mise à jour du noyau de convolution

Maintenant, chaque nouvelle forme du contour  $E_\alpha$  obtenue est comparée avec la forme du contour de référence  $E_r$ . Dans ce cas, la comparaison est accomplie en utilisant comme mesure de similarité le coefficient de corrélation de Pearson décrit auparavant. Alors, si la comparaison est concluante on obtient la forme finale du contour  $E_f$  pour lequel le facteur fractionnaire  $\alpha$  est optimal. Sinon, on procède à la mise à jour du noyau  $K_\alpha$  en réajustant le facteur fractionnaire  $\alpha$  avant de revenir à la deuxième étape.

### 3.7.2 Implémentation et simulation

Etant donné que les coefficients du masque fractionnaire sont fonction du facteur fractionnaire  $\alpha$ , alors, nous allons montrer qu'on peut obtenir la sélectivité des contours en utilisant le facteur fractionnaire  $\alpha$  comme un paramètre de contrôle.

Pour cela, l'algorithme de détection multi-échelles a été implémenté selon les conditions précitées dans l'algorithme. Les résultats de simulation sont représentés en Figure 3.24, où l'image de la rétine est segmenté à trois niveaux tels que : les contours de bas niveau contrôlés par  $K_{-0.2}$ , les contours de niveau moyen contrôlés par  $K_{-0.4}$ , et les contours de haut niveau contrôlés par  $K_{-0.8}$ . On remarque que les contours de bas niveau présentent un manque de détails, alors que, les contours de haut niveau présentent un excès de détails. Tandis que, les contours de niveau moyen sont très proches de ceux obtenus avec la valeur optimale de  $\alpha$ . Concluons que la sélectivité augmente au fur et à mesure que la valeur absolue du facteur fractionnaire augmente et vice versa.

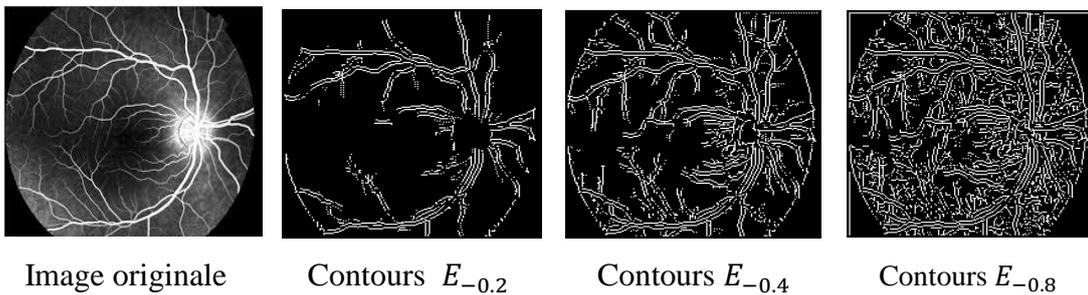


Figure 3.24 : Sélectivité des contours pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

### 3.7.3 Rôle du facteur fractionnaire dans la sélectivité des contours

Dans certaines applications de vision par ordinateur, parfois on n'a pas besoins de beaucoup de points de contours pour reconnaître une forme. Dans ce cas, il suffit d'accomplir la segmentation des contours avec un facteur fractionnaire facultatif maintenu au niveau bas. Alors, ce fait nous permet de réduire le débit de compression et de stockage.

## 3.8 Application à la détection des contours par l'approche du Laplacien fractionnaire

Cette approche utilise le fait que le passage par zéro du Laplacien permet de bien mettre en évidence les extrémums de la dérivée première. Ces méthodes tirent profit du fait que les zéros de la dérivée seconde constituent un réseau de lignes fermées. Mais l'estimation de la dérivée seconde étant très sensible aux bruits. Dans le cas des détecteurs classiques, il convient alors de filtrer fortement l'image avant d'en mesurer le Laplacien. Pour cela, Marr et Hildreth [4] ont développé une technique permettant de régler le problème du bruit dans les images dont on veut détecter les contours. Ils ont fait une convolution de l'image avec le Laplacien d'une Gaussienne.

Cela permet de supprimer le bruit, mais, il faut cependant ajuster la variance du filtre Gaussien en fonction du type d'image à traiter. Un filtre de variance trop large rend l'image trop floue ce qui cause la délocalisation des contours. Alors, qu'une variance trop faible conduit à une détection du bruit qui dégrade la qualité des contours. En outre, le processus de filtrage nécessite autant de calculs limitant ainsi les applications en temps réel. C'est pour cette raison que nous voulons utiliser notre masque d'ordre fractionnaire qui nous permet de dépasser la phase du filtrage préalable et par conséquent gagner du temps. A titre de rappel, nous commençons par la présentation de l'algorithme classique basé sur le Laplacien d'ordre entier constitué de trois étapes. Ensuite, nous allons présenter notre algorithme basé sur le Laplacien d'ordre fractionnaire constitué de deux étapes uniquement. Dans ce cas, le facteur fractionnaire est variable dans l'intervalle  $] -2, -1[$ .

