

*République Algérienne Démocratique et Populaire*  
*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

*Université du 20 Août 1955 Skikda*  
*Faculté de Technologie*  
*Département de Génie Electrique*



## **Thèse**

*En vue de l'Obtention du diplôme de :*

***Doctorat en Science***

*Spécialité :Automatique*

**Thème**

---

**Utilisation des filtres fractionnaires pour la conception  
de régulateurs adaptatifs robustes.**

---

***Par :Yassine BENSAFIA***

Soutenu le :03/05/2016,devant le jury composé de :

Président :Mr **Lashab Mohamed**MCA Université du 20 août 1955deSkikda

Rapporteur :Mr**Ladaci Samir**Prof.Ecole Nationale Polytechnique Constantine

Examineur :Mr **CharefAbdelfatah**Prof.Université Mentouri Constantine 1

Examineur :Mr **Ferdi Youcef** Prof. Ecole Nationale de Biotechnologie Constantine

Examineur :Mr **Mehenaoui Lamine**MCA Université du 20 août 1955deSkikda

Examineur :Mr **Gherbi Sofiane**MCA Université du 20 août 1955deSkikda

**Code :D012116008D**

بسم الله الرحمن الرحيم

" إقرأ بإسم ربك الذي خلق \* خلق الإنسان من  
علق \* إقرأ و ربك الأكرم الذي علم بالقلم \* علم  
الإنسان ما لم يعلم \* "

{ صدق الله العظيم }

## *Dédicaces*

- ✓ *A mes parents,*
- ✓ *A ma femme,*
- ✓ *A mes Enfants Amir, Amine et Noura*
- ✓ *A mes frères et sœurs,*
- ✓ *A tous mes amis,*
- ✓ *A tous ceux qui travaillent pour que cette Nation soit meilleure.*

## Remerciements

Avant tout, mes remerciements vont à Allah le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Ce travail de recherche a été effectué au sein de l'université de Skikda, sous la direction scientifique de Monsieur le **Professeur Samir LADACI**, chef de l'équipe 'Commande' du Laboratoire de Traitement du Signal de Constantine (**SP-Lab**), que je tiens à remercier très vivement pour son enthousiasme envers mon travail, sa disponibilité et son soutien scientifique et humain. Je le remercie, également, pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements et ses précieux conseils.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les membres de jury pour leur disponibilité :

Monsieur **Mohamed LASHAB**, Maître de conférence 'A' à l'Université de Skikda, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Monsieur **Abdelfatah CHAREF**, Professeur à l'Université Mentouri de Constantine, ainsi que Monsieur **Youcef FERDI**, Professeur à l'école Nationale de Biotechnologie de Constantine, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce travail de thèse.

Je remercie vivement, Messieurs **Lamine MEHENAOU** et **Sofiane GHERBI**, Maîtres de Conférence 'A' à l'université de Skikda, qui ont également accepté de participer à l'examen de cette thèse. Je les en remercie et leur exprime ma profonde reconnaissance.

J'adresse mes remerciements au personnel du Laboratoire d'Informatique de Robotique et de Microélectronique de Montpellier, France (LIRMM) qui m'ont accueilli pour un séjour de recherche et notamment Monsieur **Ahmed CHEMOURI** pour ces encouragements, les discussions scientifiques dont il m'a fait l'honneur et pour l'assistance qu'il m'a apportée malgré le peu de temps que lui laissaient ses travaux de recherche au niveau du laboratoire.

J'adresse mes remerciements à mes collègues enseignants KhettabKhatir ainsi que Idir A/Hakim pour leurs soutiens et conseils tout au long de ma formation.

J'adresse un grand merci à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin durant ces années de recherche et d'études. Je ne peux conclure sans un mot de remerciement à tous mes enseignants tout le long de ma formation.

Enfin, un grand merci à mes parents,ma femme et à toute ma famille pour leur amour et leur soutiensurtout durant les deux dernières années.

**Yassine Bensafia**

# SOMMAIRE

Introduction Générale	1
1. Commande d'ordre fractionnaire	2
2. La Robustesse	3
3. Objectifset contributions de la thèse	4
4. Présentation de la thèse	5

## Chapitre I :

### **Les Systèmes d'ordre Fractionnaire**

I.1 Introduction	6
I.1.1 Historique	6
I.1.2. La modélisation d'ordre Fractionnaire	7
I.1.3. Commande d'ordre fractionnaire	8
I.2. Domaines d'application des systèmes fractionnaires:	9
I.2.1 Électronique	9
I.2.2. Electrotechnique	10
I.2.3. Automatique	11
I.2.4. Chimie	12
I.2.5 Thermique : Diffusion et équation de la chaleur	14
I.2.6. Mécanique	16
I.2.7. Acoustique	16
I.3 Calcul Fractionnaire	17
I.3.1 Définitions fondamentales	17
I.3.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire	19
I.3.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	19
I.4 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire	21
I.4.1 Méthodes Fréquentielles	21
I.4.2 Méthodes Numériques	26
I.5 Conclusion	32

## **Chapitre II**

# **Commande adaptative à modèle de référence d'ordre Fractionnaire**

II.1 Introduction	33
II.2 La commande adaptative	34
II.2.1 Commande adaptative directe	35
II.2.2 Commande adaptative indirecte	36
II.2.3 Fonctions des systèmes de commande adaptative	36
II.3. Commande Adaptative à Modèle de Référence	37
II.3.1 Les types des systèmes adaptatifs à modèle de référence	37
II.3.2 Description d'un SAMR	38
II.3.3.Suivi du modèle	39
II.3.4. Loi de M.I.T	41
II.3.5 Réalisation du Régulateur du CAMR	43
II.4. Commande Adaptative à Modèle de Référence d'ordre fractionnaire du robot SCARA	45
II.4.1.Description du robot	45
II.4. 2.Modèle dynamique du robot	46
II.4. 3.La commande linéarisante	47
II.4 .4.Approche FMRAC	48
II.4 .5.Simulation: suivi de trajectoire de robot	49
II.5. Commande Adaptative à Modèle de Référence d'ordre fractionnaire Robuste	56
II.5.1. MRAC avec modèle de référence d'ordre entier	56
II.5.2.MRAC avec modèle de référence fractionnaire	57
II.5 .3.Analyse de Robustesse	65
II.6 Conclusion	65

## **Chapitre III :**

### **Commande adaptative indirecte par placement de pôles d'ordre Fractionnaire**

III.1. Introduction	66
III.2. Les différents types de placement de pôles	67
III.3. Conception placement de pôles	68
III.3.1. modèle du processus	68
III.3.2. poursuite de modèle	70
III.3.3. Conditions de causalité	71
III.3.4. Interprétation de polynôme $A_0$	74
III.3.5. Relation avec la commande à modèle de référence	74
III.4. Commande auto-ajustable	75
III.4.1. Commande auto-ajustable indirecte	75
III.4.2. Commande auto-ajustable directe	76
III.5. Exemple d'application : (Application à un MCC)	77
III.5.1. Introduction	77
III.5.2. Description du moteur à courant continu	77
III.5.3. Implémentation sous Matlab	80
III.6. Conclusion	86

## Chapitre IV:

### **La fractionalisation : Une nouvelle approche pour la robustification des systèmes de commande**

IV.1.Introduction	87
IV. 2. Commande d'un PID classique	87
IV.3-Contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire	89
IV .4- les Méthodes de réglage des correcteurs fractionnaires	92
IV.4.1. Critères de performances temporelles	92
IV.4.2. Critères de performances fréquentielles	92
IV.5.La fractionalisation des Correcteurs PI et PID	94
IV.6. Commande PI adaptatif Robuste d'ordre Fractionnaire	95
IV.6. 1.Contrôleur adaptatif $PI$ d'ordre entier	95
IV.6. 2.Contrôleur adaptatif $PI$ d'ordre fractionalisé	96
IV.7.Exemples et Simulations	97
IV.7.1.Commande PI et PI fractionalisée	97
IV.7.2.Commande PID et PID fractionalisé	102
IV.7.3.Commande PI adaptatif robuste fractionalisée	107
IV.8. Analyse de Robustesse	111
IV.9. Conclusion	112
Conclusion générale	113
Références bibliographiques	116

# ***LISTE DES FIGURES***

## **Chapitre I**

<b>Figure I.1</b>	Schémas équivalent du super-condensateur	11
-------------------	--	----

## **Chapitre II**

<b>Figure II.1</b>	Principe d'un système de commande adaptative	34
--------------------	--	----

<b>Figure II.2</b>	Structure de la commande adaptative directe	35
--------------------	---	----

<b>Figure II.3</b>	Structure de la commande adaptative indirecte	36
--------------------	---	----

<b>Figure II.4</b>	Structure parallèle d'une commande adaptative à modelé de référence	38
--------------------	---	----

<b>Figure II.5</b>	Système en boucle fermée avec un régulateur linéaire	39
--------------------	--	----

<b>Figure II.6</b>	Schéma du robot SCARA à 3 d.d.l	46
--------------------	---------------------------------	----

<b>Figure II.7</b>	Exemple de robot SCARA à 3 d.d.l	46
--------------------	----------------------------------	----

<b>Figure II.8</b>	Le schéma global de commande du robot : approche FMRAC	48
--------------------	--	----

<b>Figure II.9</b>	La position articulaire du robot et la trajectoire de référence en utilisant la commande MRAC d'ordre entier ( $\alpha=1$ )	50
--------------------	---	----

<b>Figure II.10</b>	Couples de Contrôleur FMRAC ( $\alpha=0.3$ )	51
---------------------	--	----

<b>Figure II.11</b>	La position articulaire du robot et la trajectoire de référence en utilisant la commande MRAC d'ordre Fractionnaire	52
---------------------	---	----

<b>Figure II.12</b>	Les couples de Contrôleur FMRAC ( $\alpha=0.3$ )	52
---------------------	--	----

<b>Figure II.13</b>	La position articulaire du robot et la trajectoire de référence en utilisant la commande MRAC d'ordre Fractionnaire ( $\alpha=0.5$ )	53
---------------------	--	----

<b>Figure II.14</b>	Les couples de Contrôleur FMRAC ( $\alpha=0.5$ )	54
---------------------	--	----

<b>Figure II.15</b>	La position articulaire du robot et la trajectoire de référence en utilisant la commande MRAC d'ordre Fractionnaire ( $\alpha=0.7$ )	54
---------------------	--	----

<b>Figure II.16</b>	Les couples de Contrôleur FMRAC ( $\alpha=0.7$ )	55
---------------------	--	----

<b>Figure II.17</b>	Sortie de la Cammande Adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire pour $\alpha=0.25$ , $\alpha=0.5$ , $\alpha=0.75$ , $\alpha=1$ sans perturbations	59
<b>Figure II.18</b>	Signaux de commande MRAC à modèle de référence d'ordre fractionnaire pour $\alpha=0.25$ , $\alpha=0.5$ , $\alpha=0.75$ , $\alpha=1$ sans perturbations	60
<b>Figure II.19</b>	La Sortie de la Cammande Adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire pour $\alpha=0.25$ , $\alpha=0.5$ , $\alpha=0.75$ , $\alpha=1$ avec bruit aléatoire à la sortie(amplitude 5% du signal de référence)	61
<b>Figure II.20</b>	Signaux de commande pour $\alpha=0.25$ , $\alpha=0.5$ , $\alpha=0.75$ , $\alpha=1$ avec bruit aléatoire à la sortie(amplitude 5% du signal de référence)	62
<b>Figure II.21</b>	Sortie de la Cammande Adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire pour $\alpha=0.25$ , $\alpha=0.5$ , $\alpha=0.75$ , $\alpha=1$ avec bruit aléatoire à la sortie(amplitude 20% du signal de référence)	63
<b>Figure II.22</b>	Signaux de commande pour $\alpha=0.25$ , $\alpha=0.5$ , $\alpha=0.75$ , $\alpha=1$ avec bruit aléatoire à la sortie(amplitude 20% du signal de référence)	64
 <b>Chapitre III</b>		
<b>Figure III.1</b>	Schéma bloc d'un régulateur auto-ajustable	67
<b>Figure III.2</b>	un régulateur linéaire général à deux degrés de liberté	69
<b>Figure III.3</b>	Représentation alternative de modèle de référence basée sur le retour de la sortie	75
<b>Figure III.4</b>	Différents types de moteurs MCC	77
<b>Figure III.5</b>	Schéma de principe du moteur à courant continu	77
<b>Figure III.6</b>	le résultat de (a) : sortie de système, (b) : signal de commande, (c) : signal d'erreur	81
<b>Figure III.7</b>	le résultat de (a) : sortie de système, (b) : signal de commande, (c) : paramètres estimés, (d) : signal d'erreur	82
<b>Figure III.8</b>	le résultat de (a) : sortie de système, (b) : signal de commande, (c) : signal d'erreur	84
<b>Figure III.9</b>	le résultat de (a) : sortie de système, (b) : signal de commande, (c) : paramètres estimés, (d) : signal d'erreur	85

## Chapitre IV

<b>Figure IV.1:</b>	Système de commande à retour unitaire classique	88
<b>Figure IV.2</b>	Correcteur PID,(a) :Ordre entier,(b) :Ordre fractionnaire	91
<b>Figure IV.3</b>	Fractionalisation d'un intégrateur	94
<b>Figure IV.4</b>	Contrôleur <i>PI</i> adaptatif d'ordre entier	95
<b>Figure IV.5</b>	Contrôleur <i>PI</i> adaptatif fractionné	96
<b>Figure IV.6</b>	Commande PI et PI Fractionnée d'un système 3 <sup>ème</sup> ordres	98
<b>Figure IV.7</b>	Commande PI et PI fractionnée d'un radiateur	99
<b>Figure IV.8</b>	Commande PI et PI fractionnée d'un four	101
<b>Figure IV.9</b>	Commande PID et PID fractionnée d'un Mcc	102
<b>Figure IV.10</b>	Commande PID et PID fractionnée d'un Radiateur	104
<b>Figure IV.11</b>	Commande PID et PID fractionnée d'un modèle de 2 <sup>ème</sup> ordre	105
<b>Figure IV.12</b>	Sortie du MCC après l'application de la commande PI Adaptative entier et fractionnée ( $\alpha=0.3$ ) avec bruit aléatoire à la sortie(amplitude 5% du signal de référence)	107
<b>Figure IV.13</b>	Les signaux de commande d'un PI Adaptatif entier et fractionné ( $\alpha=0.3$ )	108
<b>Figure IV.14</b>	Evolution de paramètre k1	108
<b>Figure IV.15</b>	Evolution de paramètre k2	109
<b>Figure IV.16</b>	Sortie du MCC après l'application de la commande PI Adaptative entier et fractionnée ( $\alpha=0.3$ ) avec bruit aléatoire à la sortie(amplitude 5% du signal de référence)	109
<b>Figure IV.17</b>	Les signaux de commande de PI Adaptative entier et fractionnée ( $\alpha=0.3$ )	110
<b>Figure IV.18</b>	Evolution de paramètre k1	110
<b>Figure IV.19</b>	Evolution de paramètre k2	111

# LISTE DES TABLEAUX

## Chapitre II :

<b>Tableau II.1</b>	Paramètres dynamiques du robot SCARA	46
<b>Tableau II.2</b>	Dépassement et retard pour les différentes valeurs de $\alpha$	55
<b>Tableau II.3</b>	Le Critère de l'erreur quadratique J avec un bruit aléatoire de 5% de la sortie	65
<b>Tableau II.4</b>	Le Critère de l'erreur quadratique J avec un bruit aléatoire de 20 % de la sortie	65

## Chapitre IV

<b>Tableau IV.1</b>	Les caractéristiques d'un PI et PI fractionné de système 3 <sup>ème</sup> ordres	98
<b>Tableau IV.2</b>	Les caractéristiques d'un PI et PI Fractionné d'un radiateur	100
<b>Tableau IV.3</b>	Les caractéristiques d'un PI et PI Fractionné du four	101
<b>Tableau IV.4</b>	Comparaison entre la commande PID et PID fractionnée d'un MCC	103
<b>Tableau IV.5</b>	Comparaison entre la commande PID et PID fractionnée d'un Radiateur	104
<b>Tableau IV.6</b>	Comparaison entre la commande PID et PID fractionnée d'un modèle de 2 <sup>ème</sup> ordre	106
<b>Tableau IV.7</b>	Le critère de l'erreur quadratique J avec un bruit aléatoire de 5% de la sortie	111
<b>Tableau IV.8</b>	Le critère de l'erreur quadratique J avec un bruit aléatoire de 20 % de la sortie.	112

## **Introduction Générale**

Le monde industriel connaît actuellement un énorme développement technologique, sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants du point de vue qualité et performances. Ce progrès technologique et industriel est dû pour beaucoup au grand saut qualitatif qu'a connu l'outil informatique logiciel et matériel, notamment depuis l'apparition des microprocesseurs, ce qui a permis de rendre possible l'application de méthodes et de techniques considérées jusqu'à présent comme purement théoriques. Cela est dû aussi au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes.

L'une des théories qui connaissent actuellement une grande popularité parmi les chercheurs aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénierie, le Calcul fractionnaire dont les premières prémices datent de plus de trois siècles. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordre entier par des opérateurs d'ordre fractionnaire, permettant le calcul de la dérivée d'une fonction différentiable  $f(t)$ ,

$$D^\alpha f(t)/dt^\alpha$$

Où  $\alpha$  est un nombre réel.

Il est clair que jusqu'à une période très récente, une telle notion mathématique n'avait aucune explication réelle ou pratique. Ce n'est qu'au début des années 1950 que Van Der Ziel [147] dans ses recherches sur les spectres de bruit des semi-conducteurs, puis Davidson et Cole dans leurs travaux sur la relaxation diélectrique dans certains liquides, ont pu mettre à jour des phénomènes naturels dont les modèles faisaient appel à la dérivée d'ordre fractionnaire.

Depuis ces découvertes, beaucoup de travaux de recherche scientifique ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leur intérêt en mathématique, en

traitement du signal et en automatique [64,109]. Ce fait est dû à une meilleure compréhension des potentialités du calcul fractionnaire dans beaucoup de phénomènes physiques tels que la viscoélasticité, les lignes de transmission, l'électromagnétisme de propagation d'onde, la polarisation des diélectriques et le transfert thermique. Ce sont des exemples qui montrent une dynamique d'ordre fractionnaire, où l'application des outils du calcul fractionnaire est adéquate et dans certains cas essentielle pour une caractérisation complète des phénomènes impliqués.

Les opérateurs d'ordre fractionnaires trouvent une place de plus en plus prépondérante dans la commande des systèmes dynamiques où le système à contrôler et/ou le régulateur sont régis par des équations différentielles fractionnaires. L'introduction de ces outils fractionnaires est motivée par une plus grande liberté dans la conception et l'ajustement des régulateurs, le caractère robuste que procure cette commande à l'instar de la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) introduite par Oustaloup [111] et la commande robuste d'ordre fractionnaire basée sur la fonction de transfert idéale de Bode par Djouambi et al. [52], ainsi qu'une amélioration sensible des performances temporelles du système commandé, voir Charef et al. [43], Ladaci [82], Ladaci et Charef [80], Ladaci et Bensafia [89].

## **1. Commande adaptative d'ordre fractionnaire**

Au début des années 1990 Oustaloup a proposé sa fameuse Commande CRONE [111]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée, en imposant un gabarit fractionnaire au système de commande en boucle fermée. La réussite de cette approche fut énorme, plusieurs variantes de cette commande ont vu le jour (1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> générations).

Une autre technique de commande d'ordre fractionnaire connaît un franc succès, elle est basée sur la généralisation du régulateur PID au cas fractionnaire, ce qui donne la commande  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  proposé initialement par Podlubny [121]. Plusieurs chercheurs ont proposé des techniques d'ajustement des paramètres de ce régulateur tels que Barbosa et al. [18], Bettouet Charef [32, 33], Tajbakhsh et Balochian [141]...etc.

L'une des techniques de commande qui a connu une grande notoriété, est la commande adaptative, qui comme son nom l'indique, consiste à adapter le régulateur en ligne aux variations du procédé régulé pour assurer une qualité constante de performances. Les

processus commandés sont totalement inconnus (systèmes boîtes noires) ou partiellement inconnus, ou des systèmes dont les paramètres varient dans le temps.

Un travail de recherche considérable sur la commande adaptative a été effectué depuis le début des années 1950. La première motivation fut la commande des avions de haute performance. Durant les vingt années suivantes, d'importance contribution théorique ont vu le jour [11].

C'est au début des années 2000 que les premiers travaux sur la commande adaptative d'ordre fractionnaire, impliquant des opérateurs ou des filtres d'ordre fractionnaire dans la boucle de commande en temps réel ont vu le jour, particulièrement les travaux sur la commande adaptative à modèle de référence (CAMR) de Vinage et al. [149] et Ladaci et Charef[80] qui ont montré l'amélioration obtenue avec les systèmes fractionnaire comparativement aux algorithmes CAMR classiques.

D'autres régulateurs adaptatifs ou auto-ajustables d'ordre fractionnaire ont vu le jour depuis [79,86], tels que la commande auto-ajustable PID fractionnaire par Ladaci et Charef [81] et celle basée sur l'approche extrémale proposée par Neçaibia et Ladaci [105], la commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire par Aguila-Camacho et Duarte-Mermoud [2] et Shi et al. [137], la commande adaptative robuste d'ordre fractionnaire basée sur la propriété de réalité positive par Ladaci et al. [85] et Wei et al. [150], la commande adaptative extrémale d'ordre fractionnaire proposée par Neçaibia et al. [106-107] ...etc.

## **2. La Robustesse**

La robustesse est une notion très large qui traduit toujours la même idée, à savoir l'insensibilité ou par défaut la quasi-insensibilité à la variation de certains paramètres du système étudié. Aussi, dans un même domaine, il existe autant de types de robustesses que de grandeurs insensibles. Le domaine de la commande n'y échappe pas. Dans celui-ci, il est fréquent de considérer la robustesse de la stabilité dont l'objectif est le maintien de la stabilité ou en d'autre terme, la garantie d'une valeur maximale du facteur de résonance en asservissement ou en régulation [75].

Dans l'approche fractionnaire la robustesse est de nature plus sévère puisqu'il s'agit de la robustesse du degré de stabilité. L'objectif étant alors le maintien de la performance dynamique fréquentielle ou temporelle qui mesure ce degré (robustesse en performance). Plus précisément, la robustesse dont il s'agit est celle d'insensibilité par rapport aux bruits.

### **3. Objectifs et contributions de la thèse**

Le sujet de cette thèse se place dans ce contexte car il traite un domaine dont les origines théoriques sont très anciens alors que son développement et ses applications sont très récents. Intitulé « Utilisation des Filtres Fractionnaire pour la Conception des Régulateurs Adaptatifs Robustes », il a pour but d'améliorer la robustesse des systèmes de commande adaptative classique par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire (filtres) dans les algorithmes de contrôle. Notre intérêt pour l'introduction de ces filtres dans les schémas de commande adaptative a été motivé par les très bonnes performances des systèmes d'ordre fractionnaire relativement à celles des systèmes d'ordre entier classiques [64,96].

La contribution majeure de cette thèse, publiée dans trois revues internationales en plus d'une dizaine de conférences internationalement reconnues, est basée sur l'introduction de filtres d'ordre fractionnaire par différentes techniques :

- l'utilisation d'un modèle mathématique d'ordre fractionnaire approximé par une fonction de transfert rationnel, dans le schéma de commande adaptative CAMR,
- le placement de pôles d'ordre fractionnaire dans la boucle de commande adaptative afin d'imposer des dynamiques fractionnaire et 'profiter' des propriétés intéressantes de robustesse et performances temporelles qui sont celles de ces 'filtres' fractionnaires.
- L'introduction d'une nouvelle technique appelée 'Fractionalisation' qui consiste à transformer le système de commande classique en système 'fractionnaire' par le remplacement de transferts d'ordre entier par une cascade de transferts fractionnaires.

Ces résultats et d'autres en cours de développement et publications ont montré l'intérêt de cette démarche sur l'amélioration du rendement et du comportement des processus commandés en temps réel.

#### **4. Présentation de la thèse**

Cette thèse est organisée en quatre chapitres :

- Le premier chapitre présente une base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour le développement des chapitres qui suivent. Les concepts de base et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire y sont répertoriés.
- Le deuxième chapitre est dédié à la commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire. Il introduit les définitions des schémas de commande adaptative concernés par ce travail de recherche et l'application de cette technique sur un système de deuxième ordre ainsi que pour le robot SCARA dans le but d'améliorer les performances de ces derniers.
- Le chapitre 3 présente la commande par placement de pôles (fixe et adaptative) d'ordre entier et fractionnaire avec des exemples de simulation.
- Le chapitre 4 traite d'une nouvelle approche qui est "La Fractionalisation" proposée dans cette thèse, qui peut être introduite dans les différents schémas de commande classiques existants pour améliorer les performances des systèmes. Nous avons présenté trois techniques de commande à savoir : la commande PI, la commande PID et La commande PI adaptative et une comparaison entre le cas entier et « fractionnalisé » sera présenté.
- Enfin, une conclusion générale vient récapituler les résultats obtenus dans cette thèse et donner un aperçu sur les perspectives projetées pour la continuation de ce travail.

# Chapitre I

## Les Systèmes d'ordre Fractionnaire

### I.1 Introduction

Les systèmes d'ordre fractionnaire ont reçu un intérêt considérable dans de nombreux domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Ces systèmes sont généralement décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans le domaine fréquentiel, ils sont représentés par des fonctions de transfert irrationnelles. A cause de ces fonctions irrationnelles, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été marginalement étudiés. Comme ils n'ont pas de solutions analytiques exactes, les techniques numériques et d'approximation sont largement utilisées pour leur résolution, analyse et implémentation.

Dans ce chapitre, nous allons donner des définitions du calcul fractionnaire et des opérateurs d'ordre fractionnaires, quelques propriétés principales et aussi la transformée de Laplace des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. Nous allons en particulier présenter quelques méthodes d'approximation des opérateurs et transferts d'ordre fractionnaire

#### I.1.1 Historique

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux 19 siècles par Riemann et Liouville. Leur but devait prolonger la dérivation ou intégration d'ordre fractionnaire en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers [103].

L'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Leibniz, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire [139]. Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre  $n$ ,

$\frac{d^n y}{dx^n} \equiv D^n y$ , où  $n$  est un entier positif. Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa

L'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir  $n$  dans  $\mathcal{Q}$ . Il posa la question : et si  $n = \frac{1}{2}$ ?

En 1695, dans une lettre à L'Hospital, Leibniz écrivit prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que  $d^{\frac{1}{2}}x$  sera égal à  $\sqrt{dx \cdot x}$ , un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences». Sur ces questions, nous retrouvons les contributions de grands

mathématiciens tels qu'Euler ou Lagrange au XVIII<sup>ème</sup> siècle, Laplace, Fourier, Liouville (1832; 1837) ou Riemann (1847) au XIX<sup>ème</sup> siècle, ainsi qu'à Grünwald (1867) et Letnikov (1868) dans la seconde moitié du même siècle. Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Pour plus de détails historiques, nous renvoyons à [54], [99], [109], [133]. Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés.