### 3.8.1 Algorithme basé sur le Laplacien d'ordre entier

#### 1- Calcul de l'opérateur LoG

L'opérateur LoG est décrit déjà dans la section 1.6.4 du chapitre 1. Il représente un filtre isotrope qui s'applique comme masque de convolution. Un exemple de masque LoG de dimension 5x5, obtenue avec une Gaussienne de variance 2 est donné en Figure 3.25.

$$LoG(x, y) = \nabla^2(G_\sigma(x, y)) = \left( \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{2\pi\sigma^4} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (3.36)$$

0	0	-1	0	0
0	-1	-2	-1	0
-1	-2	16	-2	-1
0	-1	-2	-1	0
0	0	-1	0	0

Figure 3.25 : Masque LoG

#### 2- Calcul de l'image des contours

L'image des contours  $h(x, y)$  est obtenue par convolution comme suit :

$$h(x, y) = \left( \frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{2\pi\sigma^4} \right) e^{\left( \frac{-x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right)} * f(x, y) \quad (3.37)$$

### 3- Détection des passages par zéro

La détection des passages par zéro se fait en cherchant dans un voisinage de quatre pixels connexes. Alors, si les valeurs des pixels voisins ont le même signe que le pixel central, on dit qu'il n'existe pas de passage par zéro. Dans le cas contraire, il y'a passage par zéro si la valeur absolue du pixel central est plus petite que celle des pixels voisins de signe opposés.

### 3.8.2 Algorithme basé sur le Laplacien d'ordre fractionnaire

L'algorithme de cette méthode se résume en deux étapes uniquement, puisque l'étape de filtrage n'est pas nécessaire à cause de la robustesse aux bruits des masques d'ordre fractionnaire [32].

#### 1- Calcul de l'image des contours

L'image des contours est obtenue par convolution de l'image originale avec le masque Laplacien fractionnaire. Alors, pour une valeur  $\alpha = -1.5$  on a obtenu les composantes du masque Laplacien fractionnaire de taille 5x5 données en Figure 3.26.

#### 2- Détection des passages par zéro

Cette étape est implémentée de la même manière que dans le cas de la méthode de la dérivation entière précédente.

1.875	1.5	0	-1.5	-1.875
1.875	1.5	0	-1.5	-1.875
1.875	1.5	0	-1.5	-1.875
1.875	1.5	0	-1.5	-1.875
1.875	1.5	0	-1.5	-1.875

1.875	1.875	1.875	1.875	1.875
1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
0	0	0	0	0
-1.5	-1.5	-1.5	-1.5	-1.5
-1.875	-1.875	-1.875	-1.875	-1.875

$M_x$ 
 $M_y$

Figure 3.26 : Composantes du masque Laplacien d'ordre fractionnaire pour  $\alpha = -1.5$

### 3.8.3 Implémentation et simulation

On observe sur la Figure 3.27 que les contours obtenus par application de la méthode Laplacien sont continus, mais présentent des confusions qui règnent dans les régions non homogènes, provoquant ainsi la perte d'information pertinente aux contours de l'image originale. Tandis que, les contours obtenus par application de la méthode Laplacien fractionnaire présentent certaines discontinuités, mais montre plus de détails pertinents aux contours de l'image originale quel que soit la nature de la région. On peut déduire que la méthode du Laplacien convient aux images renfermant des zones homogènes à cause de leurs défauts de sélectivité, tandis que, la méthode du Laplacien fractionnaire convient aux images renfermant des textures complexes à cause de leur bonne sélectivité [32, 69].



Figure 3.27 : Réponse des masques Laplacien et Laplacien d'ordre fractionnaire

### 3.8.4 Effets de la taille du masque sur la détection par Laplacien fractionnaire

Ici on utilise les masques de tailles 3x3, 5x5 et 7x7. Alors, les résultats de simulation illustrés en Figure 3.28 sont obtenus pour une valeur fixe  $\alpha = -1.5$ .

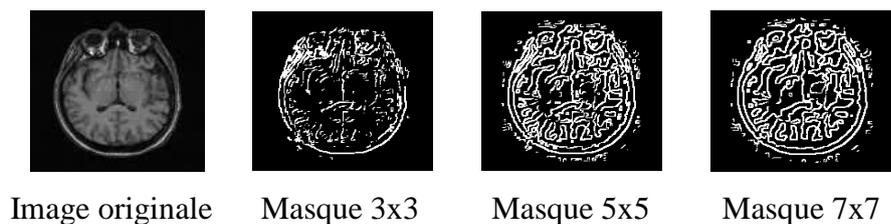


Figure 3.28 : Réponses des différents masques

L'application du masque de taille 3x3 génère des contours fins et discontinus, alors que, dans le cas du masque de taille 5x5 les contours deviennent plus épais, clairs, et ont tendance à se refermer. Enfin, pour le masque de taille 7x7 la fermeture des contours est quasi complète. On peut tirer la conclusion que la fidélité de la reproduction des contours augmente avec la taille du masque utilisé. Ceci se traduit par le fait qu'un grand voisinage est nécessaire pour se procurer plus d'information pertinente aux contours dans une image.

### 3.9 Conclusion

D'après les résultats de simulation, nous concluons que le masque d'ordre fractionnaire peut s'imposer en traitement d'images grâce à son pouvoir sélectif et son immunité aux bruits. Ces caractéristiques permettent son application pour assumer les opérations de filtrage et l'opération de détection des contours que ce soit par la technique du gradient ou par la technique des passages par zéro du Laplacien fractionnaire. Ainsi, nous avons donné des exemples d'application des opérateurs dérivatifs d'ordre fractionnaire concernant les fonctions de filtrage et de détection des contours. L'intérêt essentiel de l'utilisation des opérateurs d'ordre fractionnaire dans la détection des contours réside dans le dépassement de l'étape du filtrage préalable. Alors, ce qui permet de simplifier la complexité des calculs et réduire le temps d'exécution qui est un facteur essentiel dans les applications en temps réel.

## Conclusion générale

Le traitement d'images joue aujourd'hui un rôle important dans de nombreux domaines. Cependant, les contraintes d'exploitation dus à la complexité des calculs algorithmiques justifient la multiplicité des techniques développées dans le domaine du traitement d'images. Dans un système de traitement d'images, l'opération la plus importante est la segmentation d'images. Jusqu'à ce jour, il n'existe pas de méthode universelle de segmentation d'image. Toute technique n'est efficace que pour un type d'image donné, pour un type d'application donné, et dans un contexte informatique donné. En fait, l'application de la dérivation d'ordre entière du premier et du second ordre au traitement d'images, représente une ancienne méthode qui occupe actuellement une grande place dans l'implémentation des algorithmes de segmentation, mais il n'existe pas d'algorithme universel adopté. Les opérateurs utilisés comme le gradient et le Laplacien sont généralement utilisés dans la segmentation des contours de l'image. Les masques utilisés sont construits en utilisant l'approximation par les différences finies de la dérivée. Notons que, l'utilisation des filtres optimaux est motivée en traitement d'images grâce à leurs bonnes performances. En outre, des équations différentielles et l'approche variationnelle marquent aussi un outil très puissant dans le domaine du traitement d'images pour réaliser les opérations du filtrage progressif et de débruitage.

Actuellement, ils émergent des algorithmes implémentés sur la base du calcul fractionnaire montrant qu'ils peuvent apporter des performances complémentaires en termes de traitement d'images. Enfin, dans le domaine de segmentation des contours, la méthode basée sur la dérivation d'ordre fractionnaire marquent une alternative à la méthode classique, alors, ce qui permet de dépasser quelques contraintes concernant la complexité des calculs et le temps d'exécution. Nous avons présenté un état de l'art concernant l'application de la dérivation d'ordre fractionnaire au traitement d'images, en commençant par quelques définitions. Pour le filtrage nous avons présenté les méthodes du filtrage spatial et fréquentielle. Les opérateurs d'ordre fractionnaire utilisés comme masques, sont construits en utilisant l'approximation numérique de la dérivation fractionnaire de Grünwald-Letnikov. Ces opérateurs sont appliqués dans le filtrage, la segmentation, et le rehaussement des images. Les équations différentielles d'ordre fractionnaire sont aussi appliquées telles que, l'équation de la chaleur d'ordre fractionnaire et l'équation de la diffusion de la lumière d'ordre fractionnaire.

L'objectif de notre contribution est d'exposer la nouvelle approche du calcul fractionnaire et son application pour assumer les fonctions de filtrage et de segmentation

## Conclusion générale

---

des contours. Car, le pouvoir d'immunité aux bruits et la sélectivité des opérateurs dérivatifs fractionnaires offrent à ces derniers la propriété du filtrage implicite. La vertu essentielle de cette approche dans la détection des contours réside dans le dépassement de l'étape du filtrage préalable. Alors, ce qui permet de simplifier la complexité des calculs et réduire le temps d'exécution qui est un facteur essentiel dans les applications en temps réel. L'évaluation de cette contribution se résume dans les résultats de simulation qui semblent assez satisfaisants comparativement aux approches de segmentation classiques des contours. Cette thèse représente un point de départ vers des recherches dans l'avenir en vue d'améliorer et de développer des algorithmes optimaux répondants aux exigences des applications dans le domaine du traitement d'images. Parmi les travaux de recherche visés dans l'avenir sont : l'application des masques fractionnaires dans la segmentation des régions, la segmentation des images multi-spectrales, et la compression des images fixes et vidéo.