Dans les dernières années un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie, où on a pu trouver un progrès significatif de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation pour un nombre d'applications dans ces domaines. Donc, un grand effort a été fait pour essayer de mettre en pratique les résultats déjà établis, et un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire.

### **I.1.2. La modélisation d'ordre Fractionnaire**

La représentation mathématique des systèmes fractionnaires dans le domaine fréquentiel donne des fonctions irrationnelles qui, dans le domaine temporel, correspondent à des équations différentielles difficiles à exploiter. Vu l'absence de méthodes mathématiques, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire étaient jusque-là étudiés de façon marginale seulement, que ce soit en théorie ou en application. Pour des raisons d'analyse, de synthèse, et de simulation de tels systèmes, l'utilisation des fonctions rationnelles pour l'approximation s'avère d'une grande importance. Alors pour analyser et concevoir les systèmes de commande d'ordre fractionnaire il faut les approximer par des fonctions rationnelles.

La modélisation d'ordre fractionnaire consiste à décrire les phénomènes physiques associés à des dispositifs dont le comportement peut être régi par des équations aux dérivées partielles. Le calcul infinitésimal (différentiel et intégral) d'ordre fractionnaire marque son début au XVII<sup>ème</sup> siècle, après quelques travaux de Gottfried Wilhelm Leibniz (1697) et Leonhard Euler (1730). Cent ans plus tard il recommence à être étudié par un

grand nombre de mathématiciens célèbres comme P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A. K. Grünwald (1867-1872) ou A.V. Letnikov (1868-1872) [60]. Bien qu'il ne soit pas nouveau, le calcul infinitésimal d'ordre fractionnaire est redevenu un sujet d'étude dans la deuxième moitié du XX<sup>ème</sup> siècle. Le formalisme mathématique de la dérivation non entière associé au développement des outils informatiques a permis d'envisager des applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur du FOD (Fractional Order Differential).

Aujourd'hui, l'approche fractionnaire est ainsi appliquée pour la modélisation des dispositifs électriques [31, 37, 39, 95, 123], pour la modélisation des conséquences des désastres naturel [113] ou pour la synthèse de la commande [89,104, 111]. La modélisation d'ordre fractionnaire est aussi présente dans le domaine des sciences biologiques (les modèles des parties du corps humain) [49] ou même des sciences humaines et sociales (la modélisation des comportements des marchés) [78].

### I.1.3. Commande d'ordre fractionnaire

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) était proposé par Oustaloup [112]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. La synthèse d'une telle commande est effectuée de façon que l'équation différentielle d'ordre fractionnaire qui la décrit, soit de la même forme que celle qui régit la relaxation de l'eau sur une digue poreuse. Il a été remarqué qu'un tel phénomène physique est robuste au sens de l'automaticien. En effet, une observation attentive de la relaxation montre que son amortissement est indépendant de la nature de la digue, fluvial ou côtière, donc d'un certain nombre de paramètres, entre autre la masse d'eau en mouvement. Ce résultat est aussi remarquable que paradoxale dans l'approche entière de la mécanique où toute relaxation présente un amortissement lié à la masse transportée.

Depuis cette initiative, La commande d'ordre fractionnaire a attiré l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, Podlubny [119] a proposé le régulateur  $PI^\alpha D^\beta$  qui contient une intégration fractionnaire d'ordre  $\alpha$  et une dérivation fractionnaire d'ordre  $\beta$ , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande. La commande adaptative d'ordre fractionnaire a connu ses premières publications au début des années 2000,

avec les travaux de Ladaci et Charef [79-81], et Vinagre et al. [149]. Depuis, plusieurs dizaines de travaux sur les approches de commande adaptative d'ordre fractionnaire sont publiés annuellement [86].

## I.2. Domaines d'application des systèmes fractionnaires:

Les applications de la théorie du calcul fractionnaire aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénieries ont très diverses (voir les ouvrages [64, 66, 135]).

Les systèmes d'ordre fractionnaires sont tout particulièrement intéressants pour représenter finement et avec un ordre réduit les dispositifs dont le fonctionnement repose sur la diffusion d'une grandeur (champ, température, etc.). Ils apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents domaines de recherches.

### I.2.1 Électronique :

Grâce à des données expérimentales, Schmidt et Drumheller [136] montrent que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension. En effet en utilisant un composé ( $LiN_2H_5SO_4$ ) et en procédant à des mesures sur une large gamme de températures et de fréquences, ils constatent que les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité ou encore, de la fonction diélectrique  $\varepsilon = \varepsilon' + j\varepsilon''$  sont très grandes ( $\varepsilon' \approx \varepsilon'' \approx 10^6$ ) et varient en fonction de la fréquence suivant un ordre de puissance  $\frac{1}{2}$  (avec  $\varepsilon' \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon'' \in \mathbb{R}$ ). Dans [102, 136], nous trouvons la relation suivante, valable pour un composé :

$$\varepsilon = \varepsilon' \omega^{-\frac{1}{2}} (1 - j) = \varepsilon' \sqrt{2} (j\omega)^{-\frac{1}{2}}, \text{ avec } j = \sqrt{-1} \quad (I.1)$$

En utilisant la relation entre la fonction diélectrique et l'impédance, on obtient la relation suivante :

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \varepsilon'} \quad (I.2)$$

Où  $C_e$  est une constante.

En substituant la relation (I-1) dans (I-2), on a

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \varepsilon' \sqrt{2} (j\omega)^{-\frac{1}{2}}} \quad (\text{I.3})$$

qu'on peut éventuellement mettre sous la forme

$$Z = \frac{K}{(j\omega)^{\frac{1}{2}}} \text{Où } K = \frac{1}{\sqrt{2} C_e \varepsilon'} \quad (\text{I.4})$$

ou encore, en fonction de la variable de Laplace  $s$  :

$$Z = \frac{K}{s^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{I.5})$$

L'équation (I.5) montre en effet qu'on peut bien définir une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux spécifiques et par conséquent définir le terme "Fractor", par analogie au terme anglais "Capacitor", pour mettre l'accent sur le caractère fractionnaire de l'impédance.  $K$  désigne alors la constante du "Fractor" (capacité fractionnaire). La réalisation d'une impédance fractionnaire peut se faire par juxtaposition en série de cellules Résistance-Capacité (d'impédance traditionnelle).

### I.2.2. Electrotechnique :

Les machines électriques sont des composants omniprésents dans les systèmes et réseaux d'énergie électrique, que ce soit pour la génération (centrales électriques) ou pour les usages industriels ou domestiques en incluant le transport. Avec l'électrification croissante des principaux domaines industriels, on trouve des actionneurs électriques dans les réseaux de forte puissance comme ceux de taille plus modeste (réseaux embarqués ou iliens) [122,69, 74, 92, 134].

La modélisation précise et compacte des machines électriques devient donc un objectif essentiel en termes de conception et de simulation des futurs systèmes et réseaux électriques. La finesse des modèles des générateurs et moteurs, synchrone et asynchrone notamment, est ainsi très importante dans l'étude de la stabilité, de sécurité et de fiabilité des réseaux. Ils doivent désormais tenir compte des effets liés aux harmoniques générés par les dispositifs d'électronique de puissance massivement insérés dans le réseau de manière à le gérer plus efficacement, pour modéliser l'influence de ces harmoniques sur le comportement dynamique des machines (surtout sur le couple électromagnétique) [153].

Pour construire un modèle valable sur une grande plage de fréquences, il est nécessaire de tenir compte de l'effet de peau dans certaines parties conductrices de la machine. Pour la machine synchrone, les courants induits liés à la diffusion du champ magnétique, se localisent principalement dans les barres de la cage d'amortisseurs ou dans les pièces massives du rotor. Pour la machine asynchrone, ces effets induits se situent dans la cage d'écureuil de la machine.

Les travaux sur l'utilisation des systèmes d'ordre non entier pour la modélisation des machines électriques ont été commencés dans les années 90 par le professeur Ivanès et Retière au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, en France. Pendant plus d'une décade, plusieurs articles sont apparus, traitant de la méthode, son application et l'identification des paramètres des nouveaux schémas équivalent [124,125,127,130]. D'autres travaux ont utilisé la modélisation d'ordre non entière pour modéliser les phénomènes transitoires dans les machines électriques [56,57].

L'idée principale consiste à insérer des impédances d'ordre non entier dans les schémas équivalents classiques de machines en tenant compte de la localisation des courants induits dans la machine. Une étude analytique complète dans [126] a permis de valider cette approche dans le cas de la machine asynchrone. Cette démarche permet de construire des modèles de connaissance et d'ordre réduit des machines électriques tournantes, valables sur une large plage de fréquences. A l'inverse de la modélisation classique, la modélisation d'ordre fractionnaire permet de caractériser correctement les machines électriques aussi bien en régime permanent qu'en régime transitoire où il faut prendre en compte les effets liés à la fréquence d'alimentation, comme par exemple l'effet de peau.

### **I.2.3. Automatique :**

En automatique, peu d'auteurs ont utilisé des lois de commande introduisant des dérivées fractionnaires. Podlubny [120], Chen et al [44], et Caponetto et al [38] ont montrés que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs fractionnaires. Ils proposent une généralisation des contrôleurs traditionnels PID. Mbodje et Montseny [98] et Matsuda et Fuji [97] ont appliqué avec succès des lois de commande fractionnaires à des systèmes à paramètres distribués. Cependant, nous ne pouvons aborder le sujet de contrôle fractionnaire sans invoquer l'approche CRONE,

introduite par Oustaloup [111]. La commande CRONE est le travail d'un groupe de chercheurs au Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS) de Bordeaux sous la direction d'Alain Oustaloup. Elle fait l'objet de nombreuses publications et de plusieurs ouvrages. La méthodologie CRONE permet la synthèse dans le domaine fréquentiel de commandes dynamiques robustes par retour de sortie pour des systèmes linéaires stationnaires (LTI), incertains, monovariables (SISO) [114] ou multivariables (MIMO) [90]. Les performances auxquelles elle conduit s'expliquent autant par la prise en compte aussi peu pessimiste que possible des incertitudes portant sur les systèmes commandés, que par l'efficacité des paramètres de réglage utilisés.

La commande PID d'ordre fractionnaire ( $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ) a aussi connu un très grand succès auprès des chercheurs en théorie de contrôle, depuis sa proposition par Podlubny [121]. Plusieurs travaux ont été consacrés à l'ajustement des paramètres de ce régulateur qui a prouvé son efficacité et sa supériorité par rapport à la commande PID classique [3, 34, 59, 101].

La commande adaptative d'ordre fractionnaire attire aussi un intérêt croissant des chercheurs automaticiens, avec plusieurs schémas proposés régulièrement [1, 43, 150], et des applications aussi variées que la robotique [50], les machines électriques [140], la commande d'une chaudière [62], ou les panneaux solaires [107]...etc.

#### I.2.4. Chimie

Les dispositifs de stockage sont de plus en plus présents dans les réseaux ou systèmes d'énergie dans la mesure où ils peuvent contribuer à une gestion énergétique plus efficace, du point de vue du producteur, du consommateur ou du distributeur [91].

A ce titre, les batteries électrochimiques (plomb, Ni-Cd, Li-ion ou autres) et les supercapacités ont un potentiel d'utilisation considérable dans un contexte de diversification des sources et d'utilisation d'énergies intermittentes. Mais là encore, il est nécessaire de bien maîtriser leur fonctionnement dynamique de manière à bien les dimensionner et mettre en place des stratégies de gestion de l'énergie en tenant compte de leur état de charge et de leur vieillissement (BMS : Battery Management System).

Le super-condensateur est un condensateur de très grande capacité par rapport à ses dimensions relativement petites grâce au phénomène de double couche . Il permet ainsi de disposer de densités de puissance beaucoup plus importantes que celles des batteries plus utilisées comme sources d'énergie. Que ce soit pour une batterie ou une supercapacité, il est nécessaire de modéliser finement la porosité au niveau des électrodes où diffusent les ions de l'électrolyte [145]. De manière similaire aux machines électriques et piles à combustible, ce phénomène peut là encore être modélisé électriquement par des systèmes d'ordre non entier.

Le modèle classique du super-condensateur est présenté sur la fig. I.1 ci-dessous.

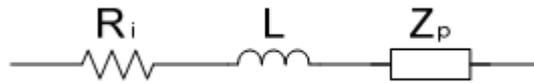


Figure I.1. Schémas équivalent du super-condensateur

Il est composé de trois éléments : une résistance interne  $R_i$  (qui modélise l'électrolyte et ses connections), une inductance  $L$  (qui modélise des connections et qui élimine des erreurs d'identification aux fréquences intermédiaires) et une impédance complexe  $Z_p$  modélisant la porosité des électrodes du super-condensateur [35].

$$Z_p(\omega) = \frac{\tau \cdot \coth(\sqrt{j\omega \cdot \tau})}{C \cdot \sqrt{j\omega \cdot \tau}} \quad (\text{I.6})$$

Classiquement, on peut approcher l'impédance  $Z_p$  par un nombre fini de cellules R-C placées en parallèle [35]. Cette approche conduit toutefois à un modèle comportant beaucoup (trop) de paramètres pour une approche Systèmes.

Dans [131] est proposée une approximation de l'impédance  $Z_p$  par un système d'ordre  $\frac{1}{2}$  décrit par (I.7). Cela permet d'obtenir une très bonne cohérence avec le modèle analytique, en identifiant un minimum de paramètres (4 au lieu d'environ 20 pour le modèle classique).

$$Z_p^{1/2}(\omega) = \frac{\sqrt{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}{C_0 \cdot j\omega} \quad (\text{I.7})$$

La modélisation d'ordre non entier a ainsi permis de réduire considérablement l'ordre du modèle (nombre de paramètres) et en même temps d'améliorer la précision de sa représentation fréquentielle. Il faut cependant noter que le modèle développé en [131] est linéaire, ce qui veut dire qu'il ne prend pas en compte l'influence de la température ou d'effets de tension. Néanmoins, d'autres travaux présentent des modèles d'ordre fractionnaire de supercapacités non linéaires [31].

Pour les batteries, des travaux similaires utilisent la modélisation d'ordre non entier pour réduire l'ordre de représentation, mais également pour caractériser le vieillissement de la batterie à partir d'un nombre restreint de paramètres [77].

### I.2.5 Thermique : Diffusion et équation de la chaleur

L'exemple le plus simple de système fractionnaire est l'équation de la chaleur à une dimension spatiale, commandée aux bords. En opérant un bon choix de la variable de sortie, nous obtenons un dérivateur d'ordre  $\frac{1}{2}$ . À partir de ce transfert, il n'est pas compliqué de construire un système physique idéalisé qui représente un transfert fractionnaire propre, à savoir un transfert d'ordre deux avec une dérivation d'ordre  $\frac{3}{2}$ . Cet exemple a été traité dans [16] et repris dans [93, 65, 119, 136]. On rappelle que l'équation de la chaleur est donnée par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = c \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < 0 \quad (\text{I.8})$$

où  $t$  est une variable scalaire libre symbolisant le temps,  $x$  une variable libre scalaire ou vectorielle, représentant l'espace et  $c$  une constante positive. Nous nous intéressons ici à l'équation de la chaleur à une dimension spatiale ; où la variable libre  $x$  est scalaire. Nous considérons les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$v(0, x) = 0, \quad \text{pour } x < 0$$

$$v(t, 0) = u(t), \quad \text{pour } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(t, x) = 0, \quad \text{pour } t > 0$$

Nous supposons que  $u$  est une fonction de type exponentiel avec variation bornée presque partout (ceci garanti l'existence de la transformée de Laplace de  $v$  et la validité de la formule intégrale de la transformée inverse). Ainsi, le problème peut être résolu par passage dans le plan opérationnel. En utilisant la transformée de Laplace nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(S, x)}{\partial x^2} = \frac{S}{c} \hat{v}(S, x), \quad \text{pour } x > 0 \quad (\text{I.9})$$

$$\hat{v}(S, 0) = \hat{u}(s)$$

La solution formelle de (I-9) est

$$\hat{v}(S, x) = C_1(S) \exp\left(-x \sqrt{\frac{S}{c}}\right) + C_2(S) \exp\left(x \sqrt{\frac{S}{c}}\right)$$

Pour des raisons de bornitude, et tenant compte de la condition aux limites  $\hat{v}(S, 0) = \hat{v}(S)$  on obtient :

$$\hat{v}(S, x) = \hat{u}(S) \exp\left(x \sqrt{\frac{S}{c}}\right) \quad (\text{I.10})$$

Pour  $x > 0$

$$\exp\left(x \sqrt{\frac{S}{c}}\right) = \mathcal{L} \left\{ \frac{x}{2\sqrt{\pi c}} t^{-\frac{2}{3}} \exp\left(\frac{x^2}{4ct}\right) \right\}$$

$$\text{Soit } : v(t, x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi c}} \int_0^t \tau^{-\frac{2}{3}} \exp\left(\frac{x^2}{4c\tau}\right) u(t - \tau) d\tau \quad (\text{I.11})$$

D'une part, on vérifie que (I.11) est bien une solution de l'équation (1.8), d'une autre part, à partir de (I.9), on déduit que :

$$\frac{\partial \hat{v}(S, x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{c}} S^{\frac{1}{2}} \hat{v}(S, x),$$

Et en particulier,

$$\frac{\partial v(S, 0)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{c}} S^{\frac{1}{2}} \hat{u}(S)$$

Si nous définissons comme variable de sortie :

$$y(t) \triangleq \sqrt{c} \frac{\partial v(t,0)}{\partial x},$$

Nous obtenons le transfert suivant :

$$\hat{y}(S) = S^{\frac{1}{2}} \hat{u}(S)$$

Ce qui permet d'établir le constat suivant : l'équation de transfert de la chaleur avec l'entrée et la sortie  $y$  est donc un dérivateur d'ordre  $\frac{1}{2}$ .

### I.2.6. Mécanique

La déformation des milieux continus (solides ou liquides) est souvent décrite à l'aide de deux tenseurs, celui des déformations noté  $\varepsilon_{ij}$  et celui des contraintes  $\sigma_{ij}$ . Certains matériaux, comme les polymères (gommes, caoutchouc,...), présentent un comportement intermédiaire entre caractères visqueux et élastiques, qualifié de viscoélastique. De tels systèmes peuvent être modélisés à l'aide de la relation suivante entre les deux tenseurs :

$$\sigma_{ij} = E \varepsilon_{ij}(t) + \eta \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon_{ij}(t), \quad 0 < \alpha < 1$$

Cette loi est justifiée par Bagley et Torvik dans [119,120] (pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ ). Dans [25] l'introduction de dérivée fractionnaire dans le cas de polymères est motivée par l'analyse suivante : à cause de la longueur des fibres, les déformations appliquées prennent du temps à être communiquées de proche en proche (la longueur des fibres, enroulées, étant bien supérieure à la distance géométrique). Elles sont progressivement amorties et induisent des effets de mémoire (l'état à l'instant  $t$  va dépendre des états antérieurs). Si la contrainte décroît comme  $t^{-(1+\alpha)}$  elle pourra induire une dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$ . Cet opérateur permet ainsi de donner une description macroscopique simple (ne nécessitant que peu de paramètres) de phénomènes microscopiques complexes. Une présentation de la viscoélasticité via la dérivation fractionnaire est donnée dans [53].

### I.2.7. Acoustique

Pour certains instruments de musique à vent les pertes viscothermique peuvent être modélisées efficacement à l'aide de dérivées fractionnaires temporelles [63].

### I.3 Calcul Fractionnaire

Le calcul fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre fractionnaire) est le champ de l'analyse mathématique et l'application des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et encore nouveau. Ces dernières années l'intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par ses applications dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie.

La représentation mathématique des systèmes fractionnaires dans le domaine fréquentiel donne des fonctions irrationnelles qui, dans le domaine temporel, correspondent à des équations différentielles difficiles à exploiter. Vu l'absence de méthodes mathématiques, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire étaient jusque-là étudiés de façon marginale seulement, que ce soit en théorie ou en application. Pour des raisons d'analyse, de synthèse, et de simulation de tels systèmes, l'utilisation des fonctions rationnelles pour l'approximation s'avère d'une grande importance. Alors pour analyser et concevoir les systèmes de commande d'ordre fractionnaire il faut les approximer par des fonctions rationnelles [82].

L'opérateur intégral-différentiel  ${}_c D_t^m$  où  $c$  et  $t$  sont les limites de l'opération est défini ainsi:

$${}_c D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \dots \dots \dots \Re(\alpha) > 0, \\ 1 \dots \dots \dots \Re(\alpha) = 0, \\ \int_c^t (d\tau)^{-m} \dots \dots \dots \Re(\alpha) < 0, \end{cases} \quad (I.12)$$

où  $m$  est l'ordre de l'opération, généralement  $\alpha \in \Re$

#### I.3.1 Définitions fondamentales

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions [7, 42, 109].

##### I.3.1.1 Définition de Riemann-Liouville

**Définition 1** Soient  $\mathbb{C}$  et  $\Re$  les anneaux des nombres complexes et réels respectivement,  $\Re(\cdot)$  Symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient  $\alpha \in \mathbb{C}$  avec  $\Re(\alpha) > 0, t_0 \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty[$ .

L'intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d(\xi) \quad (I.13)$$

avec  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  est la fonction gamma d'Euler.

**Définition 2** Soient  $\alpha \in \mathbb{C}$  avec  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $n$  un entier positif,  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty[$ . La dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de la fonction de  $f$  borne inférieure  $t_0$  est définie par:

$${}_{RL}D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (I.14)$$

Où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < \alpha < n$ .

**Remarque:** pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite  $I^\alpha$  pour  $I_0^\alpha$  et  $D^\alpha$  pour  $D_0^\alpha$ .

### I.3.1.2 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie:

$${}_CD_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (I.15)$$

Où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < \alpha < n$  et  $f^{(n)}(\tau)$  est la dérivée d'ordre entier  $n$  de la fonction  $f(\tau)$ .

### I.3.1.3 Définition de Gröndwald-Leitnikov[42]

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre  $\mu > 0$  de Gröndwald-Leitnikov (G-L) est donnée par:

$$D^\mu f(t) = \frac{d^\mu}{dt^\mu} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\mu} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\mu}{j} f(kh - jh) \quad (I.16)$$

Où  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients

$$\omega_j^{(\mu)} = \binom{\mu}{j} = \frac{(\mu+1)}{(j+1)(\mu-j+1)} \quad (I.17)$$

Avec  $\omega_0^{(\mu)} = \binom{\mu}{0} = 1$ , sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1 - Z)^\mu = \sum_{j=0}^\infty (-1)^j \binom{\mu}{j} Z^j = \sum_{j=0}^\infty \omega_j^{(\mu)} Z^j \quad (I.18)$$

La définition de Grünwald-Leitnikov de l'intégrale d'ordre fractionnaire est formulée comme suit :

$$I^\lambda f(t) = D^{-\lambda} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\lambda}{j} f(kh - jh) \quad (I.19)$$

Où  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients  $\omega_j^{(-\lambda)}$  avec  $\omega_j^{(-\lambda)} \binom{-\lambda}{j} = 1$ , sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1 - Z)^{-\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\lambda}{j} Z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{(-\lambda)} Z^j \quad (I.20)$$

### I.3.2 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [42] :

1. si  $f(z)$  est une fonction analytique de  $z$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\alpha f(z)$  est une fonction analytique de  $z$  et  $\alpha$ .
2. pour  $\alpha = n$ , ou  $n$  est un entier, l'opération  $D^\alpha f(z)$  donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier.
3. pour  $\alpha = 0$  l'opération  $D^\alpha f(z)$  est l'opérateur identité:  $D^0 f(z) = f(z)$ .
4. la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires:

$$D^\alpha (a f(z) + b g(z)) = a D^\alpha f(z) + b D^\alpha g(z) .$$

5. la loi additive (propriété du semi groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z) .$$

est valable sous certaines contraintes sur la fonction  $f(z)$ .

### I.3.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

#### I.3.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  définie par l'équation (I.13), qu'on peut écrire comme une convolution des fonctions  $g(t) = t^{\alpha-1}$  et  $f(t)$  [21, 36, 37] :

$$I^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = t^{\alpha-1} * f(t) \quad (I.21)$$

La transformée de Laplace de la fonction  $t^{\alpha-1}$  est :

$$G(S) = L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)S^{-\alpha} \quad (I.22)$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution:

$$L\{f(t) * d(t)\} = F(S).G(S)$$

On obtient la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville et celle de Gründwald- Leitnikov :

$$L\{I^\alpha f(t)\} = S^{-\alpha}F(S) \quad (I.23)$$

### I.3.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée [45].

#### A. Définition de Riemann-Liouville

$$L\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(S) - \sum_{K=0}^{n-1} S^K [D^{\alpha-K-1} f(t)]_{t=0} \quad (I.24)$$

Avec  $(n-1) < \alpha < n$ . Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue [34]. Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour  $t = 0$ .

#### B. Définition de Caputo

$$L\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(S) - \sum_{K=0}^{n-1} S^{K-\alpha-1} f(0) \quad (I.25)$$

Avec  $(n-1) < \alpha < n$

#### Remarque

L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est que celle de Caputo permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter telles que:  $y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \dots$  etc. De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à  $t = 0$ . La seule exception est quand on prend  $t = -\infty$  comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville. Cependant, quand on s'intéresse à des processus transitoires, on ne peut pas accepter de placer le point de départ à  $-\infty$ ; dans ce cas la définition de Caputo semble être la plus appropriée quand on la compare aux autres.

**C. Définition de Gründwald-Leitnikov[82] :**

$$L\{D^\alpha f(t)\} = S^\alpha F(S) \quad (I.26)$$

## I.4 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Dans la suite nous allons présenter quelques méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire qui peuvent être divisées en deux catégories (fréquentielles et numériques)[46], avec un intérêt particulier à la méthode de la fonction singulière [40] qui sera entièrement détaillée dans ce chapitre.

### I.4.1 Méthodes Fréquentielles :

**I.4.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation**

L'expansion des fractions continues [82, 100] est une méthode d'évaluation des fonctions qui converge souvent beaucoup plus rapidement que le développement en série de puissances, et converge dans un domaine plus large du plan complexe. Le résultat de cette approximation pour une fonction irrationnelle  $G(s)$ , peut être exprimé sous la forme

$$G(s) \cong a_0(S) + \frac{b_1(S)}{a_1(S) + \frac{b_2(S)}{a_2(S) + \frac{b_3(S)}{a_3 + \dots}}} \quad (I.27)$$

$$G(S) = a_0(S) + \frac{b_1(S)}{a_1(S) + a_2(S) + a_3(S) + \dots} \quad (I.28)$$

Où  $a_i(S)$  et  $b_i(S)$  sont des fonctions rationnelles de la variable  $S$  ou des constantes. L'application de cette méthode résulte en une fonction rationnelle  $\hat{G}(S)$ , qui est une approximation de la fonction irrationnelle  $G(S)$ .