---

## Bibliographies

- [1] Modestino J.W. and Fries R.W., "Edge detection in noisy images using recursive digital filtering," *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 6, no. 5, pp. 409-433, October 1977.
- [2] Shanmugam K.S., Dickey F.M., and Green J.A., "An optimal frequency domain filter for edge detection in digital pictures," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 1, pp. 37-49, January 1979.
- [3] Torre V. and Poggio T.A., "On edge detection," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, no. 2, pp. 147-163, March 1986.
- [4] Marr D. and Hildreth E., "Theory of edge detection," *Proc. R. Soc. Lond. B*, vol. 207, no. 1167, pp. 187-217, February 1980.
- [5] Haralick R.M. and Shapiro L.G., "Image segmentation techniques," *In Applications of Artificial Intelligence II, International Society for Optics and Photonics*, vol. 548, pp. 2-10, April 1985.
- [6] Kimia B.B. and Siddiqi K., "Geometric heat equation and nonlinear diffusion of shapes and images," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 64, no. 3, pp. 305-22, November 1996.
- [7] Witkin A.P., "Scale-space filtering," *Readings in Computer Vis.*, pp. 329-332, 1987.
- [8] Tschumperle D. and Deriche R., "Vector-valued image regularization with PDEs: A common framework for different applications," *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 27, no. 4, pp. 506-517, April 2005.
- [9] Golse F., Laszlo Y., Pacard F, and Viterbo C., *Analyse réelle et complexe*, Ecole Polytechnique, Département de mathématiques, 2013.
- [10] Jain A.K., "Partial differential equations and finite-difference methods in image processing, part 1: Image representation," *Journal of optimization Theory and Applications*, vol. 23, no. 1, pp. 65-91, September 1977.
- [11] Weickert J., Romeny B.T.H., and Viergever M.A., "Efficient and Reliable Schemes for Nonlinear Diffusion Filtering," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, pp. 398-410, March 1998.
- [12] Black M.J., Sapiro G., Mrimont D.H., and Heeger D., "Robust anisotropic diffusion," *IEEE Transactions on image processing*, vol. 7, no. 3, pp. 421-432, 1998.
- [13] Babaud J., Witkin A.P., Baudin M., and Duda R.O., "Uniqueness of the Gaussian kernel for scale-space filtering," *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, no. 1, pp. 26-33, January 1986.

## Bibliographie

---

- [14] Buades A., Coll B., and Morel J.M., "Image enhancement by non local reverse heat equation," *Preprint CMLA 22*, March 2006.
- [15] Alvarez L., "Images and PDE's," In *ICAOS'96*, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 3-14, 1996.
- [16] Kass M., Witkin A., and Terzopoulos D., "Snakes: Active contour models," *Int. journal of computer vision*, vol. 1, no. 4, pp. 321-331, January 1988.
- [17] Xu N., Ahuja N., and Bansal R., "Object segmentation using graph cuts based active contours," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 107, no. 3, pp. 210-224, September 2007.
- [18] Ortigueira M.D. and Machado J.A., "fractional signal processing and applications," *Signal Processing*, vol. 83, no. 11, pp. 2285-2286, November 2003.
- [19] Pei S.C. and Ding J.J., "Relations between Gabor transforms and fractional Fourier transforms and their applications for signal processing," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 10, pp. 4839-4850, October 2007.
- [20] Liu F., Zhuang P., Anh V., Turner I., and Burrage K., "Stability and convergence of the difference methods for the space-time fractional advection-diffusion equation," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 191, no. 1, pp. 12-20, August 2007.
- [21] Yang Q., Chen D., Zhao T., and Chen Y., "Fractional calculus in image processing: a review," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 19, no. 5, pp. 1222-1249, October 2016.
- [22] Podlubny I., "Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications," Elsevier, vol. 198, October 1998.
- [23] Ferdi, Y., Herbeuval J.P., and Charef A., "A digital filter based on the non-integer order differentiation for analyzing electrocardiograph signals," *ITBM RBM*, vol. 21, no. 4, pp. 205-209, 2000.
- [24] Loverro A., "Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer," *Rapport technique, University of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering*, pp. 1-28, May 2004.
- [25] Diethelm K., Ford N.J., Freed A.D., and Luchko Y., "Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical methods," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 194, no. 6, pp. 743-773, February 2005.
- [26] Nicoll A., Meseth J., Müller G., and Klein R., "Fractional Fourier Texture Masks: Guiding Near-Regular Texture Synthesis," In *Computer Graphics Forum*, vol. 24,

- no. 3, pp. 569-579, 2005 September, Oxford, UK and Boston, USA: Blackwell Publishing, Inc.
- [27] Hu J., Pu Y.F., and Zhou J., "A Novel Image Denoising Algorithm Based on Riemann-Liouville Definition," *JCP*, vol. 6, no. 7, pp. 1332-1338, July 2011.
- [28] He N., Wang J.B., Zhang L.L., and Lu K., "An improved fractional-order differentiation model for image denoising," *Signal Processing*, vol. 112, pp. 180-188, July 2015.
- [29] Ghamisi P., Couceiro M.S., Benediktsson J.A. and Ferreira N.M., "An efficient method for segmentation of images based on fractional calculus and natural selection," *Expert Systems with Applications*, vol. 39, no. 16, pp. 12407-12417, November 2012.
- [30] Gao C., Zhou J., and Zhang W.H., "Edge detection based on the newton interpolation's fractional differentiation," *Int. Arab J. Inf. Technol*, vol. 11, no. 3, pp. 223-228, May 2014.
- [31] Yang Z.Z., Zhou J.L., Huang M., and Yan X.Y., "Edge detection based on fractional differential," *journal-sichuan university engineering science edition*, vol. 40, no. 1, p. 152, 2008.
- [32] Mathieu B., Melchior P., Oustaloup A., and Ceyral C., "Fractional differentiation for edge detection," *Signal Processing*, vol. 83, no. 11, pp. 2421-2432, November 2003.
- [33] Kumar S., Saxena R., and Singh., "Fractional Fourier transform and fractional-order calculus-based image edge detection," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 36, no. 4, pp. 1493-1513, April 2017.
- [34] Li B. and Xie W., "Adaptive fractional differential approach and its application to medical image enhancement," *Computers & Electrical Engineering*, vol. 45, pp. 324-335, July 2015.
- [35] Jalab H.A. and Ibrahim R.W., "Texture enhancement for medical images based on fractional differential masks," *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2013, 2013.
- [36] Khanna, S. and Chandrasekaran V., "Fractional derivative filter for image contrast enhancement with order prediction," p. 212, 2012.
- [37] Bai J. and Feng X.C., "Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising," *IEEE transactions on image processing*, vol. 16, no. 10, pp. 2492-2502, October 2007.
- [38] Blackledge J., "Diffusion and fractional diffusion based image processing," *EG UK Theory and Practice of Computer Graphics*, pp. 233-240, Cardiff, 2009.

- [39] Canny J., "A computational approach to edge detection," *IEEE Transactions on Pattern Analysis And Machine Intelligence*, vol. PAMI-8, no. 6, pp. 679-698, November 1986.
- [40] Young I.T., Gerbrands J.J., and Van Vliet L.J., "Fundamentals of image processing," Delft University of Technology, 1998.
- [41] Shrivakshan G.T. and Chandrasekar C., "A comparison of various edge detection techniques used in image processing," *IJCSI International Journal of Computer Science*, vol. 9, no. 5, pp. 272-276, September 2012.
- [42] Kalpana M., Kishorebabu G., and Sujatha K., "Extraction of edge detection using digital image processing techniques," *International Journal Of Computational Engineering Research*, vol. 2, no. 5, pp. 1562-1566, September 2012.
- [43] Al-Amri S.S., Kalyankar N.V., and Khamitkar S.D., "Image segmentation by using edge detection," *International Journal on computer science and engineering*, vol. 2, no. 3, pp. 804-807, May 2010.
- [44] Maini R. and Aggarwal H., "Study and comparison of various image edge detection techniques," *Int. journal of image processing*, vol. 3, no. 1, pp. 1-11, January 2009.
- [45] Bergounioux M., "Quelques méthodes mathématiques pour le traitement d'image," p. 110, 2008.
- [46] Kanopoulos N., Vasanthavada N., and Baker R.L., "Design of an image edge detection filter using the Sobel operator," *IEEE Journal of solid-state circuits*, vol. 23, no 2, pp. 358-367, April 1988.
- [47] Deriche R., "Techniques d'extraction de contours," *Rapport de recherche, INRIA, Sophia-Antipolis, France*, 1991.
- [48] Aujol J. F., *Contribution à l'analyse de textures en traitement d'images par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles*, Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis, 2004.
- [49] Deriche R. and Faugeras O., "Les équations aux dérivées partielles en traitement des images et vision par ordinateur," *Revue Traitement du signal*, vol. 13, no. 6, pp. 551-577, 1996.
- [50] Koenderink J.J., "The structure of images," *Biological cybernetics*, vol. 50, no. 5, pp. 363-370, August 1984.
- [51] Faugeras O., "Cartan's moving frame method and its application to the geometry and evolution of curves in the euclidean, affine and projective planes," In *Joint European-US Workshop on Applications of Invariance in Computer Vision*, pp. 9-46, Springer, Berlin, Heidelberg, October 1993.