D'autre part, pour l'interpolation, les fonctions rationnelles sont parfois supérieures aux polynômes, car elles permettent de modéliser les fonctions par des pôles. Ces techniques sont basées sur l'approximation d'une fonction irrationnelle  $G(S)$  par une fonction rationnelle définie par le quotient de deux polynômes de la variable  $S$  :

$$G(S) \cong R_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{P_\mu(S)}{Q_\nu(S)} = \frac{p_0 + p_1 S + \dots + p_\mu S^\mu}{q_0 + q_1 S + \dots + q_\nu S^\nu} \quad (I.29)$$

qui passe par les points  $(s_i, G(s_i)); \dots (s_{i+m}, G(s_{i+m}))$ .

#### I.4.1.1.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrro-différentiels d'ordre fractionnaire

En général, une approximation rationnelle de la fonction  $G(s) = s^\mu$  tel que  $0 < \mu < 1$  (Intégration d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace) peut être obtenue en utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions :

$$G_h(s) = \frac{1}{(1+s.T)^\mu} \quad (\text{I.30})$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^\mu \quad (\text{I.31})$$

Où  $G_h(s)$  est l'approximation pour les hautes fréquences ( $w_T \gg 1$ ), et  $G_l(s)$  l'approximation pour les basses fréquences ( $w_T \ll 1$ ).

#### I.4.1.1.2 Méthode de Carlson

La méthode proposée par Carlson tirée du processus régulier de Newton utilisé pour l'approximation itérative de la racine d'ordre  $\alpha$ , peut être considérée comme appartenant à ce groupe [82]. Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/\mu} - G(s) = 0 \quad (\text{I.32})$$

$$H(s) = (G(s))^\mu \quad (\text{I.33})$$

En définissant  $q = \frac{1}{\mu}$  .  $m = \frac{q}{2}$  à chaque itération, partant de la valeur initiale  $H_0(s) = 1$ , une fonction rationnelle approximée peut être donnée par :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (\text{I.34})$$

Le modèle d'approximation est obtenu ensuite, en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle par son approximation rationnelle.

#### I.4.1.1.3 Méthode de Matsuda

La méthode proposée par [97] est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $G(s) = s^\alpha$  par une fonction rationnelle  $\hat{G}(s)$  en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain. Le gain est calculé en utilisant  $M$  fréquences réparties dans une bande de fréquence  $[\omega_0, \omega_M]$  dans laquelle se fait l'approximation. Pour un ensemble de points sélectionnés  $\omega_i, i = 0, 1, 2 \dots M$ , l'approximation prend la forme :

$$\hat{G}(s) = a_0 + \frac{s-\omega_0}{a_1+} \frac{s-\omega_1}{a_2+} \frac{s-\omega_2}{a_3+} \dots = \left[ a_0; \frac{s-\omega_{i-1}}{a_i} \right]_{i=1}^M \quad (\text{I.35})$$

Où

$$a_i = f(\omega_i), f_0(\omega) = G(s), f_{i+1}(s) = \frac{s - \omega_i}{f_i(s) - a_i} \quad (I.36)$$

Le modèle d'approximation est obtenu en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation.

#### I.4.1.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification

En général toutes les méthodes d'identification dans le domaine fréquentiel peuvent être appliquées pour obtenir une fonction rationnelle, dont la réponse fréquentielle se rapproche de celle de la fonction irrationnelle originale. Par exemple cela peut être la minimisation de la fonction coût suivante :

$$J = \int W(s) |G(w) - \hat{G}(w)|^2 dw \quad (I.37)$$

Où  $W(s)$  est une fonction de pondération,  $G(w)$  la réponse fréquentielle originale, et  $\hat{G}(w)$  est la réponse fréquentielle de la fonction rationnelle approximée. Les deux approches les plus connues sont celles proposées par Oustaloup et Charef.

##### I.4.1.2.1 La méthode d'Oustaloup

L'approximation d'Oustaloup d'un dérivateur généralisé, dont l'action différentielle couvre tout l'espace des fréquences, repose sur une distribution récursive d'une infinité de zéros et de pôles réels négatifs (afin d'assurer un comportement à phase minimale) [111, 112]. Dans le cadre d'une synthèse réaliste (pratique) fondée sur un nombre fini de zéros et de pôles, il convient de réduire le comportement différentiel généralisé sur un intervalle fréquentiel borné, choisi selon les besoins de l'application [114].

Ainsi, l'approximation de l'opérateur  $s^\alpha$ ,  $\alpha \in R^+$ , dans une bande de fréquence  $[\omega_0, \omega_M]$  est donnée par une fonction rationnelle [113] :

$$\hat{G}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1+s/z_k}{1+s/w'_k} \quad (I.38)$$

En utilisant l'ensemble des formules de synthèse suivantes :

$$w'_0 = \alpha^{0.5} \cdot w_u ; w_0 = \alpha^{0.5} w_u ; \frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \frac{w_{k+1}}{w_k} = \alpha \cdot \eta > 1 ; \quad (I.39)$$

$$\frac{w_{k+1}}{w_k} = \eta > 1 ; \frac{w_k}{w'_k} = \alpha > 0 ; N = \frac{\log(w_N/w_0)}{\log(\alpha \cdot \eta)} ; \mu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \cdot \eta)} ; \quad (I.40)$$

$w_u$  étant le gain fréquentiel unité et la fréquence centrale d'une bande de fréquences distribuées géométriquement autour. Soit,  $w_u = \sqrt{w_h \cdot w_b}$  et  $w_b$  sont la haute et basse fréquence respectivement.

#### I.4.1.2.2 Méthode de Charef : Fonction de singularité

Dans le but d'implémenter des modèles d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande présentés dans ce travail, nous utiliserons la méthode appelée "Méthode de la fonction de singularité" développée par Charef et al. [40-42], qui est présentée dans cette section. La méthode d'approximation sera différente selon que le transfert d'ordre fractionnaire à approximer soit du premier ou du second ordre.

- **Système du premier ordre fractionnaire**

Pour un système d'ordre fractionnaire du premier ordre :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} \quad (\text{I.41})$$

On peut réécrire la fonction (I.41) comme suit (voir aussi [42]) :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.42})$$

où  $(N + 1)$  est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système. L'équation (I.42) peut être tronquée à un nombre fini  $N$ , et l'approximation devienne:

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.43})$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$p_i = (ab)^i p_0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.44})$$

$$p_i = (ab)^i a p_0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{I.45})$$

avec,

$$p_0 = P_T 10^{\frac{\epsilon p}{20\beta}} \quad (\text{I.46a})$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\beta)}} \quad (\text{I.46b})$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\beta}} \quad (\text{I.46c})$$

$$\beta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.46d})$$

$\epsilon p$  est l'erreur tolérée en  $dB$ .

avec une pente de  $-20\beta$  dB/dec et son approximation par des lignes droites en zig-zig avec des pentes individuelles de  $-20$  dB/dec et  $0$  dB/dec.

- **Système du second ordre fractionnaire :**

Pour un système de second ordre décrit par l'équation (I.47):

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\xi\frac{s}{w_n} + 1\right)^\beta} \quad (\text{I.47})$$

avec  $\beta$  un nombre réel positif tel que  $0 < \beta < 1$ , on peut distinguer deux cas :

- Cas où  $0 < \beta < 0.5$  :

On peut exprimer la fonction (I.47) comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)\left(\frac{s}{w_n + 1}\right)^\eta}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha\frac{s}{w_n} + 1\right)} \quad (\text{I.48})$$

avec  $\alpha = \xi^\beta$  et  $\eta = 1 - 2\beta$ , ce qui peut aussi être approximé par la fonction,

$$G_e(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha\frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.49})$$

Les singularités (pôles  $P_i$  et zéros  $Z_i$ ) sont données par les formules suivantes :

$$p_i = (ab)^{i-1} z_{1i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.50})$$

$$z_i = (ab)^{i-1} z_{1i} \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{I.51})$$

avec

$$Z_1 = w_n \sqrt{b} \quad (\text{I.52a})$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\eta)}} \quad (\text{I.52b})$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\eta}} \quad (\text{I.52c})$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.52d})$$

$\epsilon p$  est l'erreur tolérée en  $dB$

L'ordre d'approximation  $N$  est calculé en fixant la bande de fréquences de travail, spécifiée par  $w_{max}$  telle que :  $P_{N-1} < w_{max} < P_N$  , ce qui mène à la valeur suivante :

$$N = \text{Partie entière de } \left[ \frac{\log\left(\frac{w_{max}}{P_1}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (I.53)$$

$G_e(s)$  peut alors être écrite sous la forme d'une fonction paramétrique d'ordre  $N + 2$  :

$$G_e(s) = \frac{b_{m_0}s^N + b_{m_1}s^{N-1} + \dots + b_{m_N}}{s^{N+2} + a_{m_1}s^{N+1} + \dots + a_{m_N}} \quad (I.54)$$

Les coefficients  $a_{m_i}$  et  $b_{m_i}$  sont calculés à partir des singularités  $P_i$  ,  $Z_i$  ainsi que  $\alpha$  et  $w_n$  .

- Pour  $0.5 < \beta < 1$

La fonction d'approximation est donnée comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha\frac{s}{w_n} + 1\right)\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)^\eta} \quad (I.55)$$

Où  $\alpha = \xi^\beta$  et  $\eta = 1 - 2\beta$  , qui développée comme précédemment avec les valeurs singulières suivantes :

$$P_i = (ab)^{i-1} p_{1i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (I.56)$$

$$Z_i = (ab)^{i-1} a p_{1i} \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (I.57)$$

$$\text{avec } Z_1 = w_n \sqrt{b} \quad (I.58a)$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\eta)}} \quad (I.58b)$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\eta}} \quad (I.58c)$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (I.58d)$$

$\epsilon p$  est l'erreur tolérée en dB.

$G_e(s)$  peut alors être écrite sous la forme de la fonction paramétrique (I.54).

## I.4.2 Méthodes Numériques :

Le principe de ces méthodes consiste à approximer le modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret en substituant l'opérateur de Laplace  $s$  dans le modèle fractionnaire par son équivalent en temps discret. La discrétisation est une étape nécessaire lorsqu'on utilise des machines fonctionnant en discret pour commander ou simuler des modèles continus. Dans le cas des opérateurs d'ordre fractionnaire analogiques, il existe deux méthodes permettant d'obtenir l'équivalent discret de ces opérateurs analogiques [8].

### I.4.2.1 Méthode directe de discrétisation

La première méthode est appelée méthode directe de discrétisation, car elle permet d'approximer directement l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire dans le domaine discret. Parmi les techniques de discrétisation existantes on peut citer les plus utilisées, la technique de l'expansion en série entière et la technique de l'expansion en fraction continue [58].

#### I.4.2.1.1 Discrétisation utilisant la technique de l'expansion de série entière

La combinaison de la fonction génératrice d'Euler donnée par la règle de discrétisation de l'opérateur dérivateur  $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$  et la technique de l'expansion de série entière (PSE) pour l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaires<sup>m</sup>  $= \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^m$ , mène à l'expression suivante [117]:

$$s^m \cong T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} z^{-k} \quad (\text{I.59})$$

Cette équation est l'expression du dérivateur d'ordre fractionnaire de Grunwald-Leitnikov d'ordre m [121]. Alors, la drivée d'ordre fractionnaire m d'une fonction causale f(t) est obtenue à partir de l'expression (I.16) comme suit :

$$\frac{d^m f(t=nT)}{dt} = T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} f((n-k)T) \quad (\text{I.60})$$

où T est la période d'échantillonnage. L'exécution de la PSE pour l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-m} = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^{-m}$  mène aussi à la formule donnée par Lubich [110] comme suit :

$$s^{-m} \cong T^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} z^{-k} \quad (\text{I.61})$$

Donc, l'intégration d'ordre fractionnaire m d'une fonction causale f(t) est obtenue aussi à partir de l'expression (I.19) par :

$$I^m f(t = nT) = T^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} f((n-k)T) \quad (\text{I.62})$$

Où  $I^m$  est l'opération d'intégration d'ordre fractionnaire m.

Une autre possibilité pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire analogiques avec la technique de l'expansion de série entière (PSE) est l'utilisation de la règle de Tustin(bilinéaire)

$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  comme une fonction génératrice.

#### I.4.2.1.2 Approximation discrète en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue :

La technique de l'expansion en fraction continue (CFE) qui approxime une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle a été aussi utilisée pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire. Dans la référence [146], cette technique d'approximation a été appliqué pour le dérivateur et l'intégrateur d'ordre fractionnaires<sup>m</sup> et  $s^{-m}$  respectivement, lorsque la fonction génératrice de Tustin donnée par la règle de discrétisation de l'opérateur

dérivateurs  $= \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  est utilisé. Alors, l'expression suivante a été obtenue :

$$s^{\pm m} = \left( \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^{\pm m} \cong T^{\mp m} CFE \left[ \left( 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^{\pm m} \right] = T^{\mp m} \frac{P_p(z^{-1})}{Q_q(z^{-1})} \quad (I.63)$$

où T est la période d'échantillonnage, p et q sont les ordres de l'approximation des polynômes P et Q.

#### I.4.2.2 Méthode indirecte de discrétisation

La deuxième méthode, appelée la méthode indirecte, se déroule en deux étapes. Dans la première on calcule le modèle rationnel continu qui approxime l'opérateur d'ordre fractionnaire comme suit :

$$s^{\pm m} \cong G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (I.64)$$

Puis dans une seconde étape, en utilisant les méthodes de discrétisation usuelles pour obtenir le modèle rationnel discret qui approxime le modèle fractionnaire analogique comme suit :

$$s^{\pm m} \cong G(s)|_{s=F(z)} \quad (I.65)$$

où F(z) est la fonction génératrice de discrétisation donnée par :

- Euler [84]:  $s = F(z) = \frac{1-z^{-1}}{T}$  (I.66)

- Tustin [84]:  $s = F(z) = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  (I.67)

- Al-Alaoui [3]:  $s = F(z) = \frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1/7}}$  (I.68)

Où T est la période d'échantillonnage.

Dans ce qui suit, on présente le modèle rationnel discret obtenu en utilisant les trois méthodes classiques de discrétisation appliquées au model rationnel analogique obtenu par la méthode de Charef [41].

#### I.4.2.2.1 Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui

Dans notre cas, l'implémentation numérique de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire est la discrétisation de la fonction rationnelle GI(s) de l'équation (I.13) approximant l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-m}$  (avec  $0 < m < 1$ ) par les trois méthodes d'Euler, Tustin et Al-Alaoui. Par conséquent, les filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) obtenus sont donnés par les fonctions de transfert suivantes :

$$\text{- Euler [29, 61] : } s^{-m} \approx \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{\frac{1-z^{-1}}{T}}{p_i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i z}{(\delta_i z - \chi_i)} \quad (\text{I.69})$$

$$\text{- Tustin [29, 61]: } s^{-m} \approx \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}}{p_i}\right)} = (z+1) \sum_{i=0}^N \frac{h_i z}{(\alpha_i z - \lambda_i)} \quad (\text{I.70})$$

$$\text{- Al-Alaoui [29, 61]: } s^{-m} \approx \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{\frac{8(1-z^{-1})}{7T(1+z^{-1}/7)}}{p_i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i (z + \frac{1}{7})}{(l_i z - \sigma_i)} \quad (\text{I.71})$$

Avec :

$$\alpha_i = 1 + \frac{2}{Tp_i}, \lambda_i = \frac{2}{Tp_i} - 1, \quad \delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i}$$

$$\chi_i = \frac{1}{Tp_i}, \quad l_i = 1 + \frac{8}{7Tp_i}, \quad \sigma_i = \frac{8}{7Tp_i} - \frac{1}{7}$$

#### I.4.2.2.2 Discrétisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui

De la même manière, l'implémentation numérique de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est la discrétisation de la fonction rationnelle de l'équation (I.12) approximant le dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^m$  (avec  $0 < m < 1$ ) par les trois méthodes d'Euler, Tustin et Al-Alaoui. Donc, les filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) obtenus sont donnés par les fonctions de transfert suivantes :

$$- \text{ Euler [29, 61] : } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{1-z^{-1}}{T}}{\left(1 + \frac{1-z^{-1}}{p_i}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i(z-1)}{T(\delta_i z - \chi_i)} \quad (\text{I.72})$$

$$- \text{ Tustin [29, 61]: } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{21-z^{-1}}{T}}{\left(1 + \frac{21-z^{-1}}{p_i}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i(z-1)}{(\alpha_i z - \lambda_i)} \quad (\text{I.73})$$

$$- \text{ Al-Alaoui [29, 61]: } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+Z^{-1}/7}}{\left(1 + \frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+Z^{-1}/7}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{8}{7T} \frac{g_i(z-1)}{(l_i z - \sigma_i)} \quad (\text{I.74})$$

$$\text{Avec : } \alpha_i = 1 + \frac{2}{Tp_i}, \lambda_i = \frac{2}{Tp_i} - 1, \delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i}, \chi_i = \frac{1}{Tp_i}, l_i = 1 + \frac{8}{7Tp_i}, \sigma_i = \frac{8}{7Tp_i} - \frac{1}{7}$$

#### I.4.2.2.3 Algorithme Numérique de l'approximation Sub-Optimale

L'objectif de cette méthode est de trouver le modèle d'approximation d'ordre entier minimal avec un retard de la forme suivante [25, 51]:

$$G_{r/m,\tau}(s) = \frac{\beta_1 s^r + \dots + \beta_r s + \beta_{r+1}}{s^m + \alpha_1 s^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} s + \alpha_m} e^{-\tau s} \quad (\text{I.75})$$

La fonction objective qui permet de minimiser la norme H2 de réduction de l'erreur e(t) est définie :

$$J_{\theta}^{=min} \|\hat{G}(s) - G_{r/m,\tau}(s)\|_2 \quad (\text{I.76})$$

Avec  $\theta$  est le vecteur de paramètres d'optimisation tel que:

$$\theta = [\beta_1, \dots, \beta_r, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \tau] \quad (\text{I.77})$$

Pour l'évaluation simple de critère J, le terme de retard dans le modèle de réduction  $G_{r/m,\tau}(s)$  est approximé par la fonction rationnelle  $G_{r/m}(s)$  en utilisant la technique d'approximation de Padé [51, 100].

Le nouveau critère d'optimisation J est définie par

$$J_{\theta}^{=min} \|\hat{G}(s) - \hat{G}_{r/m}(s)\|_2 \quad (\text{I.78})$$

Et la norme  $H_2$  est évaluée d'une manière récursive en utilisant l'algorithme cité dans [100].

On suppose une fonction de transfert stable de type:

$$E(s) = \hat{G}(s) - \hat{G}_{r/m}(s) = B(s)/A(s) \quad (I.79)$$

Les polynômes  $A_k(s)$  et  $B_k(s)$  sont définies comme suit:

$$A_k(s) = a_0^k + a_1^k s + \dots + a_k^k s^k, \quad B_k(s) = b_0^k + b_1^k s + \dots + b_{k-1}^k s^{k-1} \quad (I.80)$$

$a_i^{k-1}$  et  $b_i^{k-1}$  sont évalués d'une manière récursive de la forme

$$a_i^{k-1} = \begin{cases} a_{i+1}^k & i \text{ pair} \\ a_{i+1}^k - \alpha_k a_{i+2}^k, & i \text{ Impair} \end{cases} \quad i = 0, \dots, k-1$$

Et

$$b_i^{k-1} = \begin{cases} b_{i+1}^k & i \text{ Pair} \\ b_{i+1}^k - \beta_k a_{i+2}^k, & i \text{ Impair} \end{cases} \quad i = 0, \dots, k-1$$

Avec  $\alpha_k = a_0^k/a_1^k$  et  $\beta_k = b_1^k/a_1^k$ .

La norme  $H_2$  d'approximation réduite de signal d'erreur  $\hat{e}(t)$  est évaluée sous la forme

$$J = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^2}{2\alpha_k} = \sum_{k=1}^n \frac{(b_1^k)^2}{2 a_0^k a_1^k} \quad (I.81)$$

La norme sub-optimal  $H_2$  qui permet de réduire l'ordre de modèle d'un système fractionnaire de l'ordre élevé est résumée par l'algorithme suivant [25, 51, 100]:

1. Choisir le modèle de réduction initial  $\hat{G}_{r/m}^0(s)$
2. Evaluer l'erreur  $\|\hat{G}(s) - \hat{G}_{r/m}^0(s)\|_2$
3. Utiliser l'algorithme d'optimisation (algorithme de Powell's) pour estimer le meilleur modèle  $\hat{G}_{r/m}^1(s)$ .
4. Remplacer (Set)  $\hat{G}_{r/m}^0(s)$  par  $\hat{G}_{r/m}^1(s)$ , Aller à l'étape 2 si le modèle de réduction optimal  $\hat{G}_{r/m}^*(s)$  n'est pas obtenu.
5. Sinon, Extraire le retard de  $\hat{G}_{r/m}^*(s)$ .

## **I.5 Conclusion**

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul fractionnaire. Nous avons présenté quelques définitions mathématiques des opérateurs fractionnaires avec leurs propriétés et leur transformées de Laplace. Nous avons présenté aussi deux classes de méthodes d'approximation de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire à savoir les méthodes fréquentielles et les méthodes numériques.

## Chapitre II

# Commande adaptative à modèle de référence d'ordre Fractionnaire

### II.1 Introduction

La commande adaptative représente une stratégie de commande qui consiste à modifier en ligne les paramètres du correcteur, afin d'améliorer le comportement en boucle fermée face aux perturbations extérieures, incertitudes et non-linéarités.

Les lois de commande adaptatives sont souvent classées en deux grandes catégories : commande adaptative directe et indirecte [82]. Dans les schémas adaptatifs directs, les gains du correcteur sont ajustés directement à partir des sorties mesurées. Un cas qui est souvent rencontré est l'adaptation en fonction d'une erreur de suivi, définie par rapport à un modèle de référence qui décrit le comportement désiré du système en boucle fermée. Les schémas adaptatifs indirects comprennent un estimateur de paramètres incertains ensuite le gain de la loi de commande est modifié en fonction de paramètres estimés. Introduite par plusieurs travaux tels que ceux de Kalman [70] et Åström et Wittenmark [9]. Le besoin d'augmenter la robustesse des algorithmes adaptatifs a ainsi motivé de nombreux travaux : nous pouvons en particulier citer Ioannou et Kokotovic [67], ou encore Kreisselmeier et Narendra [76]; Peterson et Narendra [116]. Ces études introduisent différentes modifications des algorithmes d'adaptation, dont une des plus importantes consiste à limiter les gains adaptatifs. Notons également que parmi les ouvrages de référence dans le domaine de la commande adaptative indirecte on peut citer Åström et Wittenmark[12], mais aussi des travaux plus récents comme ceux de Makoudi et Radouane [94].

Concernée également par le problème de la robustesse vis-à-vis des dynamiques non-modélisées (voir Tsakalis et Ioannou [143] ou encore Barkana[19]; Iwai et Mizumoto [68] où l'exemple de Rhors est discuté), la commande adaptative directe présente l'avantage d'une mise en œuvre plus simple. Cette facilité d'implantation est liée à un besoin moins important

de puissance de calcul, car les gains sont adaptés directement en fonction des mesures, sans nécessiter l'implantation d'un estimateur.

## II.2 La commande adaptative

La commande adaptative joue un rôle très important dans les applications industrielles, qui est comme son nom l'indique, elle consiste à adapter le régulateur en ligne aux variations du processus régulé pour assurer une qualité constante des performances, quand les paramètres du procédé à commander sont inconnus ou variant dans le temps [80, 100, 142].

En principe, un système de commande adaptative mesure un certain indice de performance (IP) du système à commander à partir de l'écart entre la sortie de système désirée et la sortie mesurée. Le mécanisme d'adaptation commande certains paramètres du système ajustable ou introduit un signal supplémentaire de commande d'après une certaine stratégie afin de minimiser l'IP. La figure. II.1 représente le principe général d'un système de commande adaptative [2, 12,149].

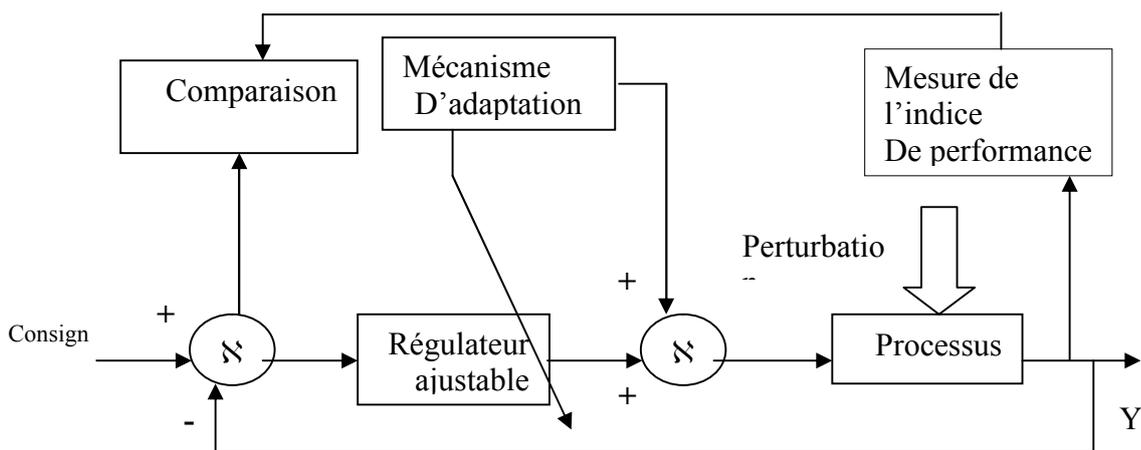


Figure. II.1.Principe d'un système de commande adaptative

Trois approches ont été essentiellement considérées pour le développement des stratégies de la commande adaptative destinées aux procédés à paramètres inconnus et/ou variables dans le temps :

- Approximation des stratégies de commande optimale stochastique «Duale ».
- Système de commande auto - ajustable (self-tuning control) [72].
- Commande adaptative à modèle de référence (MRAC) [21, 45].

Les stratégies résultantes conduisent à deux grandes techniques adaptatives à mettre en œuvre et largement utilisées à ce jour en pratique [12]. Ces deux grandes techniques sont :

- Commande adaptative directe.
- Commande adaptative indirecte.

### II.2.1 Commande adaptative directe

L'idée consiste à calculer les paramètres du régulateur, mais sans identifier explicitement les paramètres du système, donc en une seule étape, justifiant ainsi la terminologie de commande directe. Cette technique utilise souvent des algorithmes plus rapides et favorise une application en temps réel. Sa facilité d'implantation la rend relativement attractive, citons ainsi de façon non exhaustive des applications réalisées sur de grandes structures flexibles [82], des robots manipulateurs [5, 46, 79], des commandes de conduite de bateaux [146], des moteurs à courant continu [141], en aéronautique [138], sur des missiles [100] et des servomécanismes non linéaires avec des incertitudes variant dans le temps [74, 141].