- [52] Faugeras O. and Keriven R., "Scale-spaces and affine curvature," *Proc. Europe-China Workshop on Geometrical Modeling and Invariants for Computer Vision*, R. Mohr and C. Wu (Eds.), pp. 17-24, 1995.
- [53] Alvarez L. and Mazorra L., "Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31, no. 2, pp. 590-605, April 1994.
- [54] Deriche R., "Recursively implementing the Gaussian and its derivatives," In : *Proc. Secound Int. Conf. On Image Processing*, pp. 263-267, 1992.
- [55] Aubert G. and Kornprobst P., *Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations*, vol. 147, Springer Science & Business Media, November 2006.
- [56] Perona P., Shiota T., and Malik J., "Anisotropic diffusion," *Geometry-driven diffusion in computer vision*, Springer, Dordrecht, pp. 73-92, 1994.
- [57] Perona P. and Malik J., "Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, no. 7, pp. 629-639, July 1990.
- [58] Catté F., Lions P.L., Morel J.M., and Coll T., "Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion," *SIAM Journal on Numerical analysis*, vol. 29, no. 1, pp. 182-193, February 1992.
- [59] Nitzberg M. and Shiota T., "Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement," *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 14, no. 8, pp. 826-833, August 1992.
- [60] Alvarez L., Lions P.L., and Morel J.M., "Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II," *SIAM Journal on numerical analysis*, vol. 29, no. 3, pp. 845-866, June 1992.
- [61] Caraba E., "Project Report: Using Partial Differential Equations in Image Processing," 2009.
- [62] Levine H.A., "AN Tikhonov and VY Arsenin, solutions of ill posed problems," *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, vol. 1, no. 3, pp. 521-524, 1979.
- [63] Rudin L.I., Osher S., and Fatemi E., "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D: nonlinear phenomena*, vol. 60, no. 1-4, pp. 259-268, November 1992.
- [64] Cimrak I. and Melicher V., "Mixed regularization method for image restoration," In *Proceedings of Algoritmy*, pp. 226-235, 2009.

- [65] Blake A. and Isard M., *Active contours: the application of techniques from graphics, vision, control theory and statistics to visual tracking of shapes in motion*, Springer Science & Business Media, December 2012.
- [66] Weickert J., *Anisotropic diffusion in image processing*, vol. 1, Stuttgart: Teubner, January 1998.
- [67] Iijima T., “Basic theory on normalization of a pattern (for the case of a typical one dimensional pattern),” *Bulletin of the Electrotechnical Laboratory*, vol. 26, pp. 368-388, 1962.
- [68] Sabatier J. A. T. M. J., Agrawal O. P., and Machado J. T., *Advances in fractional calculus*, vol. 4, no. 9, Dordrecht: Springer, 2007.
- [69] Dalir M. and Bashour M., “Applications of fractional calculus,” *Applied Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 21, pp. 1021-1032, 2010.
- [70] Zhang Y., Pu Y., and Zhou J., “Construction of fractional differential masks based on Riemann-Liouville definition,” *Journal of Computational Information Systems*, vol. 6, no. 10, pp. 3191-3199, 2010.
- [71] Sejdic E., Djurovic I., and Stankovic L., “Fractional Fourier transform as a signal processing tool: An overview of recent developments,” *Signal Processing*, vol. 91, no. 6, pp. 1351-1369, June 2011.
- [72] Pesquet-Popescu B. and Véhel J.L., “Stochastic fractal models for image processing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, no. 5, pp. 48-62, September 2002.
- [73] Pu Y., Wang W., Zhou J., Wang Y., and Jia H., “Fractional differential approach to detecting textural features of digital image and its fractional differential filter implementation,” *Science in China Series F: Information Sciences*, vol. 51, no. 9, pp. 1319-1339, September 2008.
- [74] Gao C.B., Zhou J.L., Hu J.R., and Lang F.N., “Edge detection of color image based on quaternion fractional differential,” *IET Image Processing*, vol. 5, no. 3, pp. 261-272, April 2011.
- [75] Gao C., Zhou J., Zheng X., and Lang F., “Image enhancement based on improved fractional differentiation,” *Journal of Computational Information Systems*, vol. 7, no. 1, pp. 257-264, 2011.
- [76] Wang J., Ye Y., and Gao X., “Fractional 90 phase-shift filtering based on the double-sided Grünwald–Letnikov differintegrator,” *IET Signal Processing*, vol. 9, no. 4, pp. 328-334, May 2015.
- [77] Podlubny I., “The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order,” *arXiv preprint funct-an/9710005*, October 1997.