La grande technique adaptative directe à mettre en œuvre et largement utilisée à ce jour en pratique [20, 96], est la commande adaptative directe à modèle de référence (CAMR). Le schéma de la figure II.2 illustre ce type de commande, pour laquelle les performances de la boucle fermée sont spécifiées par l'intermédiaire d'un modèle de référence choisi par l'utilisateur de façon cohérente avec les possibilités intrinsèques du système.

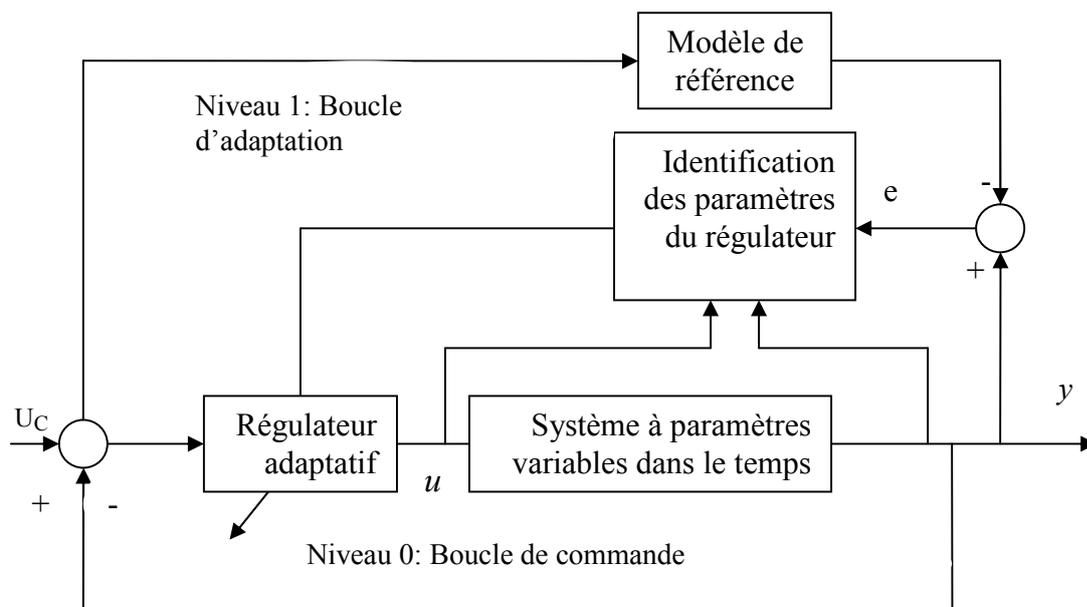


Figure. II.2. Structure de la commande adaptative directe

## II.2.2 Commande adaptative indirecte

La commande indirecte MIAC, encore appelée la commande auto-ajustable, a été introduite en 1958 par Kalman, cette stratégie se base sur les principes de séparation et d'équivalence.

Un régulateur adaptatif est conçu selon ce principe de séparation [150]. Le schéma synoptique de la commande indirecte MIAC est représenté par la figure II.3.

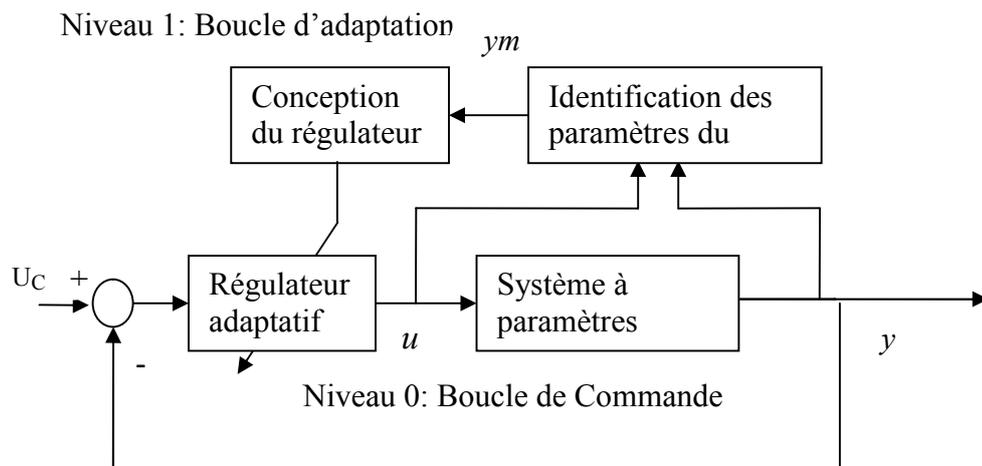


Figure. II.3. Structure de la commande adaptative indirecte

Le principe de cette méthode consiste à estimer les paramètres du modèle dynamique utilisé lors de la synthèse de la loi de commande. L'estimation du modèle du système est effectuée séparément de la conception du régulateur ; c'est-à-dire seul le critère sur la commande intervient pour la synthèse de ce dernier sans considération de performances de l'estimation. Autrement dit toute erreur d'identification nécessairement présente n'est pas prise en compte pour la phase de synthèse de la loi de commande (séparation totale des deux étapes), justifiant ainsi la terminologie de commande adaptative indirecte.

## II.2.3 Fonctions des systèmes de commande adaptative

Les principales fonctions des systèmes de commande adaptative [45, 82]:

- La détection des variations anormales des caractéristiques du système à commander.
- Le maintien des performances du système de commande quand les caractéristiques du système à commander changent.
- La détermination automatique des paramètres optimaux des régulateurs dans divers

points de fonctionnement.

- L'ajustement automatique des paramètres au cours du fonctionnement.
- La possibilité de mise au point des régulateurs complexes est plus performants que le PID (comme conséquence de l'ajustement automatique).
- La commande de nouveaux procédés technologiques dont les modèles sont connus Avec beaucoup d'imprécisions.

### **II.3 Commande Adaptative à Modèle de Référence (MRAC):**

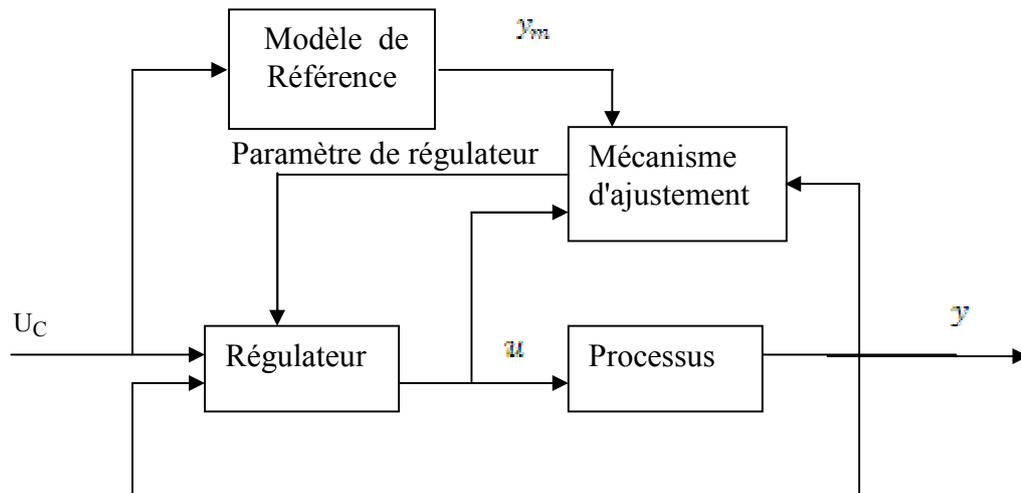
La commande MRAC, qui sera connue plus tard sous la règle de conception du MIT, a été proposée pour la première fois en 1961. Elle spécifie la forme désirée de la réponse du processus à un signal de commande par l'intermédiaire d'un modèle de référence, image donc des performances souhaitées en boucle fermée. Cette stratégie se base sur la minimisation d'un indice de performances. Un mécanisme d'adaptation élaboré à partir de la sortie du système et celle du modèle et un jeu de paramètres est conçu de telle sorte que la différence entre ces deux sorties tend vers zéro [27, 137].

Pour les systèmes à dynamique mal connu, l'adaptation devienne une forte nécessité, le schéma du Système Adaptatif à Modèle de Référence (SAMR) a été originalement proposé par Whitaker en 1958, alors que les premières applications de cette technique remontent au début des années 70.

#### **II.3.1 Les types des systèmes adaptatifs à modèle de référence**

Il existe plusieurs types des systèmes adaptatifs à modèle de référence [1, 24], on peut les classer suivant la structure comme suit: SAMR parallèle, SAMR série, SAMR série parallèle.

La structure parallèle (figure. II.4) est la structure la plus connue, nommée la méthode de l'erreur de sortie dans le cas de l'identification [12].



**Figure. II.4 :** Structure parallèle d'une commande adaptative à modèle de référence

La Commande adaptative directe est une approche moins intuitive, l'idée consiste à recalculer les paramètres du régulateur, mais sans identifier explicitement les paramètres du système.

### II.3.2 Description d'un SAMR

On présentera une description de SAMR [137], qui va être utilisé tout le long de ce chapitre. Avant de synthétiser les lois d'adaptation, certaines hypothèses de base doivent être posées:

- Le modèle de référence doit être un système linéaire invariant dans le temps.
- Le modèle de référence et le système ajustable ont les mêmes dimensions.
- Tous les paramètres du système ajustable sont accessibles pour l'adaptation (Dans le cas d'adaptation paramétrique).
- Durant le processus d'adaptation, les paramètres du système ajustable dépendent seulement du mécanisme d'adaptation.
- Aucun signal, autre que le vecteur d'entrée n'agit sur le système.
- La différence initiale entre les paramètres du modèle et ceux du système est connue
- Le vecteur d'erreur de sortie est mesurable.

### II.3.3. Suivi du modèle

Le problème du suivi du modèle peut être résolu en utilisant la conception de placement des pôles. L'idée fondamentale est très simple, elle consiste à une spécification indirecte de la performance en donnant un modèle mathématique de la réponse désirée. Le modèle spécifié peut être linéaire ou non linéaire. Les paramètres du système sont ajustés de telle sorte que  $y$  converge vers  $y_m$  pour une classe donnée de signaux d'entrée.

Considérons  $u(t)$  le signal d'entrée et  $y(t)$  le signal- sortie, alors l'équation du système est définie par:

$$y(t) = \frac{B}{A} u(t) \quad (\text{II.1})$$

Tel que  $A$  et  $B$  sont des Polynômes de l'opérateur différentiel  $p$ .

On suppose que le degré  $A \geq$  degré  $B$  (c.-à-d., que le système est propre ou causal) et le polynôme  $A$  est monique (c.-à-d., le premier coefficient est unité).

Nous supposons que nous cherchons à trouver un régulateur tel que la relation entre le consigne  $u_c$  et le signal de sortie désirée  $y_m$  est donnée par [2] :

$$y_m(t) = \frac{B_m}{A_m} u_c(t) \quad (\text{II.2})$$

Où les  $A_m$  et  $B_m$  sont des polynômes de l'opérateur différentiel  $P$ .

Une loi linéaire générale de commande peut être décrite comme suit:

$$Ru(t) = Tu_c(t) - Sy(t) \quad (\text{II.3})$$

avec  $R$ ,  $S$  et  $T$  sont des polynômes. Cette loi de commande représente une contre -réaction négative avec l'opérateur de transfert  $[S/R]$  et une réaction directe avec l'opérateur de transfert  $[T/R]$

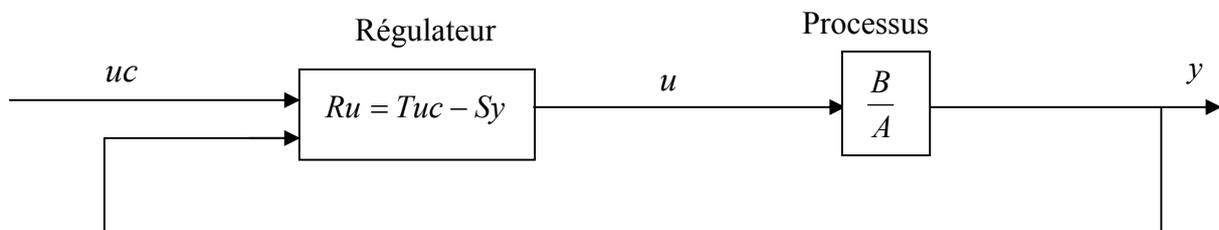


Figure. II.5 : Système en boucle fermée avec un régulateur linéaire

Le transfert de  $u$  entre l'équation (II.1) et (II.3), on obtient l'équation suivante pour le système en boucle fermée:

$$(AR + BS)y = BTu_c \quad (II.4)$$

Pour obtenir la réponse désirée en boucle fermée,  $A_m$  divise le polynôme  $AR + BS$ .

Les zéros de processus, indiqués par  $B = 0$ , seront aussi des zéros en boucle fermée.

Des zéros instables ou non amortie, ne peuvent pas être simplifiés; le polynôme  $B$  est factorisé comme suit :

$$B = B^+ B^- \quad (II.5)$$

Dans cette équation,  $B^+$  contient les facteurs qui peuvent être simplifiés, et  $B^-$ . Contient les facteurs restants de  $B$ . Les zéros de  $B^+$  doivent être stables et bien amortie. Pour que la factorisation soit unique, on suppose que  $B^+$  est monique.

Il suit à partir de l'équation II.4 que le polynôme caractéristique de système en boucle fermée est  $AR + BS$ . Ce polynôme doit avoir  $A_m \cdot B^+$ , comme facteur et sera généralement d'un ordre plus supérieur que  $A_m \cdot B^+$ , Le facteur restant peut être interprété comme un observateur dynamique. Il y a ainsi trois types de facteurs du polynôme caractéristique : zéros du processus simplifiés donnés par  $B^+$ , les pôles des modèles désirés sont donnés par  $A_m$ , et les pôles d'observateur qui sont donnés par l'observateur  $A_0$ . Alors :

$$AR + BS = B^+ A_0 A_m \quad (II.6)$$

Cette équation est appelée l'équation de diophantine (ou identité Bezout).

Il suit à partir de cette équation que  $B^+$  divise  $R$ , alors :

$$R = B^+ R_1 \quad (II.7)$$

La division de l'équation (II.6) par  $B^+$  donne :

$$AR_1 + B^- S = A_0 A_m \quad (II.8)$$

La relation donnée par l'équation II.4 entre le signal de commande  $u_c$  et la sortie du processus  $y$  devrait être égale à la réponse en boucle fermée désirée donnée par l'équation (II.2). Les spécifications doivent être telles que  $B^-$  divise  $B_m$ , Par conséquent:

$$\begin{aligned} B_m &= B^- B'_m \\ T &= A_0 B'_m \end{aligned} \quad (II.9)$$

Pour accomplir la solution du problème nous devons donner une condition pour garantir l'existence des solutions de l'équation (II.8) qui donnent un modèle en temps contenu appropriée aux lois de commande [1], [59]:

$$\text{Deg}A_0 \geq 2\text{deg}A \quad \text{deg}A_m \quad \text{deg}B^+ + 1 \quad (\text{II.10})$$

$$\text{Deg}A_m \quad \text{deg}B_m \geq \text{deg}A \quad \text{deg}B \quad (\text{II.11})$$

### II.3.4 Loi de M.I.T

La loi de M.I.T. est l'approche originale pour la commande adaptative à modèle de référence (CAMR). Le nom est dérivé du fait qu'elle a été développée au laboratoire d'instrumentation (Maintenant Laboratoire de Draper) à l'université de M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology) [82].

Pour représenter la loi M.I.T., on considère un système en boucle fermée dans lequel le régulateur possède un vecteur  $\theta$  de paramètres ajustables. La réponse désirée en boucle fermée est spécifiée par la sortie  $y_m$  du modèle de référence.

Soit  $e$  l'erreur entre la sortie  $y$  de la boucle fermée et celle du modèle de référence  $y_m$ .

L'ajustement des paramètres est fait de manière à minimiser une fonction coût  $J$  définie par :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \quad (\text{II.12})$$

Pour minimiser  $J$ , il faut changer les paramètres dans la direction du gradient négatif de  $J$ , soit :

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \frac{\delta J}{\delta \theta} = \gamma e \frac{\delta e}{\delta \theta} \quad (\text{II.13})$$

L'équation (II.13) est la fameuse loi de M.I.T. La dérivée partielle  $\frac{\delta e}{\delta \theta}$ , appelée la dérivée de la sensibilité du système, exprime l'influence des paramètres ajustables sur l'erreur.

En supposant que la variation des paramètres est plus lente que celle des autres variables du système, la dérivée  $\frac{\delta e}{\delta \theta}$  peut être évaluée en considérant que  $\theta$  est constant.

Il existe plusieurs alternatives à la fonction de coût donnée par l'équation (II.12). Si on choisit :

$$J(\theta) = |e| \quad (\text{II.14})$$

La méthode du gradient donne,

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \frac{\delta e}{\delta \theta} \text{sign}(e) \quad (\text{II.15})$$

Le premier SAMR qui fût implémenté était basé sur cette formule. Cependant il existe beaucoup d'autres possibilités, par exemple

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \text{sign} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \text{sign}(e) \quad (\text{II.16})$$

qui est appelée l'algorithme du sign-sign. Une version discrète de cet algorithme est utilisée en télécommunications, dans laquelle une implémentation simple et des calculs rapides sont requis.

On peut décrire le problème de la commande à modèle de référence comme suit : Soit  $G_m(s)$  la fonction de transfert du modèle de référence spécifiant les performances désirées. Soit  $G_{BF}(s, \theta)$  la fonction de transfert du processus en boucle fermée où  $\theta$  est le vecteur des paramètres ajustables.  $r$  est le signal de référence.

L'objectif de système de commande est d'ajuster les paramètres du régulateur tel que l'erreur  $e(t)$  tende vers zéro et que :

$$e(t) = (G_{BF}(p, \theta) - G_m(p)) r(t)$$

La loi de M.I.T. donnée par

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e \quad (\text{II.17})$$

Tel que  $\varphi = \frac{de}{d\theta}$  et  $\gamma$  : le gain d'adaptation, .

## Remarques :

- Le but des SAMR est de faire converger l'erreur  $e = y - y_m$  vers zéro. Cela n'implique pas nécessairement que les paramètres du régulateur convergent vers leurs valeurs correctes.

-Le choix du gain d'adaptation est crucial et dépend des niveaux des signaux. L'algorithme normalisé :

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \frac{\varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi} \quad (\text{II.18})$$

est moins sensible aux niveaux des signaux.

- Le système obtenu avec la loi de M.I.T fonctionne pour de petits gains d'adaptation, des comportements plus complexes peuvent apparaître pour de grands gains d'adaptation.

### II.3.5 Réalisation du Régulateur du CAMR

La méthode de conception du régulateur peut être résumée comme suit :

1. Trouver une structure du régulateur qui permet une poursuite parfaite de la sortie.
2. Calculer l'erreur de modèle.
3. Utiliser la loi d'ajustement des paramètres (II.17) ou la loi normalisée (II.18).

#### II.3.5.1 Structure du Régulateur

On suppose que le processus est décrit par le modèle continu suivant :

$$Ay(t) = b_0 Bu(t) \quad (\text{II.19})$$

où les polynômes A et B sont supposés qu'ils n'ont pas de facteurs communs, le polynôme B est monique et a tous ses zéros dans le demi-plan gauche. La variable  $b_0$  est dite gain instantané ou gain à hautes fréquences [100].

Le régulateur peut être écrit sous la forme suivante :

$$Ru(t) = Tu_r(t) \quad Sy(t)$$

Puisque le polynôme B est stable, les pôles correspondant peuvent être compensés par le régulateur. Cela correspond à  $R = R_1 B$ .

Le système en boucle fermée est obtenu quand le régulateur est appliqué au processus (II.19) :

$$(AR_1 + b_0S)y = b_0Tu_r \quad (\text{II.20})$$

Si le polynôme T est choisi tel que  $T = t_0A_0$ , où  $A_0$  est un polynôme monique et stable,  $R_1$  et S satisfont :

$$AR_1 + b_0S = A_0A_m \quad (\text{II.21})$$

Il est possible de réaliser une poursuite de modèle tel que :

$$A_m y_m(t) = b_0 t_0 u_r(t) \quad (\text{II.22})$$

### II.3.5.2 L'erreur de modèle :

A partir des équations (II.19) et (II.20) on obtient [21, 82] :

$$A_0 A_m y = AR_1 y + b_0 S y = R_1 b_0 B_u + b_0 S y \quad (\text{II.23})$$

Introduisons l'erreur  $e = y - y_m$  dans les équations (II.22) et (II.23) :

$$A_0 A_m e = A_0 A_m (y - y_m) = b_0 (R_1 u + S y - T u_r)$$

Donc

$$e = \frac{b_0}{A_0 A_m} (R_1 u + S y - T u_r) \quad (\text{II.24})$$

Soient k, l et m les degrés des polynômes R, S et T respectivement. Introduisons le vecteur

des paramètres du régulateur :

$$\theta^0 = (r_1 \dots r_k s_0 \dots s_l t_0 \dots t_m) \quad (\text{II.25})$$

et on définit le vecteur de régression (ou de mesures)  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \varphi^T &= \left[ \frac{\delta e}{\delta r_1} \frac{\delta e}{\delta r_2} \dots \frac{\delta e}{\delta r_k} \frac{\delta e}{\delta s_0} \frac{\delta e}{\delta s_1} \dots \frac{\delta e}{\delta s_l} \frac{\delta e}{\delta t_0} \frac{\delta e}{\delta t_1} \dots \frac{\delta e}{\delta t_m} \right] \\ &= \frac{b_0}{A_0 A_m} [p^{k-1} u \dots u \ p^l y \dots y \ p^m u_r \dots \ u_r] \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

L'erreur est donnée comme suit :

$$e = \varphi^T \theta^0 \quad (\text{II.27})$$

Les polynômes R, S et T :

$$R(p) = r_1 p^{k-1} + r_2 p^{k-2} + \dots + r_k \quad (\text{II.28})$$

$$S(p) = s_0 p^l + s_1 p^{l-1} + s_2 p^{l-2} + \dots + s_l \quad (\text{II.29})$$

$$T(p) = T_0 p^m + t_1 p^{m-1} + t_2 p^{m-2} + \dots + t_m \quad (\text{II.30})$$

Avec les deux conditions suivantes:

$$\deg A_m \quad \deg B_m \geq \deg A \quad \deg B$$

$$\deg A_0 \geq 2 \deg A \quad \deg A_m \quad \deg B^+ \quad 1$$

Ces deux conditions sont toujours vérifiées, même dans le cas où  $A_0 = 1$  (l'observateur est négligé), car on utilise un modèle tel que  $\deg A_m > \deg A$ .

$$k = \deg R = \deg R_1 + \deg B = \deg A_m + \deg B \quad \deg A$$

$$l = \deg S \leq \deg R$$

$$m = \deg T = \deg B_m$$

Généralement on prend  $\deg S = \deg R - 1$  pour que le filtre S/R soit causal.

## II.4 Commande Adaptative à Modèle de Référence d'ordre fractionnaire du robot SCARA:

### II.4.1. Description du robot :

On s'intéresse à un robot de type SCARA à 3 degrés de liberté (rotation, rotation, translation). Le schéma du robot est représenté sur la figure II.7, qui montre les différents degrés de liberté, ainsi que les paramètres géométriques du robot. Un exemple de robot réel de cette classe est représenté sur la figure II.6, il s'agit d'un robot de la société ROSIER-SOCITEC [6, 27],

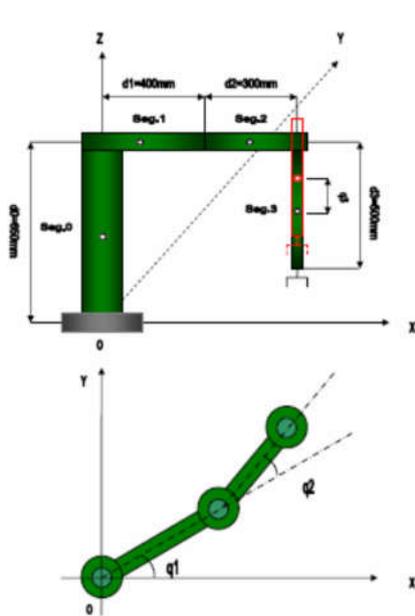


Figure II.6: Schéma du robot SCARA à 3 d.d.l



Figure II.7: Exemple de robot SCARA à 3 d.d.l

**II.4. 2.Modèle dynamique du robot :**

Le modèle dynamique Lagrangien du robot est donné par l'équation différentielle suivante [22, 26]:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \tag{II.31}$$

- $q, \dot{q}, \ddot{q} \in R^3$  sont les vecteurs de position, vitesse et accélération,
- $B(q) \in R^3 \times R^3$  est la matrice d'inertie,
- $C(q, \dot{q}) \in R^3$  est la matrice de Coriolis et centrifuge,
- $G(q) \in R^3$  est le vecteur de gravité,
- $\tau \in R^3$  est le vecteur des couples.

Les différentes matrices de ce modèle dynamique sont détaillées dans l'annexe. Les paramètres du robot sont regroupés dans le tableau II. 1.

Tableau II.1. Paramètres dynamiques du robot SCARA

Segment	Segment 0	Segment 1	Segment 2	Segment 3
Masse [kg]	$m_0 = 19.5$	$m_1 = 8$	$m_2 = 6$	$m_3 = 0.5$
Longueur [m]	$d_0 = 0.65$	$d_1 = 0.4$	$d_2 = 0.3$	$d_3 = 0.3$
Inertie [kg m <sup>2</sup> ]	$I_0 = 1.0298$	$I_1 = 0.16$	$I_2 = 0.0675$	$I_3 = 0.0056$

### II.4. 3. La commande linéarisante :

On considère l'objectif de synthèse d'une commande dynamique pour la poursuite de trajectoire de référence dans l'espace articulaire :

- Sur la position :  $q_d$
- sur la vitesse :  $\dot{q}_d$
- sur l'accélération :  $\ddot{q}_d$

Soit la commande linéarisante suivante :

$$\tau = B(q)y + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

Remplacé dans la dynamique du robot donne le système linéarisé :  $\ddot{q} = y$

On considère maintenant le choix suivant de  $y$  :

$$y = \ddot{q}_d + k_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + k_p(q_d - q)$$

Où  $k_p, k_d \in R^{3 \times 3}$  sont des matrices de gain de position et de vitesse respectivement.

La dynamique résultante en boucle fermée s'écrit donc :

$$\ddot{q} = \ddot{q}_d + k_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + k_p(q_d - q)$$

Si on considère la notation suivante des erreurs de poursuite (sur la position, sur la vitesse et sur l'accélération) :

$$\tilde{q} = (q_d - q); \quad \tilde{\dot{q}} = (\dot{q}_d - \dot{q}); \quad \tilde{\ddot{q}} = (\ddot{q}_d - \ddot{q})$$

La dynamique résultante en boucle fermée s'écrit en fonction de ces erreurs :

$$\tilde{\ddot{q}} + k_d \tilde{\dot{q}} + k_p \tilde{q} = u(t) \tag{II.32}$$

La fonction de transfert obtenu à partir de l'équation (II.32) est :

$$\frac{e(p)}{u(p)} = \frac{1}{p^2 + k_d p + k_p} \tag{II.33}$$

Nous avons :

$$q + k_d q + k_p q = u \tag{II.34}$$

Donc après la transformée de Laplace de l'équation (II.34) on obtient :

$$\frac{y1(p)}{u1(p)} = \frac{1}{p^2 + k_d p + k_p}$$

$$\frac{y2(p)}{u2(p)} = \frac{1}{p^2 + k_d p + k_p}$$

$$\frac{y3(p)}{u3(p)} = \frac{1}{p^2 + k_d p + k_p}$$

Tel que  $k_d=500$  et  $k_p=2500$

#### II.4 .4.Approche FMRAC :

Le schéma global proposé pour commander le robot est donné par la figure suivante [27]:

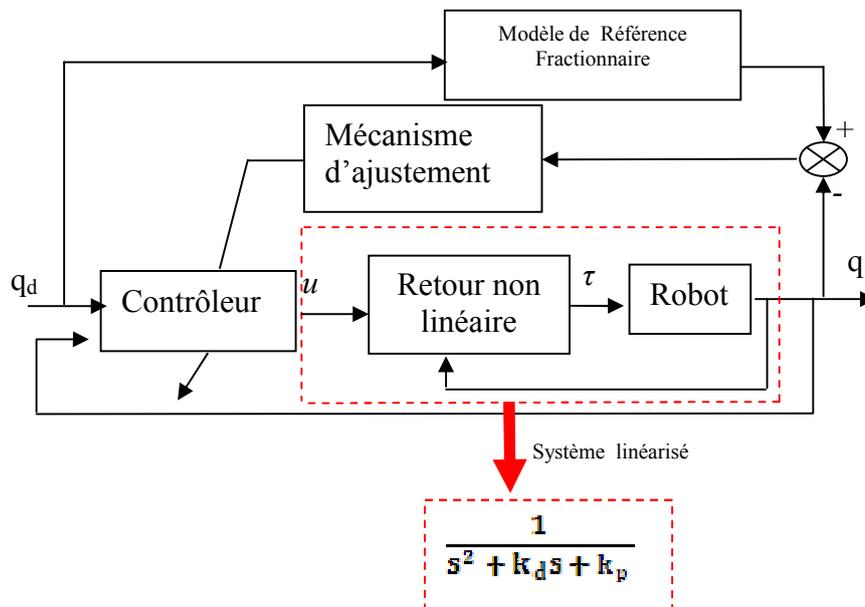


Figure II.8. Le schéma global de commande du robot : approche FMRAC

Il est composé de trois parties:

- Le Contrôleur
- Le système linéarisé exprimé dans l'espace articulaire
- Le modèle de référence fractionnaire

#### A. le modèle linéarisé de robot SCARA :

Le modèle linéarisé du robot avec un retour non linéaire est donné par la fonction de transfert équivalente suivante :

$$G(s) = \frac{1}{p^2 + k_d p + k_p} \quad (\text{II.35})$$

Avec  $s$  : variable complexe de la fonction de transfert

$k_p$ : le gain de position and

$k_d$ : le gain de vitesse

#### B. le modèle de référence fractionnaire :

Le modèle de référence fractionnaire est donné par :

$$G_m = \frac{\omega^2}{s^\alpha (s^2 + 2\omega\xi s + k_p)} \quad (\text{II.36})$$

telque  $\omega = 50$  et  $\xi = 1$  et  $0 < \alpha < 1$ .

### II.4 .5. Simulation: suivi de trajectoire de robot :

La trajectoire de référence est [27] :

$$q_1 = q_2 = q_3 = \frac{10\pi}{180} \sin(2\pi t)$$

Le modèle de référence d'ordre entier est donné par :

$$G_m = \frac{\omega^2}{s(s^2 + 2\omega\xi s + k_p)}$$

Avec  $\xi = 0.7$  et  $\omega=20$

Le modèle de référence d'ordre fractionnaire est donné par :

$$G_m = \frac{\omega^2}{s^\alpha (s^2 + 2\omega\xi s + k_p)}$$

Avec  $\xi = 0.7$  ,  $\omega=20$  et  $\alpha=0.3$

Les paramètres de modèle linéarisé du robot sont:  $k_p=2500$  and  $k_d=500$ .

Les positions articulaires du robot en utilisant l'approche MRAC sont présentées par la figure suivante :

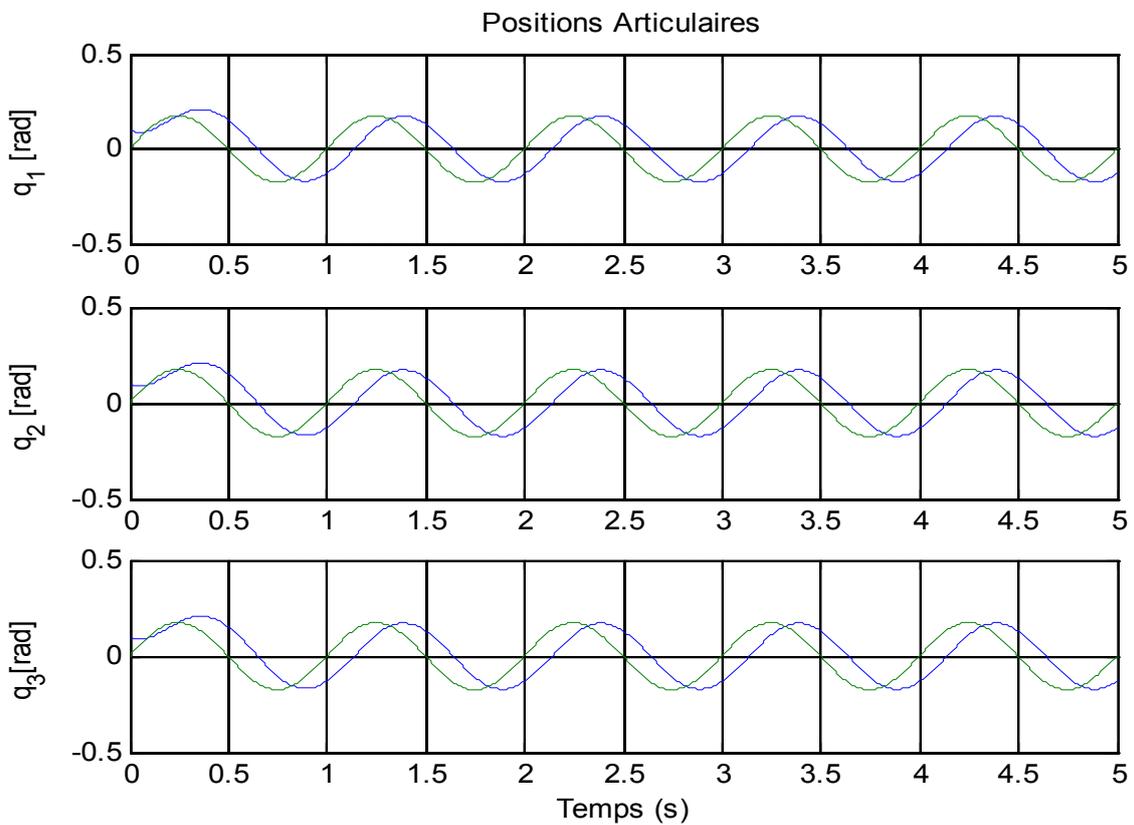


Figure II.9. La position articulaire du robot et la trajectoire de référence en utilisant la commande MRAC d'ordre entier ( $\alpha=1$ )

Les couples générés par les actionneurs pour  $\alpha=1$  sont donnés par la figure II.10.

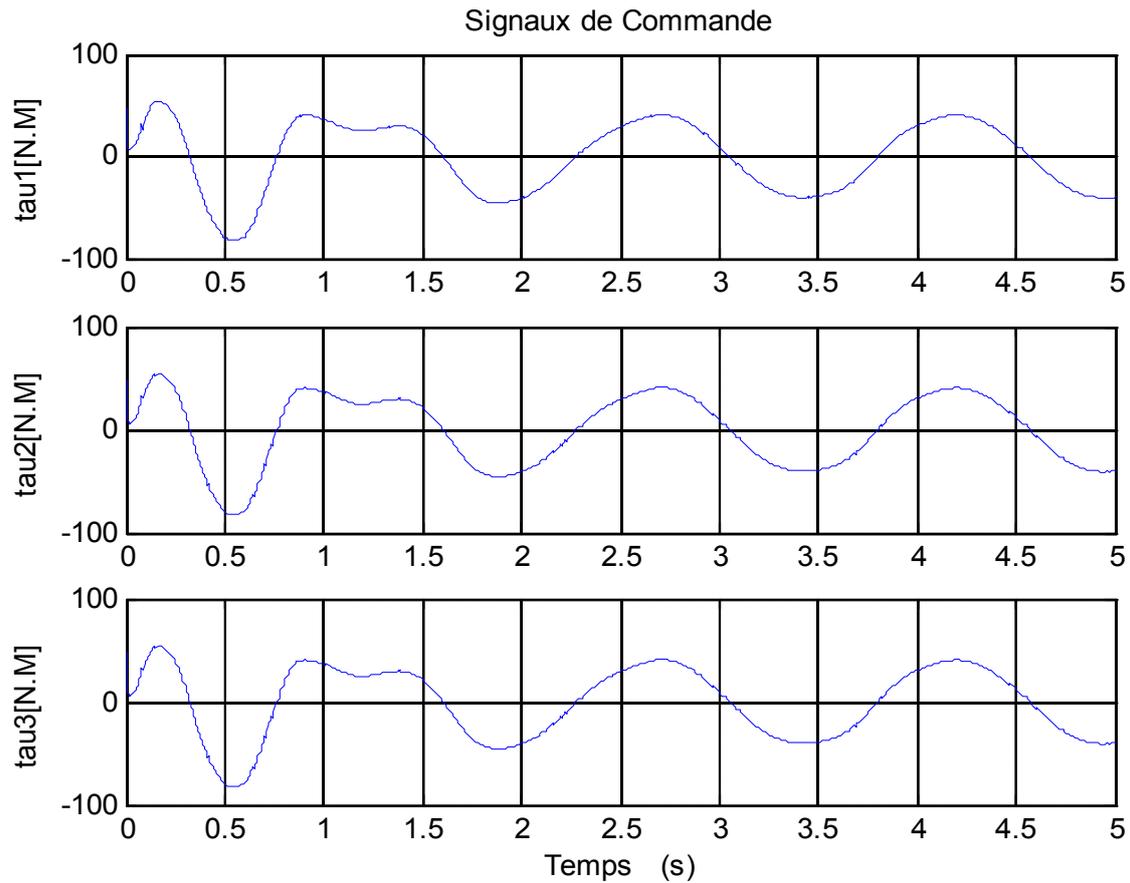


Figure II.10. Les couples de Contrôleur FMRAC ( $\alpha=1$ )

D'après la figure précédente, on remarque que la sortie du robot suit la trajectoire de référence avec un dépassement  $d=0.25$  et un retard time  $t_d=0.2$  s, cette caractéristique présente la grande limitation de l'approche MRAC dans la commande des systèmes.

Dans le but de réduire le retard précédent entre la sortie de systèmes et la trajectoire de référence de robot SCARA en utilise l'approche FMRAC.

Les positions articulaires du robot en utilisant l'approche FMRAC pour  $\alpha=0.3$  sont présentées par la figure II.11.

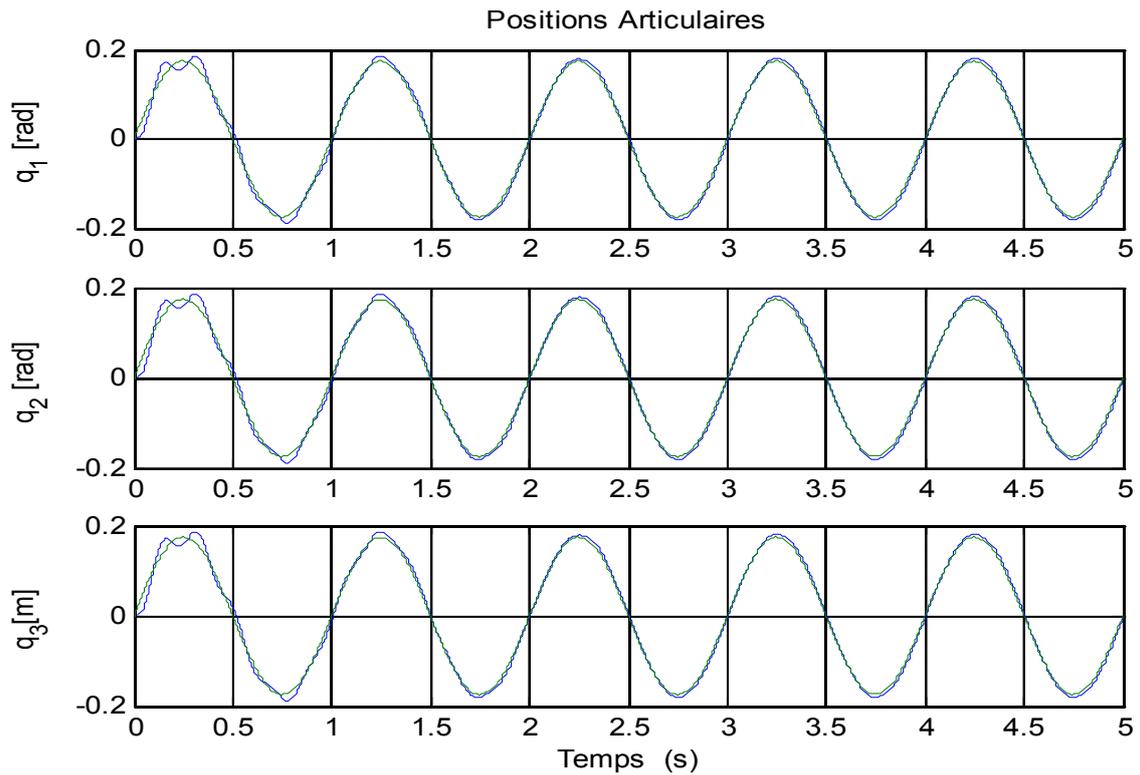


Figure II.11. La position articulaire du robot et la trajectoire de référence en utilisant la commande MRAC d'ordre Fractionnaire ( $\alpha=0.3$ )

Les couples de contrôleur FMRAC pour  $\alpha=0.3$  sont présentés par la figure II.12

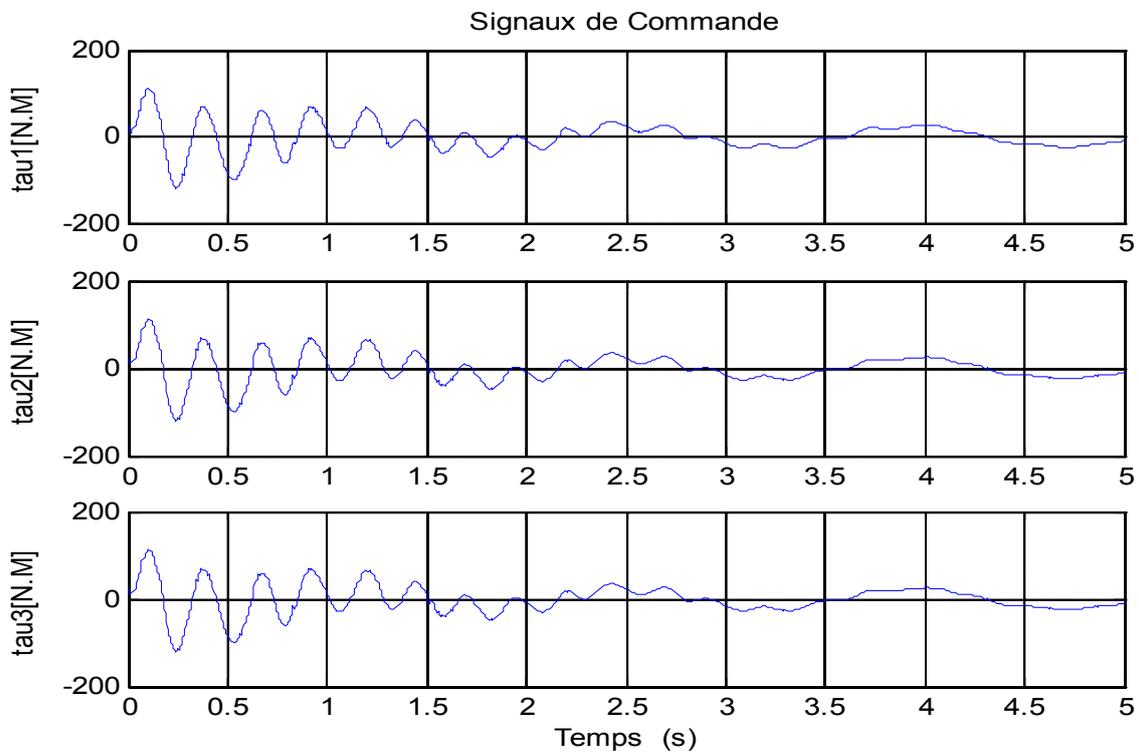


Figure II.12. Les couples de Contrôleur FMRAC ( $\alpha=0.3$ )

Les positions articulaires du robot en utilisant l'approche FMRAC pour  $\alpha=0.5$  sont présentées par la figure II.13.

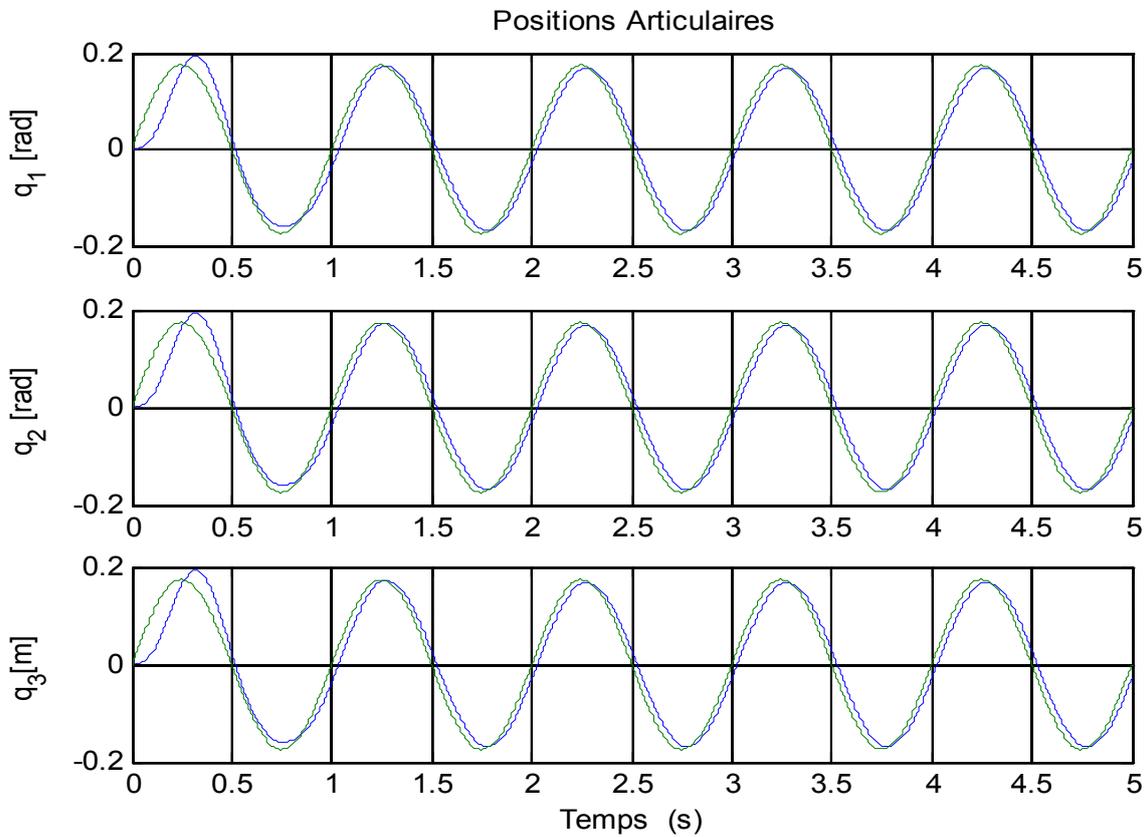


Figure II.13. La position articulaire du robot et la trajectoire de référence en utilisant la commande MRAC d'ordre Fractionnaire ( $\alpha=0.5$ )

Les couples de contrôleur FMRAC pour  $\alpha=0.5$  sont présentés par la figure II.14

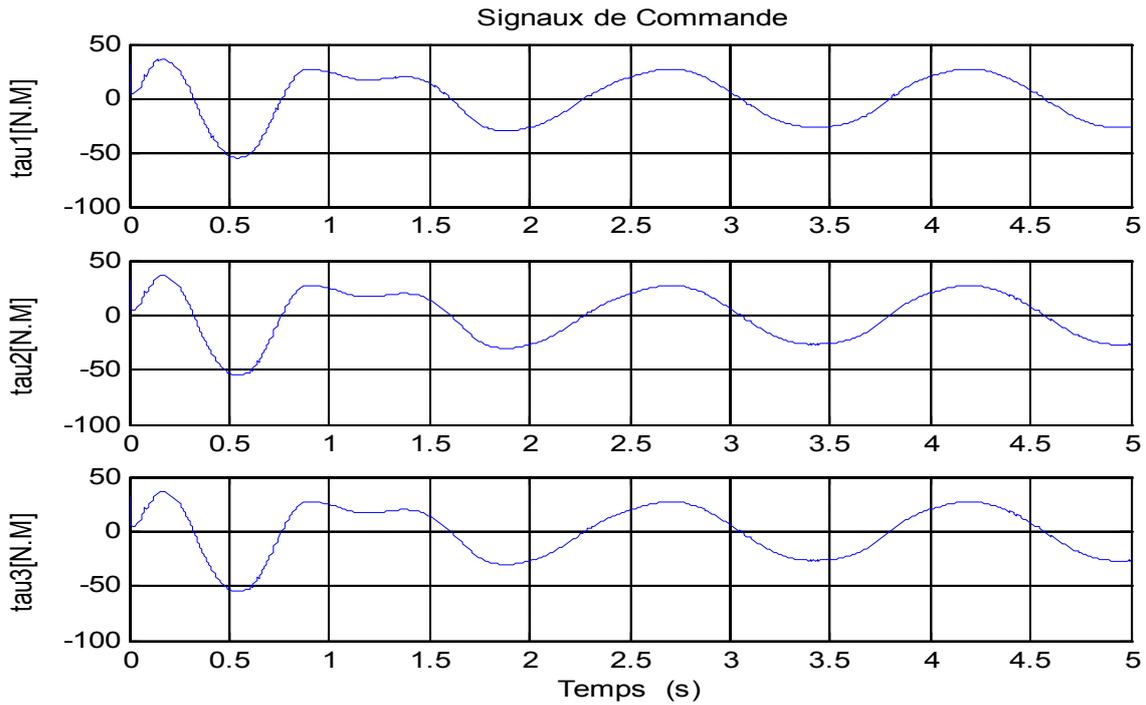


Figure II.14. Les couples de Contrôleur FMRAC ( $\alpha=0.5$ )

Les positions articulaires du robot en utilisant l'approche FMRAC pour  $\alpha=0.7$  sont présentées par la figure II.15.

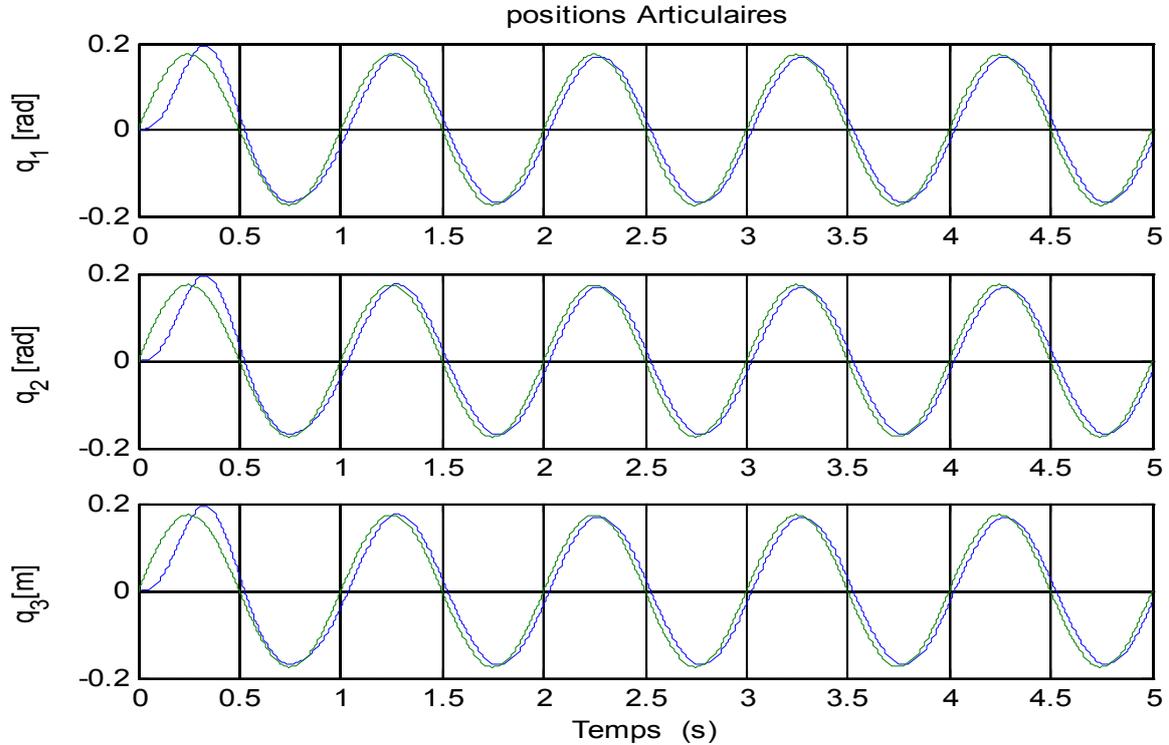


Figure II.15. La position articulaire du robot et la trajectoire de référence en utilisant la commande MRAC d'ordre Fractionnaire ( $\alpha=0.7$ )

Les couples de contrôleur FMRAC pour  $\alpha=0.7$  sont présentés par la figure II.16

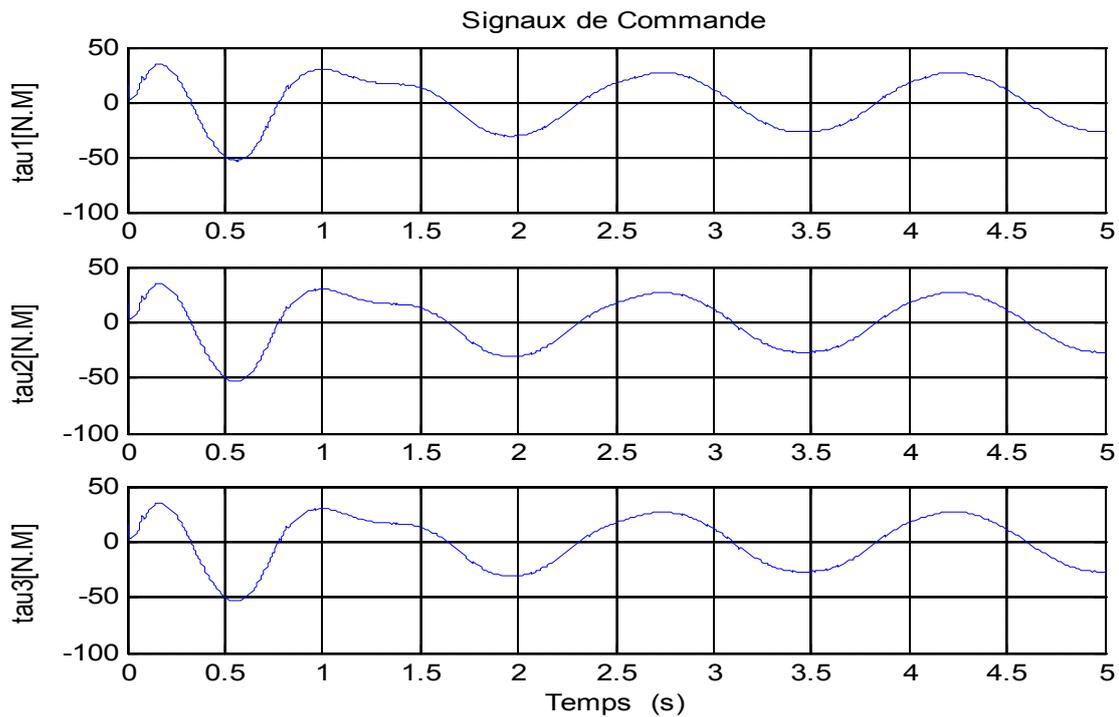


Figure II.16. Les couples de Contrôleur FMRAC ( $\alpha=0.7$ )

### Commentaires

1. La stabilité en boucle fermée est assurée pour toutes les valeurs de  $\alpha$
2. Dans le cas où le modèle de référence est entier (figure II.9), la sortie du robot suit la trajectoire de référence avec un dépassement  $d=0.25$  et un temps de retard  $t_d=0.2$  s (Tableau II. 2), cette caractéristique présente la grande limitation de l'approche MRAC dans la commande des systèmes.