- [78] Tsao Y.Y., Onaral B. A. N. U., and Sun H. H., “An algorithm for determining global parameters of minimum-phase systems with fractional power spectra,” *IEEE transactions on instrumentation and measurement*, vol. 38, no. 3, pp. 723-729, June 1989.
- [79] Bagley R.L., “The thermorheologically complex material,” *International journal of engineering science*, vol. 29, no. 7, pp. 797-806, October 1991.
- [80] Ortigueira M.D., Machado J.T., and Da Costa J.S., “Considerations about the choice of a differintegrator,” *Computational Cybernetics, 2004, ICC 2004, Second IEEE International Conference on*, pp. 385-389, August 2004.
- [81] Carpinteri A. and Mainardi F. eds., *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*, Springer, May 2014.
- [82] Nakib A., *Conception de métaheuristiques d'optimisation pour la segmentation d'images. Application aux images biomédicales*, (Doctoral dissertation, Université Paris XII Val de Marne), 2007
- [83] Narayanan V. A. and Prabhu K. M. M., “The Fractional Fourier Transform: Theory, implementation and error analysis,” *Microprocessors and Microsystems*, vol. 27, no. 10, pp. 511-521, November 2003.
- [84] Pan W., Qin K., and Chen Y., “An adaptable-multilayer fractional Fourier transform approach for image registration,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 31, no. 3, pp. 400-414, March 2009.
- [85] Lin P.Y., “The Fractional Fourier Transform and Its Applications,” *National Taiwan University, Taipei, Taiwan, ROC*, June 1999.
- [86] Jalab H.A. and Ibrahim R.W., “Denoising algorithm based on generalized fractional integral operator with two parameters,” *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2012.
- [87] Srivastava H.M. and Owa S., *Univalent functions, fractional calculus, and their applications*, Ellis Horwood, New York, Toronto: Halsted Press, 1989.
- [88] Ibrahim R.W., “On generalized Srivastava-Owa fractional operators in the unit disk,” *Advances in Difference Equations*, vol. 2011, no. 1, pp. December 55, 2011.
- [89] Garg V. and Singh K., “An Improved Grünwald-Letnikov Fractional Differential Mask for Image Texture Enhancement,” *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, vol. 3, no. 3, March 2012.
- [90] Pu Y. F., Zhou J. L., and Yuan X., “Fractional differential mask: a fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement,” *IEEE transactions on image processing*, vol. 19, no. 2, pp. 491-511, February 2010.

- [91] Gan Z. and Yang H., "Texture enhancement through multiscale mask based on RL fractional differential," *Information Networking and Automation (ICINA), 2010 International Conference on IEEE*, pp. V1-333-V1-337, October 2010.
- [92] Yu Q., Liu F., Turner I., Burrage K., and Vegh V., "The use of a Riesz fractional differential-based approach for texture enhancement in image processing," *ANZIAM Journal*, vol. 54, pp. 590-607, September 2013.
- [93] Yu Q., Liu F., Turner I., and Burrage K., "Stability and convergence of an implicit numerical method for the space and time fractional Bloch-Torrey equation," *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol. 371, no. 1990, p. 20120150, May 2013.
- [94] Ortigueira M.D., "Riesz potential operators and inverses via fractional centred derivatives," *Int. Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2006.
- [95] VijayaSaradhi G., Balasubramanian S., and Chandrasekaran V., "A fractional derivative approach for robust segmentation of blood vessels in digital fundus retinal images," *International Journal of Imaging Science and Engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 166-169, 2008.
- [96] Soares J. V., Leandro J. J., Cesar R.M., Jelinek H.F., and Cree M.J., "Retinal vessel segmentation using the 2-D Gabor wavelet and supervised classification," *IEEE Transactions on medical Imaging*, vol. 25, no. 9, pp. 1214-1222, September 2006.
- [97] Erdélyi A., *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, California Institute of Technology, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [98] Erdélyi A., *Operational calculus and generalized functions*, (Holt, Rinehart and Winston), Inc. New York, 1962.
- [99] Cuesta E., Kirane M., and Malik S. A., "Image structure preserving denoising using generalized fractional time integrals," *Signal Processing*, vol. 92, no. 2, pp. 553-563, February 2012.
- [100] Kilbas A.A., Srivastava H.M., and Trujillo J.J., "Theory and Applications of Fractional Differential Equations," Elsevier, 2006.
- [101] Lubich Ch. and Ostermann A., "Runge-Kutta methods for parabolic equations and convolution quadrature," *mathematics of computation*, vol. 60, no. 201, pp. 105-131, 1993.
- [102] Hilfer R., "Foundations of fractional dynamics," *Fractals*, vol. 3, no. 3, pp. 549-556, September 1995.
- [103] Hilfer R., "Exact solutions for a class of fractal time random walks," *Fractals*, vol. 3, no. 1, pp. 211-216, March 1995.
- [104] Oldham K. B. and Spanier J., "The Fractional Calculus," Academic Press, 1974.