Tableau II.2. Dépassement et retard pour les différentes valeurs de  $\alpha$

$\alpha$	0.3	0.5	0.7	1
Dépassement d	0.005	0.02	0.019	0.025
Retard $t_d$	0.01	0.026	0.027	0.2

3. Dans le cas où le modèle de référence est Fractionnaire (figure II.11, figure II.13, figure II.15), la sortie du robot suit la trajectoire de référence avec un dépassement et retard inférieurs à ceux dans le cas entier (voir Tableau II. 2).

4. A partir des simulations numériques (courbes, on peut remarquer que le niveau de performance est meilleur pour  $\alpha = 0.3$ , en termes de temps de retard entre la sortie de robot et la trajectoire de référence.

## II.5 Commande Adaptative à Modèle de Référence d'ordre fractionnaire Robuste:

### II.5.1 MRAC avec modèle de référence d'ordre entier :

Le système est décrit par l'équation suivante [21] :

$$G(s) = \frac{2s+8}{s^2-3s-2} \quad (\text{II.37})$$

Le modèle de référence est défini par :

$$G_m(s) = \frac{1}{0.2s+1} \quad (\text{II.38})$$

Supposons qu'on veut minimiser l'erreur :

$$e = y - y_m$$

L'équation récurrente du système précédent obtenue après la discrétisation ( $T=0.04$ ) est donnée par :

$$Y(k+2) = 2.131 \cdot y(k+1) - 1.127 \cdot y(k) + 0.09171u(k+1) - 0.07811 \cdot u(k)$$

L'équation récurrente du modèle de référence précédent obtenue après la discrétisation ( $T=0.04$ ) est donnée par :,

$$y_m(k+1) = 0.8187 \cdot y_m(k) + 0.1813 \cdot u_m(k)$$

Soient  $k$ ,  $l$  et  $m$  les degrés des polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  respectivement tel que :

$$k = \deg R = \deg A_m + \deg B - \deg A = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$l = \deg S = \deg R = 0$$

$$m = \deg T = \deg B_m = 0$$

Donc le vecteur de paramètres de régulateur est :

$$\theta = (s_0, t_0)$$

Et introduisons le vecteur de régression (ou de mesures)  $\varphi$  :

$$\varphi^T = \left[ \frac{\delta e}{\delta r_1} \frac{\delta e}{\delta r_2} \dots \frac{\delta e}{\delta r_k} \frac{\delta e}{\delta s_0} \frac{\delta e}{\delta s_1} \dots \frac{\delta e}{\delta s_1} \frac{\delta e}{\delta t_0} \frac{\delta e}{\delta t_1} \dots \frac{\delta e}{\delta t_m} \right]$$

$$= \frac{b_0}{A_0 A_m} [s^{k-1} u \dots u \ s^l y \dots y \ s^m u_r \dots u_r]$$

$$= \frac{b_0}{A_0 A_m} [y \quad u_r] \text{ avec } b_0 = 1 \text{ et } A_0 = s + 1$$

$$\varphi^T = \frac{1}{(s+1)(0.2s+1)} [y \quad u_r]$$

L'équation récurrente du  $\varphi^T$  après la discrétisation ( $T=0.04$ ) est donnée par :

$$\varphi^T(k+2) = 1.78 \varphi^T(k+1) - 0.7866 \varphi^T(k) + [0.003696y(k+1) + 0.003412y(k) - 0.003696 \cdot u_c(k+1) + 0.003412u_c(k)]$$

La loi de commande est donnée par l'équation suivante :

$$u = \theta^T(p_1 \varphi)$$

### II.5.2 MRAC avec modèle de référence fractionnaire :

Le système est décrit par l'équation (II.38) :

$$G(s) = \frac{2s + 8}{s^2 + 3s + 2}$$

Le modèle de référence Fractionnaire est donné par :

$$G_m(s) = \frac{y_m}{u_m} = \frac{1}{0.2s^\alpha + 1} \quad (\text{II.39})$$

Le modèle du référence fractionnaire approximé en utilisant la méthode d'Oustaloup [112]

pour  $\alpha=0.25$  est :

$$G_m(s) = \frac{y_m}{u_m} = \frac{s + 13.34}{2.1246 s^4 + 3.12 s^3 + 6.25 s^2 + 1.12 s + 14.18}$$

Supposons qu'on veut minimiser l'erreur :

$$e = y - y_m$$

L'équation récurrente du système précédent obtenue après la discrétisation ( $T=0.04$ ) est donnée par :

$$Y(k+2)=2.131.y(k+1)-1.127.y(k)+0.09171.u(k+1)-0.07811.u(k)$$

L'équation récurrente du modèle du référence précédent obtenue après la discrétisation ( $T=0.04$ ) est donnée par :

$$y_m(k+1)=0.7656.y_m(k)+0.4707.u_m(k+1)-0.2503u_m(k)$$

Soient  $k$ ,  $l$  et  $m$  les degrés des polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  respectivement tel que :

$$k=\deg R=\deg A_m+\deg B-\deg A=1+1-2=0$$

$$l=\deg S=\deg R=0$$

$$m=\deg T=\deg B_m=1$$

Donc le vecteur de paramètres de régulateur est :

$$\theta = (s_0, t_0, t_1)$$

Et introduisons le vecteur de régression (ou de mesures)  $\varphi$  :

$$\varphi^T = \left[ \frac{\delta e}{\delta r_1} \frac{\delta e}{\delta r_2} \dots \frac{\delta e}{\delta r_k} \frac{\delta e}{\delta s_0} \frac{\delta e}{\delta s_1} \dots \frac{\delta e}{\delta s_l} \frac{\delta e}{\delta t_0} \frac{\delta e}{\delta t_1} \dots \frac{\delta e}{\delta t_m} \right]$$

$$= \frac{b_0}{A_0 A_m} [s^{k-1}u \dots u \ s^l y \dots y \quad s^m u_r \dots \quad u_r]$$

$$= \frac{b_0}{A_0 A_m} [y \quad s u_r \quad u_r] \quad \text{avec } b_0 = 1 \text{ et } A_0 = s + 1$$

$$\text{Donc } \varphi^T = \frac{1}{(s+1)(2.1246 s+14.1834)} [y \quad s u_r \quad u_r]$$

L'équation récurrente du  $\varphi^T$  après la discrétisation ( $T=0.04$ ) est donnée par :

$$\varphi^T(k+2)=1.726 \varphi^T(k+1)-0.7356 \varphi^T(k)+[0.0003405 y(k+1)-0.0003073 y(k) - 0.0003405 u_c(k+1) - 0.0003073 u_c(k)]$$

La loi de commande est donnée par l'équation suivante :

$$u = \theta^T(p_1 \varphi)$$

Les Sorties de la Cammande Adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire pour  $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$ ,  $\alpha=1$  sans perturbations sont données par la figure II.17.

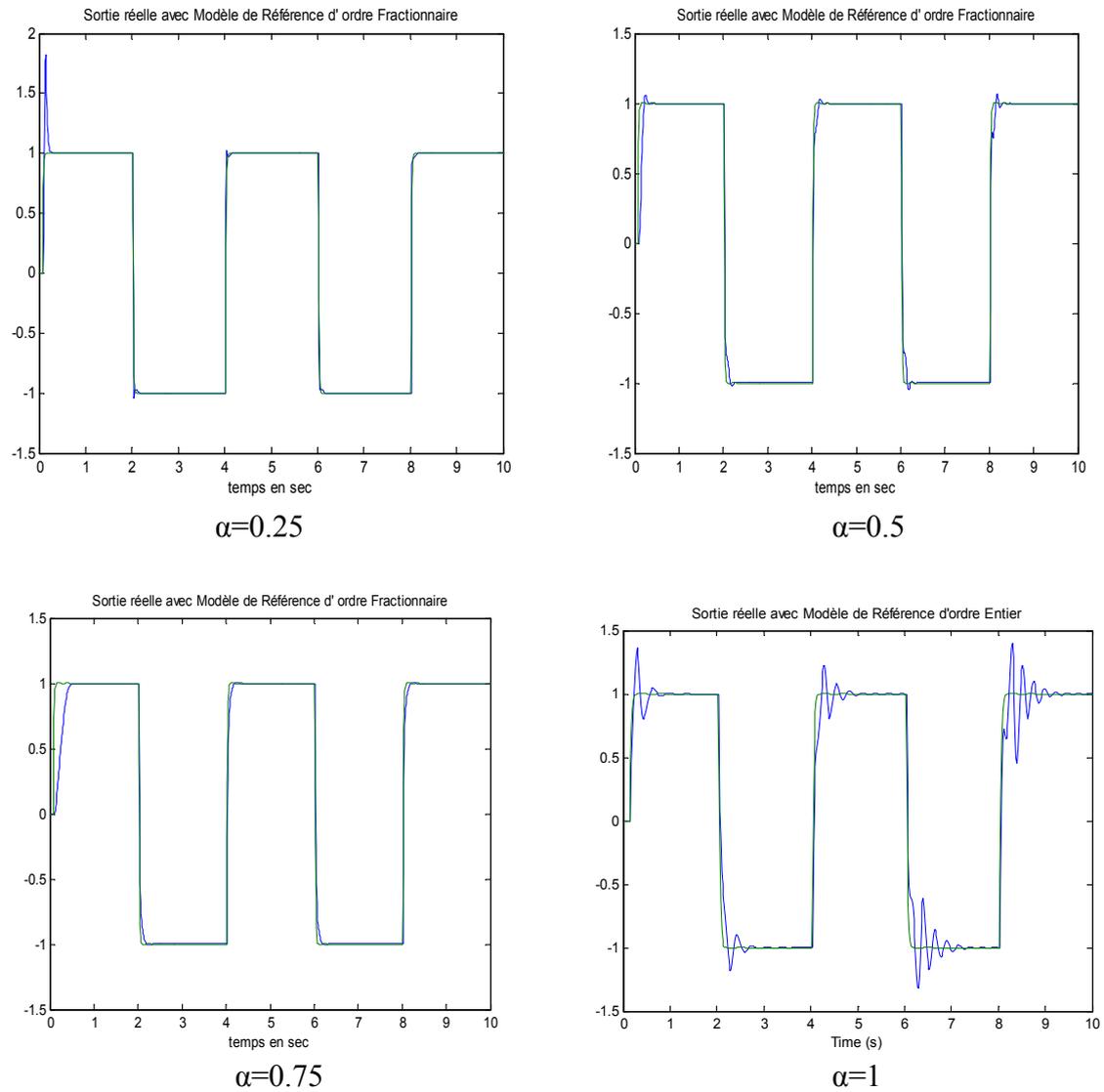


Figure. II.17: Sortie de la Cammande Adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire pour  $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$ ,  $\alpha=1$  sans perturbations

Les Signaux de Commande de l'approche MRAC pour  $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$ ,  $\alpha=1$  sans perturbations sont donnés par la figure II.18.

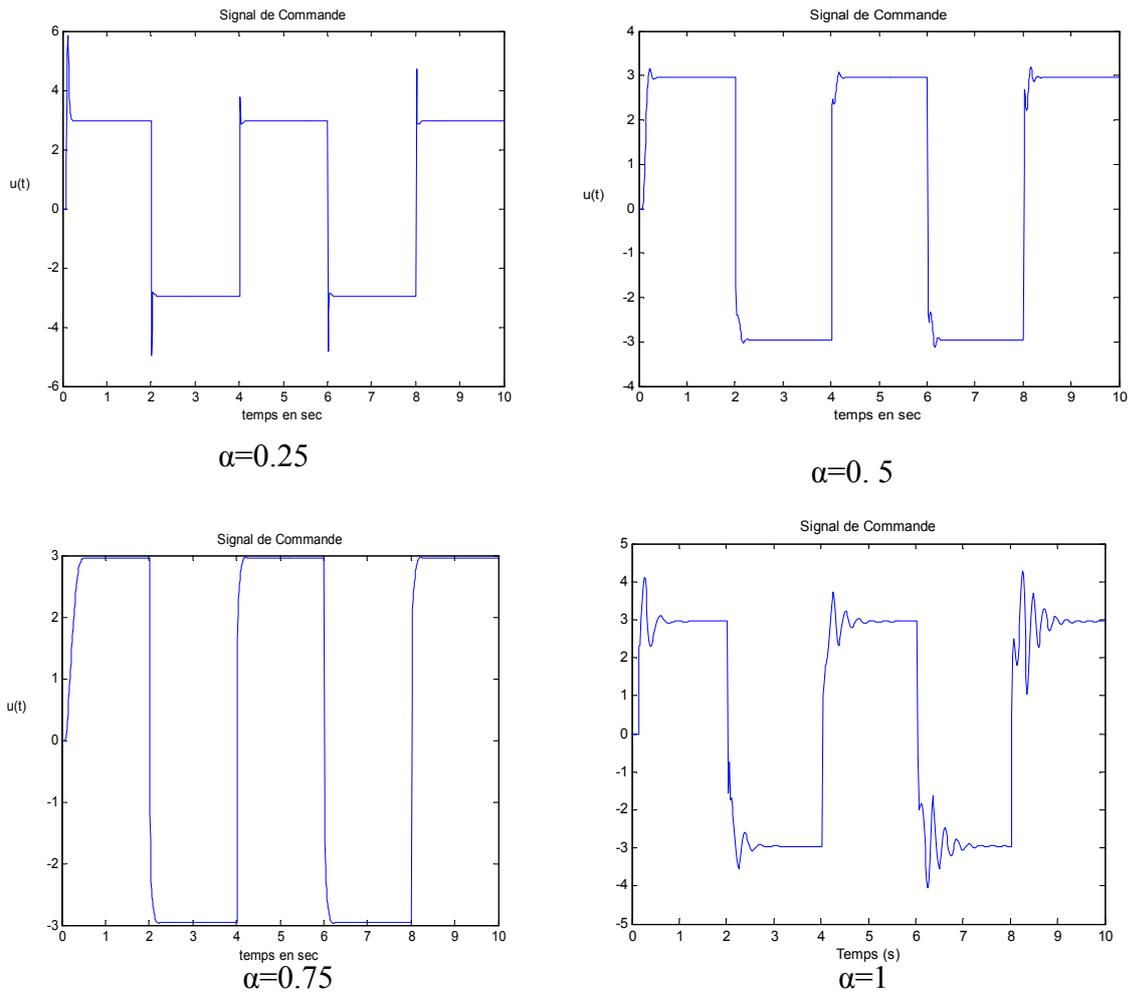


Figure. II.18: Signaux de commande MRAC à modèle de référence d'ordre fractionnaire pour  $\alpha=0.25, \alpha=0.5, \alpha=0.75, \alpha=1$  sans perturbations

Les Sorties de la Cammande Adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire pour  $\alpha=0.25, \alpha=0.5, \alpha=0.75, \alpha=1$  avec bruit aléatoire à la sortie (amplitude 5% du signal de référence) sont données par la figure II.19.

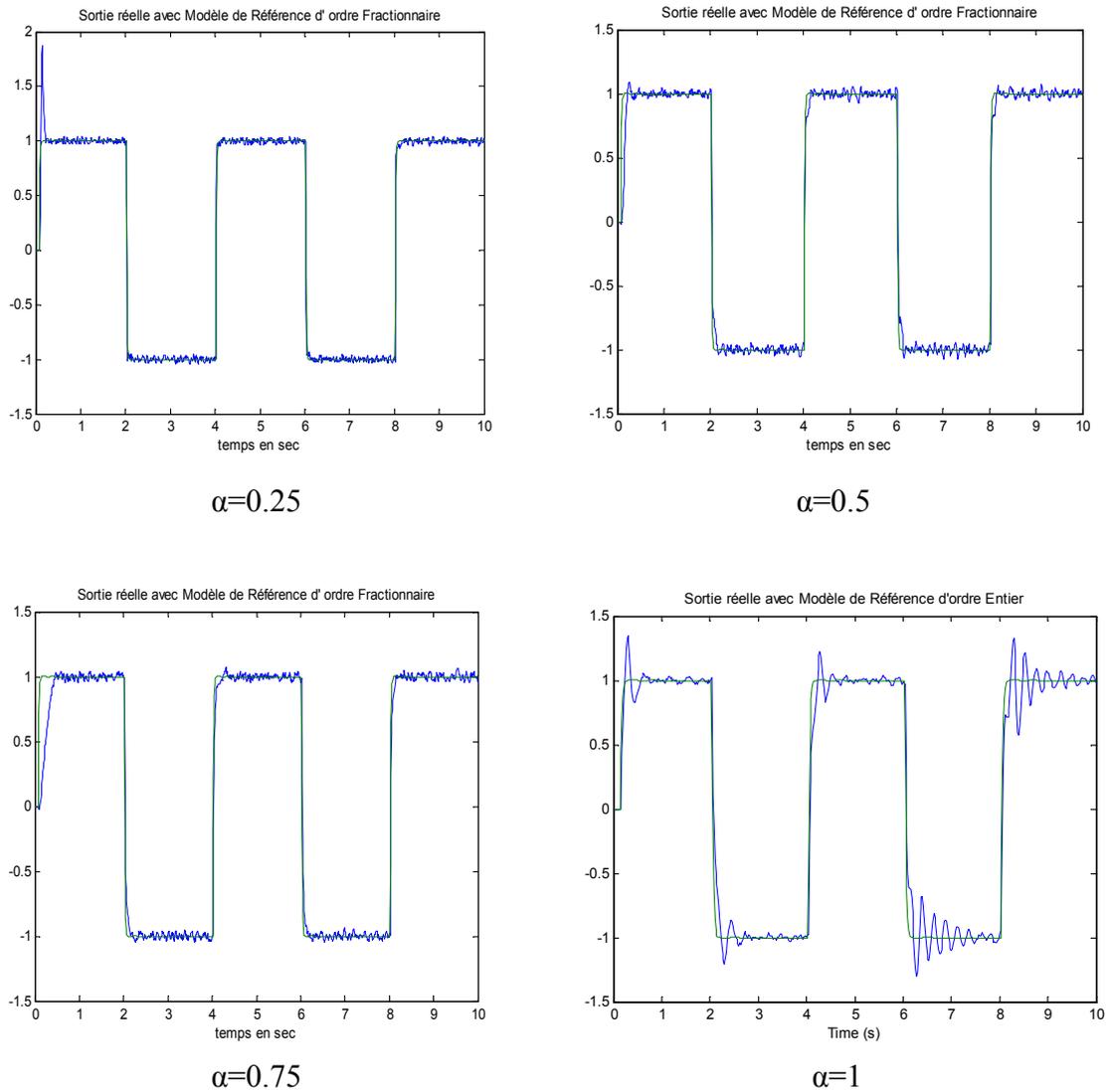


Figure. II.19: Sortie de la Cammande Adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire pour  $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$ ,  $\alpha=1$  avec bruit aléatoire à la sortie (amplitude 5% du signal de référence)

Les Signaux de Commande de l'approche MRAC d'ordre fractionnaire pour  $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$ ,  $\alpha=1$  avec bruit aléatoire à la sortie (amplitude 5% du signal de référence) sont donnés par la figure II.20.

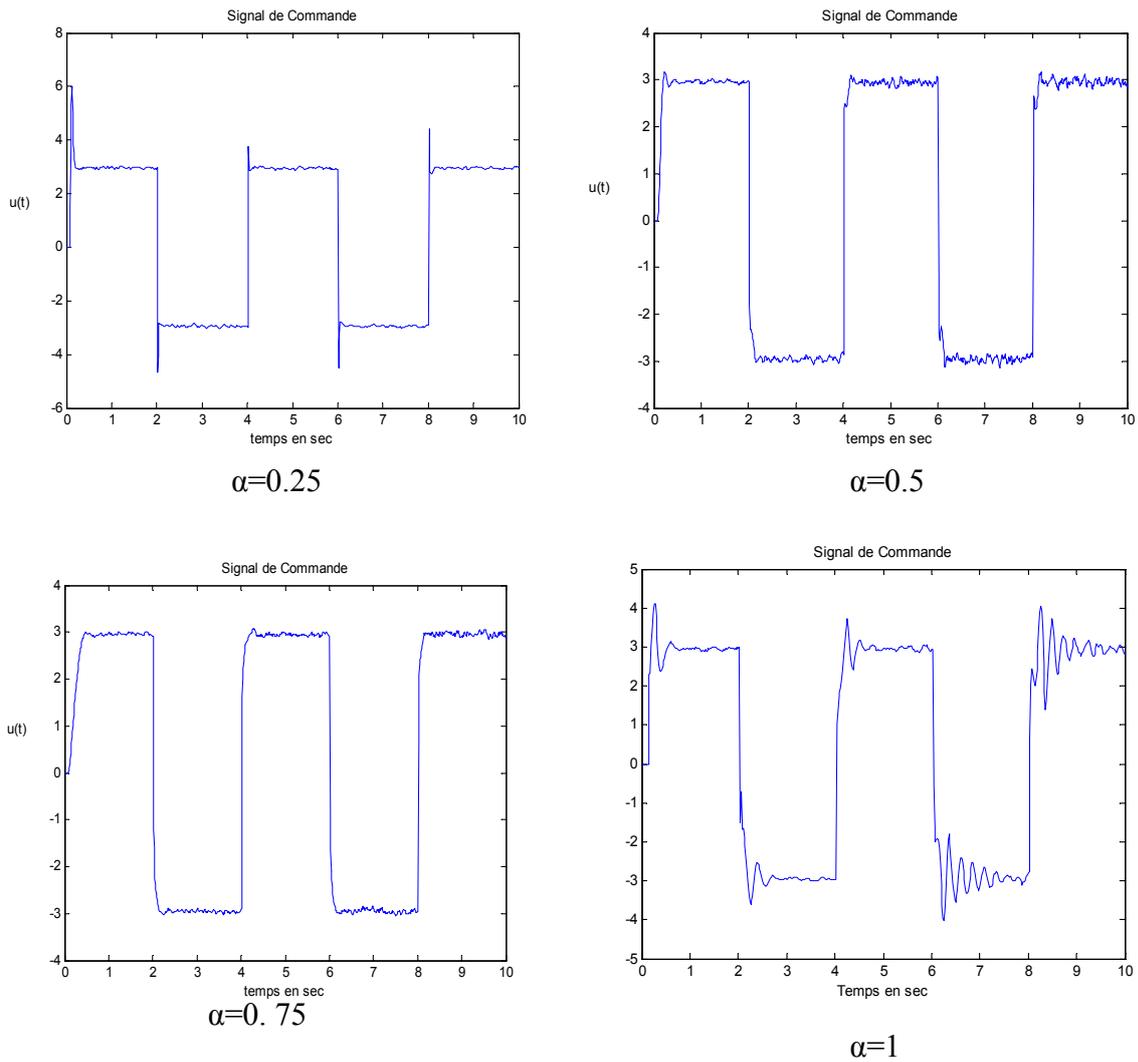


Figure. II.20. Signaux de commande pour  $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$ ,  $\alpha=1$  avec bruit aléatoire à la sortie (amplitude 5% du signal de référence)

Les sorties de la Cammande Adaptative à modele de référence d'ordre fractionnaire pour  $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$ ,  $\alpha=1$  avec bruit aléatoire à la sortie (amplitude 20% du signal de référence) sont données par la figure II.21.

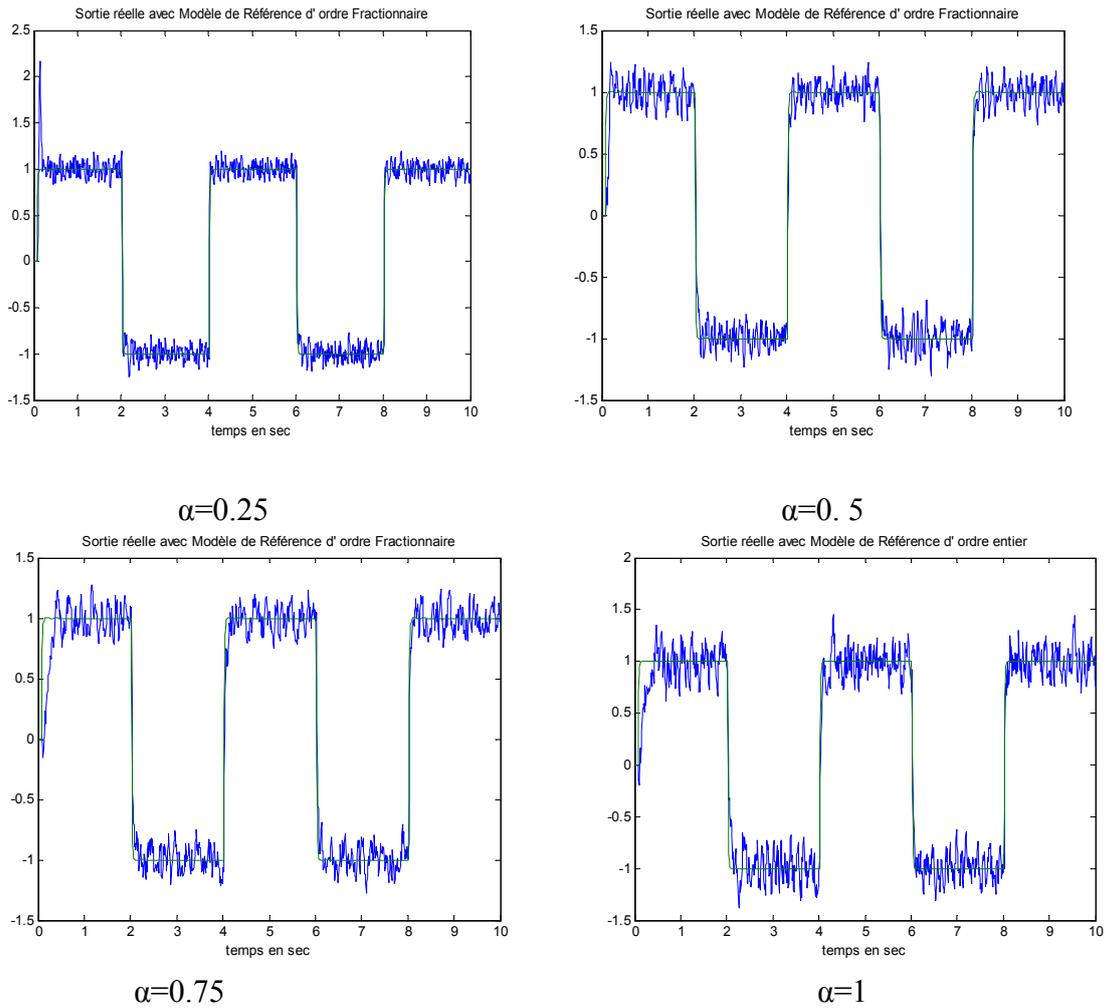


Figure. II.21: Sortie de la Cammande Adaptative à modèle de référence pour  $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$ ,  $\alpha=1$  avec bruit aléatoire à la sortie (amplitude 20% du signal de référence)

Les Signaux de Commande de l'approche MRAC d'ordre fractionnaire pour  $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$ ,  $\alpha=1$  avec bruit aléatoire à la sortie (amplitude 20% du signal de référence) sont donnés par la figure II.22.

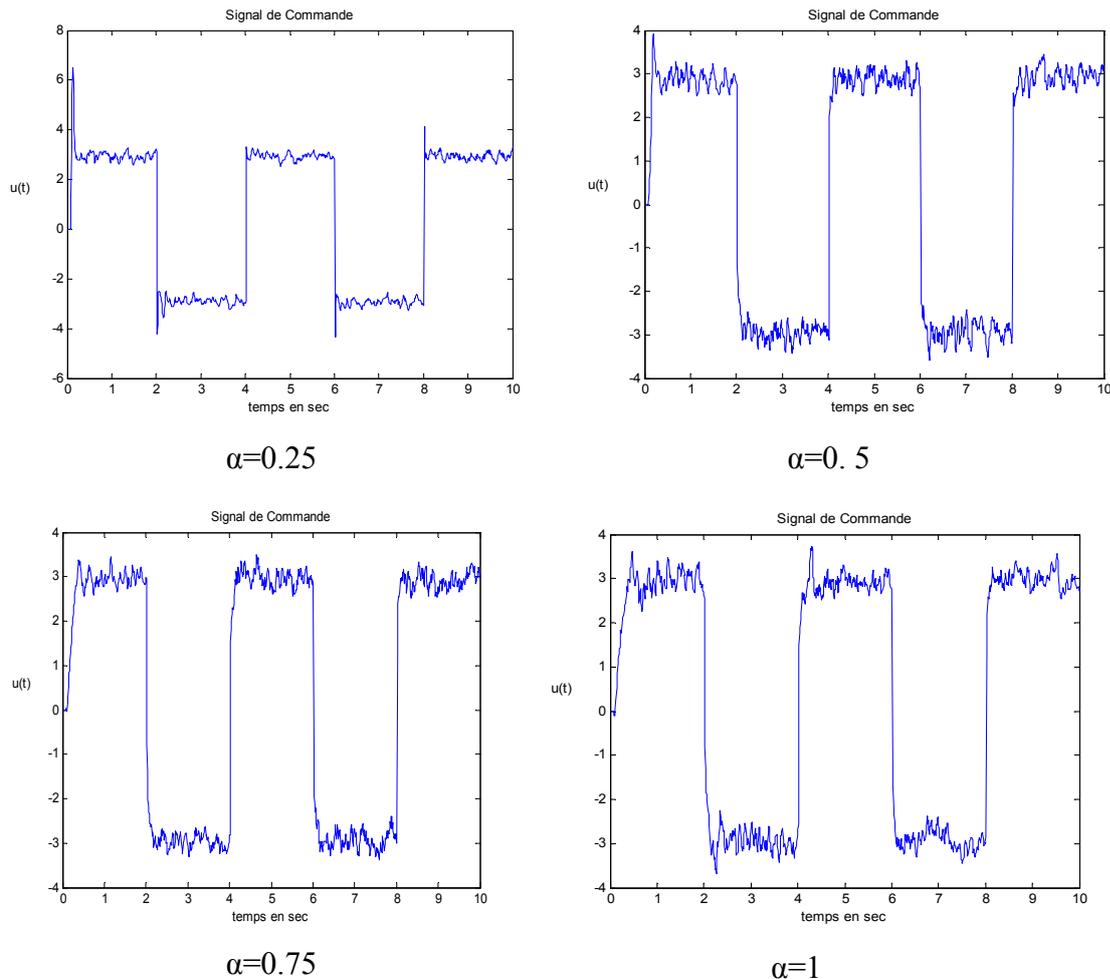


Figure. II.22. Signaux de commande pour  $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$ ,  $\alpha=1$  avec bruit aléatoire à la sortie (amplitude 20% du signal de référence)

## Commentaires

- La stabilité de la boucle fermée est maintenue dans les deux exemples (le modèle de référence entier et fractionnaire) pour les différentes valeurs de  $\alpha$ , avec un bon niveau de performances.
- D'après les figure II.17, on remarque que pour  $\alpha=1$  la sortie du système suit la référence mais avec un certain dépassement et un temps de réponse de  $Tr=0.12s$  et pour  $\alpha$  d'ordre fractionnaire ( $\alpha=0.25$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\alpha=0.75$ ) on remarque la minimisation de dépassement ainsi que le bon suivi de la consigne par rapport au cas entier..

D'après les figures II.19 et II.21 on remarque l'amélioration de la robustesse en utilisant le modèle de référence d'ordre fractionnaire qui sera analysée dans la section suivante.

### II.5.3. Analyse de Robustesse :

L'évaluation de performance de système de commande est réalisée en utilisant le critère de l'erreur quadratique J suivant :

$$J = \int_{t_I}^{t_F} (u_r(t) - y(t))^2 dt \quad (\text{II.40})$$

Le critère de l'erreur quadratique J en utilisant un bruit aléatoire de 5% et 20% de la sortie est donné par le tableau 1 et 2 respectivement :

Tableau II.3. Le Critère de l'erreur quadratique J avec un bruit aléatoire de 5% de la sortie

$\alpha$	0.25	0.5	0.75	1
J	0.033	0.051	0.045	0.092

Tableau II.4. Le Critère de l'erreur quadratique J avec un bruit aléatoire de 20 % de la sortie

$\alpha$	0.25	0.5	0.75	1
J	0.19	0.42	0.34	0.8

D'après les tableaux II.3 et II.4, on remarque que le critère d'erreur quadratique J est minimal dans le cas d'utilisation d'un modèle de référence fractionnaire dans le schéma de la commande MRAC, ce qui justifie l'amélioration de la robustesse.

## II.6 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre expose une contribution à la commande adaptative robuste avec un modèle de référence d'ordre fractionnaire pour les processus SISO. Le principe consiste à approximer d'abord le modèle de référence fractionnaire en utilisant l'une des méthodes d'approximation et ensuite utiliser l'algorithme classique de la commande adaptative à modèle de référence.

Notre objectif a été de trouver une commande qui conduit le système à un objectif désiré (le signal de référence). Les résultats de simulation ont confirmé les avantages de la commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire tel que le bon suivi de la consigne, la rapidité et l'amélioration de robustesse.

## Chapitre III

# Commande adaptative indirecte par placement de pôles d'ordre Fractionnaire

### III.1.Introduction

L'objectif général dans l'automatique est de déterminer des lois de commande qui confèrent aux systèmes linéaires incertains des performances transitoires robustes. Il est bien connu que les pôles d'un système LTI sont prépondérants dans le comportement transitoire de ce dernier. Si ce système est décrit par une représentation d'état, il est donc souvent souhaitable que les valeurs propres de la matrice d'évolution  $A$  soient bien localisées dans le plan complexe

Dans ce chapitre on présentera une méthode algébrique simple de conception de la commande adaptative. L'idée est de déterminer le régulateur qui impose les pôles désirés en boucle fermée. De plus, on veut que le système suive le signal de référence d'une manière spécifiée. Cette méthode permet d'imposer des dynamiques d'ordre fractionnaire au système en boucle fermée. Le but étant d'améliorer le comportement du processus à commander en temps réel [89].

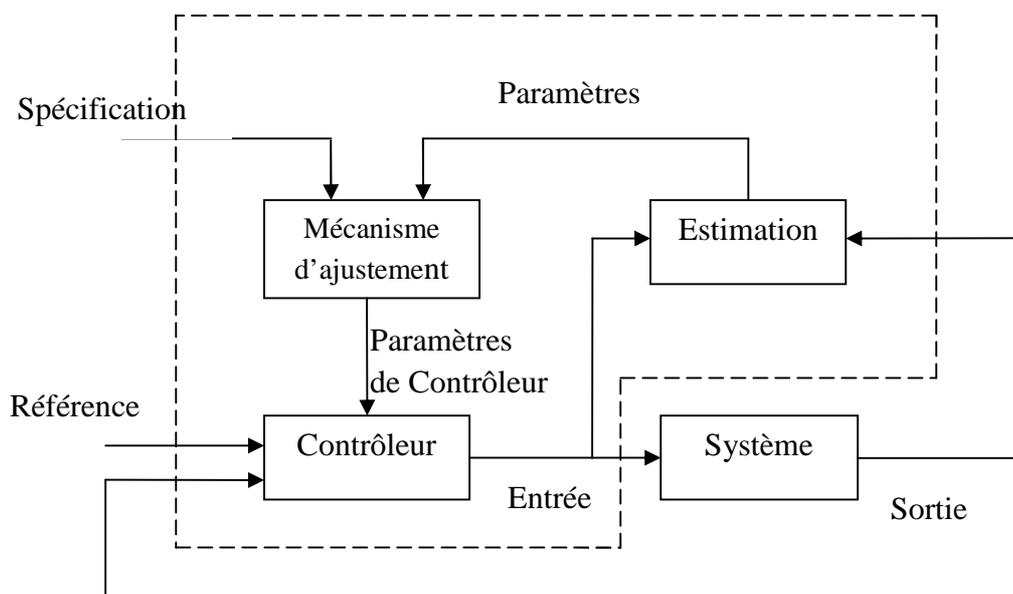


Figure .III.1 : Schéma bloc d'un régulateur auto-ajustable.

### III.2. Les différents types de placement de pôles

Il existe trois de méthodes de placement de pôles à savoir :

– **Placement non strict** : il s'agit du problème réduit à sa plus simple expression à savoir trouver une loi de commande telle que la matrice dynamique en boucle fermée vérifie  $\lambda(A) \in D$  ( $D$  : Disque unitaire), En d'autres termes, on ne se préoccupe pas de la valeur précise des pôles placés dès lors que l'on assure la D-stabilité de A.

- **Placement strict** : ce placement correspond à la définition mathématique originelle du placement de pôles. Il consiste à choisir au préalable une valeur précise de spectre  $\{\lambda_d\}$  désiré pour A et dont les points associés sont contenus dans D, puis à calculer une loi de commande telle que  $\lambda(A) = \{\lambda_d\}$ .

- **Placement pseudo-strict** : il s'agit d'une approche intermédiaire entre les deux approches précédemment citées. L'idée consiste à choisir une région de tolérance nominale  $Z \in D$  et un vecteur de paramètres qui induit un spectre  $\{\lambda_d\} \in Z$ . L'on calcule ensuite une loi de commande à l'instar de ce qui se pratique pour un placement strict. Lorsque le vecteur de paramètres varie, A reste Z-stable donc D-stable. Cette solution consiste en fait à conserver des degrés de liberté sur le

placement nominal et à distinguer région de placement nominal Z et région de placement robuste D.

### III.3. Conception du placement de pôles

C'est une méthode simple dont l'idée est de déterminer un contrôleur qui donne les pôles désirés en boucle fermée, de plus elle exige que le système suive des signaux de commande d'une manière spécifiée [6].

#### III.3.1. modèle du processus :

On considère un processus décrit par un système à une entrée et une sortie (SISO). Même si on traitera essentiellement des systèmes discrets, on peut étudier simultanément les systèmes continus en écrivant:

$$A(q) y(t) = B(q) (u(t) + v(t)) \quad (\text{III.1})$$

Où A et B représentent des polynômes, soit de l'opérateur différentiel  $P = d/dt$  ou l'opérateur de décalage en avance q. On suppose que A et B sont relativement premiers, c.-à-d., qu'ils n'ont aucun facteur commun. De plus, on le suppose que A est monique, c.-à-d., que le coefficient de la puissance la plus élevée dans A est l'unité.

A et B sont des polynômes dont :  $\text{deg}A = n$  et  $\text{deg}B = \text{deg}A - d_0$

$$A^*(q^{-1}) = q^{-n} A(q)$$

Le modèle peut être écrit comme suit :

$$A^*(q^{-1}) y(t) = B^*(q^{-1}) (u(t - d_0) + v(t - d_0))$$

Où

$$A^*(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B^*(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}$$

Avec :  $m = n - d_0$

Un régulateur linéaire général peut être décrit par :

$$Ru(t) = T u_c(t) - S y(t) \quad (\text{III.2})$$

Où  $R, S$  et  $T$  sont des polynômes. Cette loi de commande présente une contre réaction négative avec l'opérateur de transfert  $-S/R$  et une action dans le sens direct avec l'opérateur  $T/R$ . Elle possède donc deux degrés de liberté.

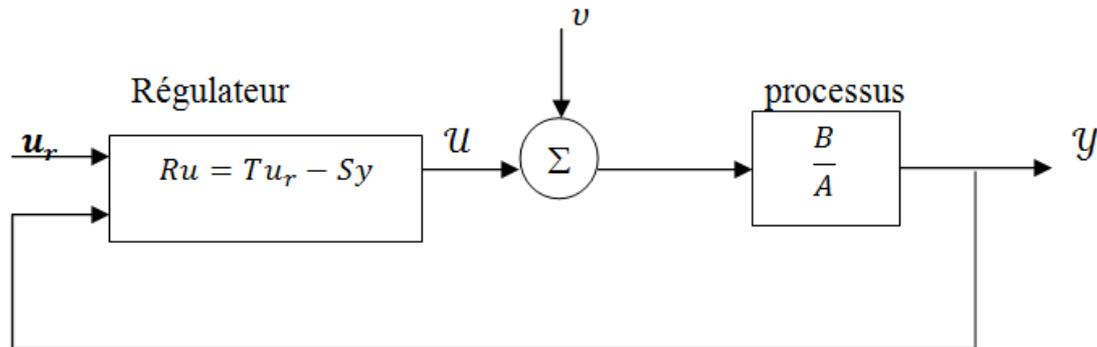


Figure. III.2. un régulateur linéaire général à deux degrés de liberté.

Un schéma fonctionnel du système en boucle fermée est montré dans figure (III.2). L'élimination de  $u$  entre les deux équations (III.1) et (III.2) donne les équations suivantes pour le système en boucle fermée :

$$y(t) = \frac{BT}{AR + BS} u_c(t) + \frac{BR}{AR + BS} v(t)$$

$$u(t) = \frac{AT}{AR + BS} u_c(t) + \frac{BS}{AR + BS} v(t) \quad (\text{III.3})$$

Donc le polynôme caractéristique en boucle fermée est :

$$AR + BS = A_c \quad (\text{III.4})$$

L'idée principale de la méthode de conception est de spécifier le polynôme de caractéristique désiré en boucle fermée  $A_c$ . Les polynômes  $R$  et  $S$  peuvent alors être résolus de l'équation (III.4). Cette dernière joue un rôle fondamental dans l'algèbre, elle s'appelle l'équation Diophantine (Identité de Bezout ou l'équation d'Aryabhata). L'équation (III.4) a toujours des solutions si les polynômes  $A$  et  $B$  n'ont pas des facteurs communs. La solution peut être mal conditionnée si les polynômes ont des

facteurs qui sont étroits. La solution peut être obtenue en introduisant des polynômes avec des coefficients inconnus.

### III.3.2. Poursuite de modèle :

L'équation Diophantine (III.4) détermine seulement les polynômes  $R$  et  $S$ . d'autres conditions doivent être présentées pour déterminer également le polynôme  $T$  dans le contrôleur (Equation III.2). Donc nous exigerons que la réponse du signal de référence  $u_c$  soit décrite par la dynamique

$$A_m y_m(t) = B_m u_c(t) \quad (\text{III.5})$$

Il vient alors de l'équation. (III.3) que la condition suivante doit être vérifiée :

$$\frac{BT}{AR+BS} = \frac{BT}{A_C} = \frac{B_m}{A_m} \quad (\text{III.6})$$

Maintenant, on discute des conséquences de la poursuite de modèle. L'équation (III.6) indique qu'il existe des facteurs communs de  $BT$  et  $A_C$ . On factorise le polynôme  $B$  comme suit :

$$B = B^+ B^- \quad (\text{III.7})$$

Où  $B^+$  est un polynôme monique dont les racines sont stables et on peut les compensés par le régulateur  $B^-$  correspond aux facteurs instables.

$B^-$  doit être un facteur de  $B_m$  tel que :

$$B_m = B^- B_m \quad (\text{III.8})$$

Puisque  $B^+$  doit être un facteur de  $A_C$  , le polynôme caractéristique de la boucle fermée prend donc la forme :

$$A_c = A_0 A_m B^+ \quad (\text{III.9})$$

Puisque  $B^+$  est un facteur de  $B$  et  $A_c$ , il vient de l'équation (III.4) qu'il divise  $R$  aussi, soit :

$$R = R' B^+ \quad (\text{III.10})$$

L'équation Diophantine (III.4) est réduite à :

$$AR' + B^-S = A_0A_m = A'_c \quad (III.11)$$

En introduisant les équations (III.7), (III.8) et (III.9) dans l'équation (III.6) on obtient :

$$T = A_0B'_m \quad (III.12)$$

### III.3.3. Conditions de causalité :

Pour obtenir un régulateur causal dans le cas de temps discret ou approprié dans le cas continu, nous devons imposer les conditions suivantes :

$$\deg S \leq \deg R \quad \text{et} \quad \deg T \leq \deg R$$

L'équation Diophantine (III.4) à beaucoup de solutions parce que si  $R^0$  et  $S^0$  sont des solutions, alors :

$$R = R^0 + QB \quad (III.13)$$

$$S = S^0 - QA \quad (III.14)$$

Où  $Q$  est un polynôme arbitraire. Puisqu'il y a beaucoup de solutions, nous pouvons choisir la solution qui donne un régulateur du plus petit degré ( la solution de degré minimal). Puisque le  $\deg A > \deg B$  donc la limite d'ordre suprême de l'équation (III.4) est  $AR$ , Par conséquent :

$$\deg R = \deg A_c - \deg A$$

Nous pouvons toujours trouver ainsi une solution dans laquelle le  $\deg S > \deg(A-1)$ , elle s'appelle la une solution de degré minimal de l'équation Diophantine. Puisque  $\deg R \leq \deg S$  alors :

$$\deg A_c \geq 2\deg A - 1$$

Il vient de l'équation. (III.12) que la condition  $\deg T \leq \deg R$  implique que :

$$\deg A_m - \deg B'_m \geq \deg A - \deg B^+$$

En ajoutant  $B^-$  aux deux côtés, il vient de l'équation (III.12) que la condition  $\deg A_m - \deg B_m \geq d_0$  .où  $d_0$  est le degré relatif du processus.

Donc dans le cas discret le temps de retard du modèle doit être au moins égal au temps de retard du processus, ce qui est une condition très naturelle. Les conditions de causalité sont :

$$\deg A_c \geq 2\deg A - 1 \quad (\text{III.15})$$

$$\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B = d_0 \quad (\text{III.16})$$

Il est normal de choisir une solution dans laquelle le contrôleur à le plus minimal degré qui sera possible. Dans le cas de temps discret il est également raisonnable d'exiger qu'il n'y ait aucun retard supplémentaire dans le régulateur. Ceci implique que les polynômes R, S, et T doivent avoir les mêmes degrés. La procédure de conception obtenue est appelée aussi placement de pôles à degré minimal qui peut être résumée dans l'algorithme suivant :

**Algorithme** : placement de pôles de degré minimal (MDPP) :

Données : polynômes A, B.

Spécifications : polynômes  $A_m, B_m$  et  $A_0$

Conditions de compatibilité :

$$\deg A_m = \deg A$$

$$\deg B_m = \deg B$$

$$\deg A_0 \geq \deg A - \deg B^+ - 1$$

$$B_m = B^- B_m'$$

Etape 1 : Factoriser B tel que  $B = B^+ B^-$ , où  $B^+$  est Monique.

Etape 2 : Trouver la solution  $R'$  et S avec  $\deg S < \deg A$  à partir de

$$AR' + B^- S = A_0 A_m$$

Etape 3 : A partir de  $T = A_0 B_m'$ , calculer le signal de commande en utilisant la loi de commande de régulateur linéaire ( $Ru = Tu_c - S y$ ).

Il existe certains cas spéciaux intéressants de cette procédure : tous les zéros sont compensés ou bien non compensés :

- **Tous les zéros sont compensés :**

La procédure de conception simplifiée de manière significative dans le cas spécial dans lequel tous les zéros de processus sont compensés ; alors

$$\deg A_0 = \deg A - \deg B - 1 = d_0 - 1$$

Il est naturel de choisir  $B_m = A_m(1)q^{n-d_0}$ , la factorisation dans l'étape 1 devienne très simple, et on obtient :

$$B^- = b_0, B^+ = B/b_0 .$$

De plus  $T = A_0 B'_m = A_0 q^{n-d_0} A_m(1)/b_0$  et l'équation Diophantine dans l'étape 2 réduite à :

$$AR' + b_0 S = A'_c = A_0 A_m$$

Il est facile de résoudre cette équation puisque  $R'$  est le quotient et  $b_0 S$  est le reste quand  $A_0 A_m$  est divisé par  $A$ . Cependant, tous les zéros de processus doivent être stables et bien amortis pour permettre cette compensation.

- **Aucun zéro n'est compensé :**

La factorisation de l'étape 2 devienne aussi très simple si aucun zéro n'est compensé.

On a  $B^+ = 1, B^- = B$  et  $B_m = \beta B$ , où  $\beta = A_m(1)/B(1)$ .

$$\deg A_0 = \deg A - \deg B - 1 \text{ et } T = \beta A_0$$

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est  $A_c = A_0 A_m$ , et l'équation de Diophantine de l'étape 2 devienne :

$$AR + BS = A_c = A_0 A_m$$

### III.3.4. Interprétation de polynôme $A_0$ :

Il est possible de donner une interprétation du polynôme  $A_0$  qui se présente dans la solution du problème de placement de pôles dans le cas de degré minimale. Pour cela, nous observons que le problème de placement de pôles peut être aussi résolu avec la rétroaction d'état et un observateur. La dynamique en boucle fermée se compose alors de deux parties : la première correspond au retour d'état et la deuxième correspond à la dynamique d'observateur.

Pour un système de degré  $n$  il est suffisant d'utiliser un observateur  $n-1$ , du degré  $n$ . Quand aucun zéro de processus n'est pas commandable, le polynôme caractéristique en boucle fermée dans ce cas est  $A_m A_0$  où  $A_m$  est de degré  $n$  et  $A_0$  est de degré  $(n-1)$ . Par cette analogie nous pouvons interpréter le polynôme  $A_m$  comme étant associé à un retour d'état et à  $A_0$  comme étant associé à l'observateur. Nous appellerons donc  $A_0$  le polynôme d'observateur.

Dans un système avec retour d'état il est également normal de présenter les signaux de commande de telle manière qu'ils ne produisent pas des erreurs d'observateur.

### III.3.5. Relation avec la commande à modèle de référence :

Nous montrons que la loi de commande donnée par (III.2) peut être interprétée comme un modèle de référence. D'après les équations (III.11) et (III.12), on trouve :

$$\frac{T}{R} = \frac{AB_m}{BA_m} + \frac{SB_m}{RA_m}$$

La loi de commande (III.2) peut être écrite sous la forme suivante:

$$u = \frac{T}{R} u_c - \frac{S}{R} y = \frac{AB_m}{BA_m} u_c + \frac{SB_m}{RA_m} u_c - \frac{S}{R} y$$

$$u = \frac{AB_m}{BA_m} u_c + \frac{S}{R} (y + y_m)$$

Une représentation de schéma fonctionnel de ce régulateur est donnée dans figure (III.2), cette dernière montre que le contrôleur peut être interprété comme combinaison d'un contrôleur de réaction et d'un autre de rétroaction.