- [105] Miller K.S. and Ross B., “An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,” Wiley, 1993.
- [106] Dold A. and Eckmann B., “Fractional Calculus and its Applications,” Springer, 1975.
- [107] Samko S. G., Kilbas A., and Marichev O. I., “Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications,” *Gordon and Breach*, 1993.
- [108] Kiryakova V. S., *Generalized Fractional Calculus and Applications*, CRC Press, December 1994.
- [109] Evans G. A., Blackledge J. M., and Yardley P., “Analytical Solutions to Partial Differential Equations,” Springer-Verlag, 2000.
- [110] You Y.L. and Kaveh M., “Fourth-order partial differential equations for noise removal,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, no. 10, pp. 1723-1730, October 2000.
- [111] HERZALLAH M.A., “Notes on some fractional calculus operators and their properties,” *Journal of Fractional Calculus and Applications*, vol. 5(3S), no. 19, pp. 1-10, 2014.
- [112] Shakoor Pooseh, Ricardo Almeida, and Delfim F.M. Torres, “Discrete Direct Methods in the Fractional Calculus of Variations,” vol. 66, no. 5, pp. 668-676, September 2013.
- [113] Mekideche M. and Ferdi Y., “A new edge detector based on fractional integration,” In *Multimedia Computing and Systems (ICMCS)*, 2014 International Conference on 2014 Apr 14 (pp. 223-228). IEEE.
- [114] Mekideche M. and Ferdi Y., “Edge Detection Optimization Using Fractional Order Calculus,” *International Arab Journal of Information Technology*, paper ID 12113, acceptance no 9/6/1 on January 7, 2018, (Preprint) *IAJIT* First Online Publishable under Vol. 17, no. 1, 2020.
- [115] Lee R.J. and Nicewander W.A., “Thirteen ways to look at the correlation coefficient,” *The American Statistician*, vol. 42, no. 1, pp. 59-66, February 1988.
- [116] Abdou I.E. and Pratt, W.K., “Quantitative Design and Evaluation of Enhancement / Thresholding Edge Detectors,” in *Proceedings of the IEEE*, vol. 67, no. 5, pp.753-766, May 1979.

## RESUME

Dans un système de traitement d'images, la segmentation est l'opération la plus importante. Actuellement, il n'existe pas de méthode universelle, et toute technique n'est efficace que pour un type d'application donné. En raison de ces contraintes, les diverses stratégies de traitement d'image qui ont été proposées ont affirmé leurs insuffisances et leurs limitations. Il est donc tout à fait normal d'explorer de nouveaux horizons et de trouver de nouvelles méthodes plus souples et plus efficaces. Alors, dans notre contribution nous avons exposé une nouvelle approche de segmentation des contours basée sur le calcul d'ordre fractionnaire. Ainsi, nous avons donné des exemples d'application des opérateurs dérivatifs d'ordre fractionnaire concernant les fonctions de filtrage et de détection des contours. L'intérêt essentiel de l'utilisation des opérateurs d'ordre fractionnaire dans la détection des contours réside dans le dépassement de l'étape de filtrage préalable. Alors, ce qui permet de simplifier la complexité des calculs et réduire le temps d'exécution qui est un facteur essentiel dans les applications en temps réel. L'évaluation de cette contribution s'incarne dans les résultats de simulation qui semblent assez prometteuses comparativement aux approches de segmentation classiques des contours.

**Mots clés :** Calcul fractionnaire, facteur fractionnaire, masques fractionnaires.

## **ABSTRACT**

In an image processing system, segmentation is the most important operation. Currently, there is no universal method, and no any technique is only effective for a given type of application. Because of these constraints, the various image processing strategies that have been proposed have asserted their inadequacies and limitations. It is therefore perfectly normal to explore new horizons and find new methods that are more flexible and more effective. Then, in our contribution we exposed a new approach of contour segmentation based on the fractional order calculus. Thus, we have given examples of the application of fractional order derivative operators concerning functions of filtering and contour detection. The main advantage of using fractional order operators in the detection of contours lies in the fact that the pre-filtering step is exceeded. So, this simplifies the computational complexities and reduces the execution time which is a key factor in real-time applications. The evaluation of this contribution is embodied in the simulation results that seem quite promising compared to classical approaches of contours segmentation.

**Keywords :** Fractional calculus, fractional factor, fractional masks.

في نظام معالجة الصور، التجزئة هي العملية الأكثر أهمية. حالياً، ليس هناك طريقة عالمية، وأي تقنية فعالة فقط لنوع معين من التطبيق. وبسبب هذه القيود، أكدت استراتيجيات معالجة الصور المختلفة التي اقترحت أوجه قصورها وقيودها. ولذلك فمن الطبيعي تماماً استكشاف آفاق جديدة وإيجاد أساليب جديدة أكثر مرونة وأكثر فعالية. لهذا في مساهمتنا كشفنا نهج جديد من تجزئة كفاف على أساس حساب ترتيب كسور. وهكذا، قدمنا أمثلة على تطبيق مشغلي المشتقات النظام الكسري في وظائف تصفية وكشف كفاف. والميزة الرئيسية لاستخدام مشغلي النظام الكسري في الكشف عن الألفة تكمن في حقيقة أن خطوة ما قبل التصفية يتم تجاوزها. لذلك، هذا يبسط تعقيد الحسابات ويقلل من وقت التنفيذ الذي هو عامل رئيسي في التطبيقات في الوقت الحقيقي. ويتجسد تقييم هذه المساهمة في نتائج المحاكاة التي تبدو واعدة جداً مقارنة مع النهج التقسيم التقليدي للكفاف.

**الكلمات الدالة؛** حساب كسري، عامل كسري، أقنعة كسرية.