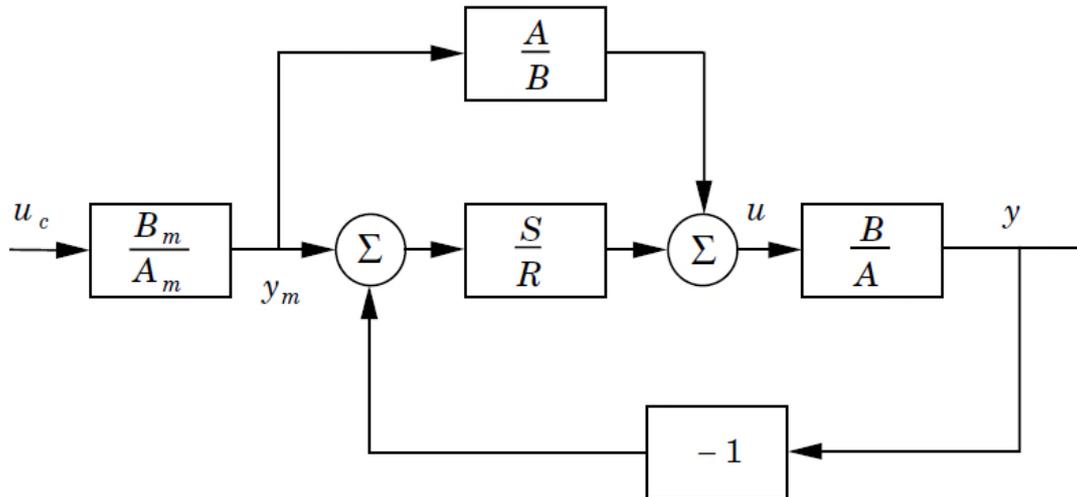


Figure III.3.Représentation alternative de modèle de référence basée sur le retour de la sortie

### III.4. Commande auto-ajustable

#### III.4.1. Commande auto-ajustable indirecte

Plusieurs méthodes récursives d'estimation peuvent être utilisées pour estimer les coefficients des polynômes A et B. Dans la suite, nous allons utiliser l'estimateur des moindres carrés récursifs. Le modèle du processus (III.1) peut être écrit explicitement en omettant le bruit  $v(t)$  (pour simplification) comme suit :

$$y(t) = -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) - \dots - a_ny(t-n) + b_0u(t-d_0) + \dots + b_mu(t-d_0-m)$$

Notons que le degré du système est  $\max(n, m + d_0)$ , le modèle est linéaire par rapport aux paramètres et peut être écrit :

$$y(t) = \varphi^T(t-1)\theta \quad (\text{III.17})$$

Ou :  $\theta^T = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_0 \ \dots \ b_m)$

$$\varphi^T(t-1) = (-y(t-1) \ \dots \ -y(t-n) \ u(t-d_0) \ \dots \ u(t-d_0-m))$$

L'estimateur des moindres carrés avec oubli exponentiel est donné par :

$$\theta^T = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\epsilon(t) \quad (\text{III.18})$$

$$\epsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1) \quad (\text{III.19})$$

$$k(t) = P(t-1)\varphi^T(t-1)\left(\lambda + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1)\right)^{-1} \quad (\text{III.20})$$

$$P(t) = I - K(t)\varphi(t-1)P(t-1)/\lambda \quad (\text{III.21})$$

Si le signal d'entrée du processus est suffisamment excitant et la structure du modèle estimé est compatible avec le processus, les estimations vont converger à leurs vraies valeurs. Cela prend  $\max(n, m + d_0)$  périodes d'échantillonnage avant que le vecteur de régression ne soit défini. Dans le cas déterministe cela prend au moins  $n + m + 1$  autres périodes pour déterminer les  $(n + m + 1)$  paramètres du modèle, en supposant que l'entrée du processus est suffisamment excitante. Cela donc prend au moins  $N$  périodes d'échantillonnage pour l'algorithme de convergence tel que :

$$N = n + m + 1 + \max(n, m + d_0) \quad (\text{III.22})$$

### III.4.2. Commande auto-ajustable directe

L'avantage des algorithmes directs des régulateurs auto-ajustables par rapport aux algorithmes indirects est que ces derniers demandent plus de calculs et sont parfois mal-conditionnés par certaines valeurs des paramètres. Dans le cas des régulateurs directs, les calculs de conception sont simplifiés ou carrément éliminés.

### III.5. Exemple d'application : (Application à un MCC)

#### III.5.1. Introduction [33]

Les équipements industriels utilisent de plus en plus les entraînements à vitesse variable, et le moteur à courant continu demeure le plus utilisé car on peut varier sa vitesse de rotation par une simple action sur sa tension induit.



Figure.III. 4. Différents types de moteurs MCC

#### III.5.2. Description du moteur à courant continu

##### III.5.2.1. Définition

Un moteur à courant continu est un dispositif qui permet de transformer l'énergie électrique en énergie mécanique. Il comporte un induit bobiné (le rotor) et un inducteur bobiné ou à aimant permanent (stator). Le rotor tournant confère une inertie propre ( $J$ ) et son implantation sur paliers implique des frottements mécaniques ( $fr$ ). Le schéma fonctionnel du moteur à courant continu est donné par la figure. III. 5.

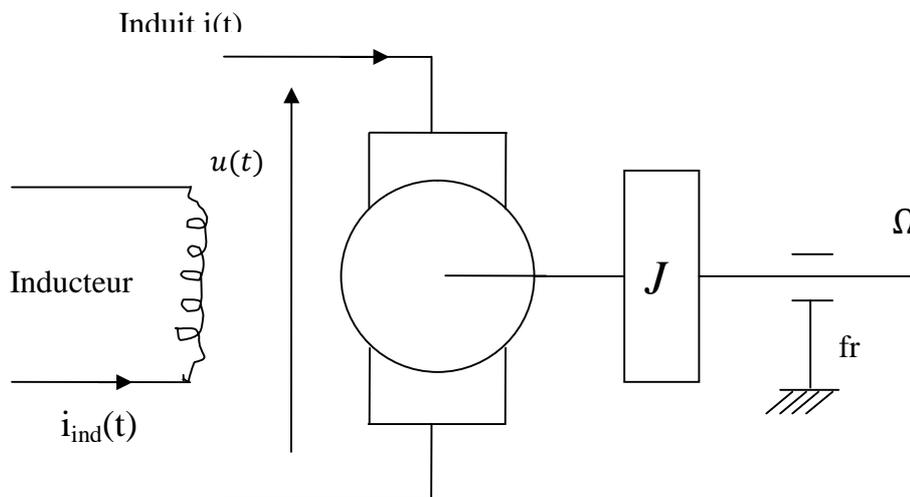


Figure. III. 5. Schéma de principe du moteur à courant continu.

### III.5.2.2. Le principe de fonctionnement

La machine à courant continu fut la première à être inventée. Elle utilise comme source d'énergie une source continue. Son fonctionnement est basé sur un phénomène simple qui est : la force de LAPLACE.

Un conducteur (une barre) de longueur ( $l$ ) placé dans un champ magnétique ( $B$ ) et parcouru par un courant ( $I$ ), est soumis à une force électromagnétique de Laplace.

La force de Laplace ( $\vec{F}$ ) est toujours perpendiculaire au courant électrique ( $\vec{I}$ ) et au vecteur d'induction magnétique.

$$\vec{F} = \vec{I} \wedge \vec{B}.l \quad (\text{III.23})$$

La loi de Laplace constitue le principe de fonctionnement du moteur à courant continu. Cette force engendre un couple pour entraîner le moteur en rotation.

### III.5.2.3. Modélisation du moteur à courant continu

La modélisation représente l'indispensable étape préliminaire à la conduite de processus industriels. Cette étape fondamentale est nécessaire soit pour l'élaboration d'une loi de commande ou pour le développement d'une procédure de diagnostic. La modélisation d'un processus vise à établir les relations qui lient ses variables caractéristiques entre elles et à représenter d'une manière rigoureuse le comportement de ce processus dans un domaine de fonctionnement donné.

Nous considérons un moteur à courant continu alimenté par un hacheur. L'ensemble (convertisseur + moteur) est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{k_e}{L}u(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\frac{k_e}{L}i(t) - \frac{f}{J}y(t) + \frac{1}{J}C_r(t) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Où  $i(t)$  : le courant d'induit

$y(t)$  la vitesse angulaire du moteur

$u(t)$  la tension de commande

$C_r(t)$  le couple résistant (perturbation).

Ce moteur est à faible puissance, ses caractéristiques sont :

- Moment d'inertie  $J = 0.018 \text{ kg.m}^2$  ,
- Coefficient d'amortissement  $f = 0.0055 \text{ nm/rad.s}$  ,

- Constante du couple moteur  $k_e = 1$
- Résistance du moteur  $R = 6.25 \Omega$
- Inductance du moteur  $L = 0.024 H$
- Constante d'amplification  $k = 35$

En introduisant l'opérateur de différentiation, le système d'équation (III.24) devient :

$$i(s) = \frac{-k_e y + k u}{Ls + R} \quad (III.25a)$$

$$y(s) = \frac{k_e i(s) - C_r(s)}{Js + f} \quad (III.25b)$$

En substituant l'équation (III.25a) dans (III.25b) :

$$y(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_2} u(s) - \frac{br_0 + br_1}{s^2 + a_1 s + a_2} C_r(s) \quad (III.26)$$

Avec :

$$- b_0 = \frac{k_e k}{J.L}, \quad - br_0 = \frac{1}{J}, \quad - br_1 = \frac{R}{J.L}, \quad - a_1 = \frac{J.R + L.f}{J.L}, \quad - a_2 = \frac{f.R + k_e^2}{J.L}$$

Et le système devient après remplacement des valeurs numériques des paramètres précédents :

$$Y(s) = \frac{81018}{s^2 + 260.7s + 2394} U(s) - \frac{55.55s + 14460}{s^2 + 260.7s + 2394} C_r(s) \quad (III.27)$$

On suppose que le couple de perturbation est nul, alors on obtient :

$$Y(s) = \frac{81018}{s^2 + 260.7s + 2394} U(s) \quad (III.28)$$

Le modèle de référence est un système de second ordre donné par l'équation (III.29) suivante :

$$G_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \quad (III.29)$$

Avec :  $w_n = 10$ ,  $\xi = 0.95$  l'équation (III.29) devient :

$$G_m(s) = \frac{100}{s^2 + 19s + 100} \quad (III.30)$$

La fonction de transfert du moteur décret avec une période d'échantillonnage  $T=0.04$  s est donnée comme suit :

$$G(z) = \frac{9.816 z + 0.9112}{z^2 - 0.683 z + 2.959 \cdot 10^{-005}} \quad (III.31)$$

La fonction de transfert du modèle de référence est :

$$G_m(z) = \frac{0.06227z + 0.04832}{z^2 - 1.357z + 0.4677} \quad (\text{III.32})$$

### III.5.3. Implémentation sous Matlab :

#### III.5.3.1. placement de pôles d'ordre entier :

##### III.5.3.1.1. Placement de pôles fixe :

Modèle de processus : c'est l'équation (III.28) :

$$Y(s) = \frac{81018}{s^2 + 260.7s + 2394} U(s)$$

Modèle de référence : est un système de second ordre donné par l'équation (III.29):

$$G_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

Avec  $w_n = 10$ ,  $\xi = 0.95$ ,

Après la simplification de l'équation Diophantine (III.16) :

$$(z^2 + a_1z + a_2) + b_0(s_0 + s_1) = z^2 + am_1z + am_2$$

On trouve  $s_0 = -0.0686$ ,  $s_1 = 0.0476$ ,  $t_0 = 0.0112$ ,  $r_1 = 0.0928$

La loi de commande est :

$$u(k+1) = -r_1 u(k) + t_0 u_c(k+1) - s_0 y(k+1) - s_1 y(k)$$

Après la simulation on obtient la figure III.6 avec les valeurs initiales suivantes :

$u(1)=0$ ,  $u(2)=0$ ,  $u(3)=0$ ,  $u(4)=0$ ,  $u(5)=0$ ,  $y(1)=0$ ,  $y(2)=0$ ,  $y(3)=0$ ,  $y(4)=0$ ,  $y(5)=0$ ,  
 $y_m(1)=0$ ,  $y_m(2)=0$ ,  $y_m(3)=0$ ,  $y_m(4)=0$ ,  $y_m(5)=0$ .

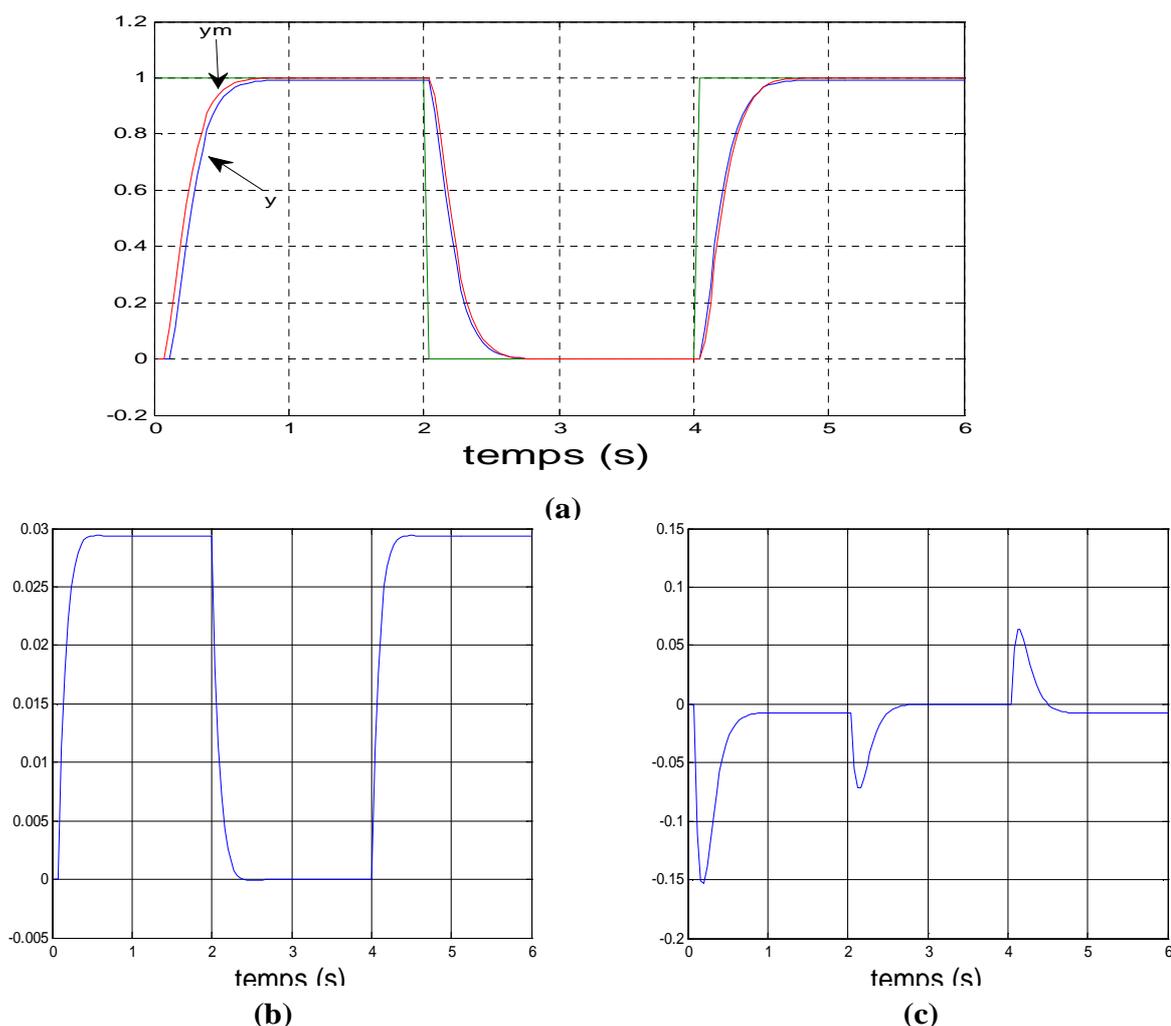


Figure III. 6. le résultat de (a) : Sortie de système, (b) :Signal de commande, (c) : Signal d'erreur

### III.5.3.1.2. Placement de pôles adaptatif :

Modèle de processus : c'est l'équation (III.28) :

$$Y(s) = \frac{81018}{s^2 + 260.7s + 2394} U(s)$$

Modèle de référence : est un système de second ordre donné par l'équation (III.29):

$$G_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_m(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

Avec  $w_n = 10$ ,  $\xi = 0.95$ ,

On utilise dans ce cas l'estimateur de moindres carrés avec oubli exponentiel et donne par les équations (III.18), (III.19), (III.20), (III.21).

Et obtient la figure III. 7, avec :  $\theta = [-1.5317 \ 0.6132 \ 1.5325 \ 1.2259]'$ ,  $\lambda = 0.75$ .

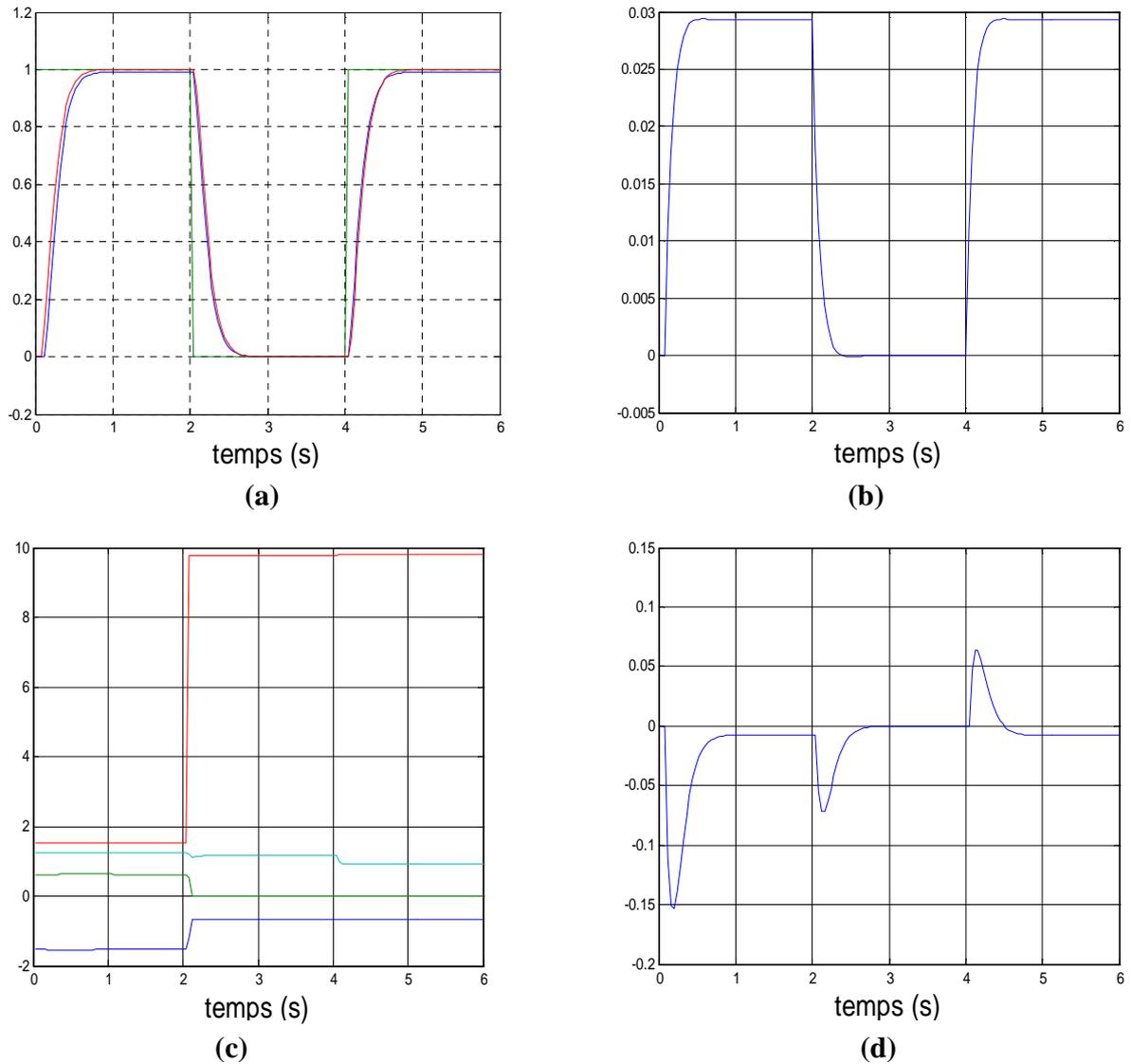


Figure III.7. le résultat de (a) : Sortie de système, (b) : Signal de commande, (c) : Paramètres estimés, (d) : Signal d'erreur

### **Commentaires :**

Les courbes (III.6), (III.7) montrent que la sortie  $y$  du système suit parfaitement la référence, avec un temps de réponse acceptable, et un dépassement limité

### III.5.3.2. placement de pôles d'ordre fractionnaire :

#### III.5.3.2.1. placement de pôles d'ordre fractionnaire fixe :

Modèle de processus : c'est l'équation (III.28) :

$$Y(s) = \frac{81018}{s^2 + 260.7s + 2394} U(s)$$

Modèle de référence: est un système de second ordre donne par l'équation suivante :

$$G_m(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\xi \frac{s}{w_n} + 1\right)^\beta}$$

Avec  $w_n = 10$ ,  $\xi = 0.95$ ,  $\beta = 0.4$

Le modèle approximé en utilisant la méthode de Charef avec une discrétisation  $T=0.04$  est :

$$G_m(z) = \frac{0.0469z^4 + 0.03919z^3 - 0.004319z^2 - 2.292e - 008z - 5.346e - 025}{z^5 - 1.629z^4 + 0.837z^3 - 0.1289z^2 - 3.159e - 019z + 8.014e - 035}$$

Après la simplification de l'équation Diophantine (III.16) on obtient:

$$\begin{aligned} (z^2 + a_1z + a_2)(z^3 + r_1bz^2 + r_2bz + r_3b) + b_0(s_0 + s_1) \\ = z^5 + am_1z^4 + am_2z^3 + am_3z^2 + am_4z + am_5 \end{aligned}$$

On trouve

Ce qui donne ;  $r_1b = am_1 - a_1$  ,  $r_2b = am_2 - a_1r_1b - a_2$ ,  $r_3b = am_3 - a_1r_2b - a_2r_1b$

$$s_0 = \frac{am_4 - a_1r_3b - a_2r_2b}{b_0}$$

$$s_1 = \frac{am_5 - a_2r_3b}{b_0}$$

$$t_0 = \frac{1 + am_1 + am_2 + am_3 + am_4 + am_5}{b_0}$$

La loi de commande :

$$\begin{aligned} u(k+1) = -r_1u(k) - r_2u(k-1) - r_3u(k-2) - r_4u(k-3) + t_0u_c(k-2) \\ - s_0y(k-2) - s_1y(k-3) \end{aligned}$$

Avec:  $r_1 = r_1b + z_0$  ,  $r_2 = r_2b + z_0r_1b$  ,  $r_3 = z_0r_2b + r_3b$ ,  $r_4 = r_3bz_0$  et  $z_0 = 0.0928$ .

La figure (III.8) montre les résultats de l'application dans le cas placement de pôles d'ordre fractionnaire fixe :

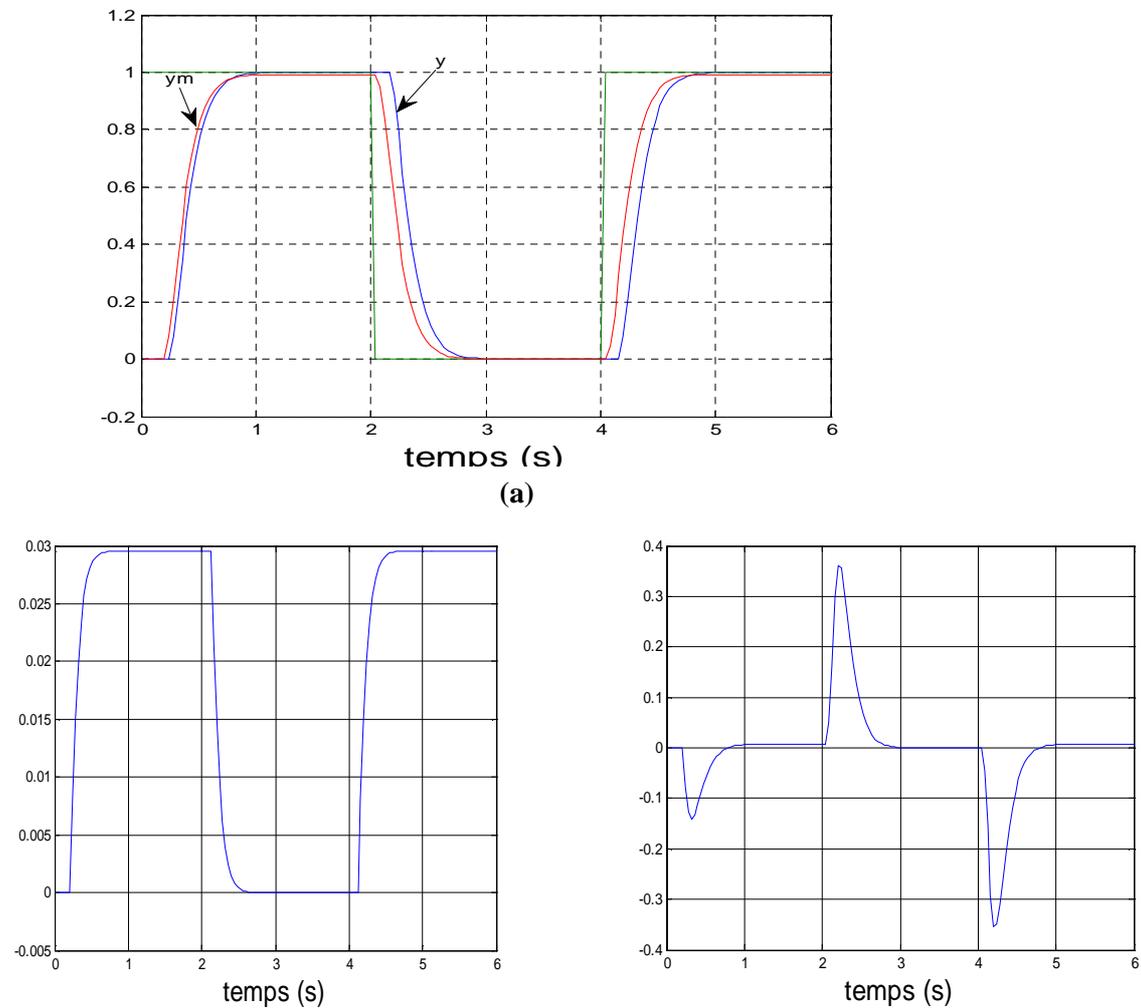


Figure III. 8 le résultat de (a) : Sortie de système, (b) : Signal de commande, (c) : Signal d'erreur

### III.5.3.2.2. Placement de pôles adaptatif d'ordre fractionnaire :

On utilise dans ce cas l'estimateur de moindres carrés avec oubli exponentiel et donne par les équations (III.18), (III.19), (III.20), (III.21).

Et obtient la figure (III.9) ci-dessous : avec  $\theta = [-1.68 \quad -0.10 \quad 9.85 \quad 1.25]$ ,

$\lambda = 0.75$ .

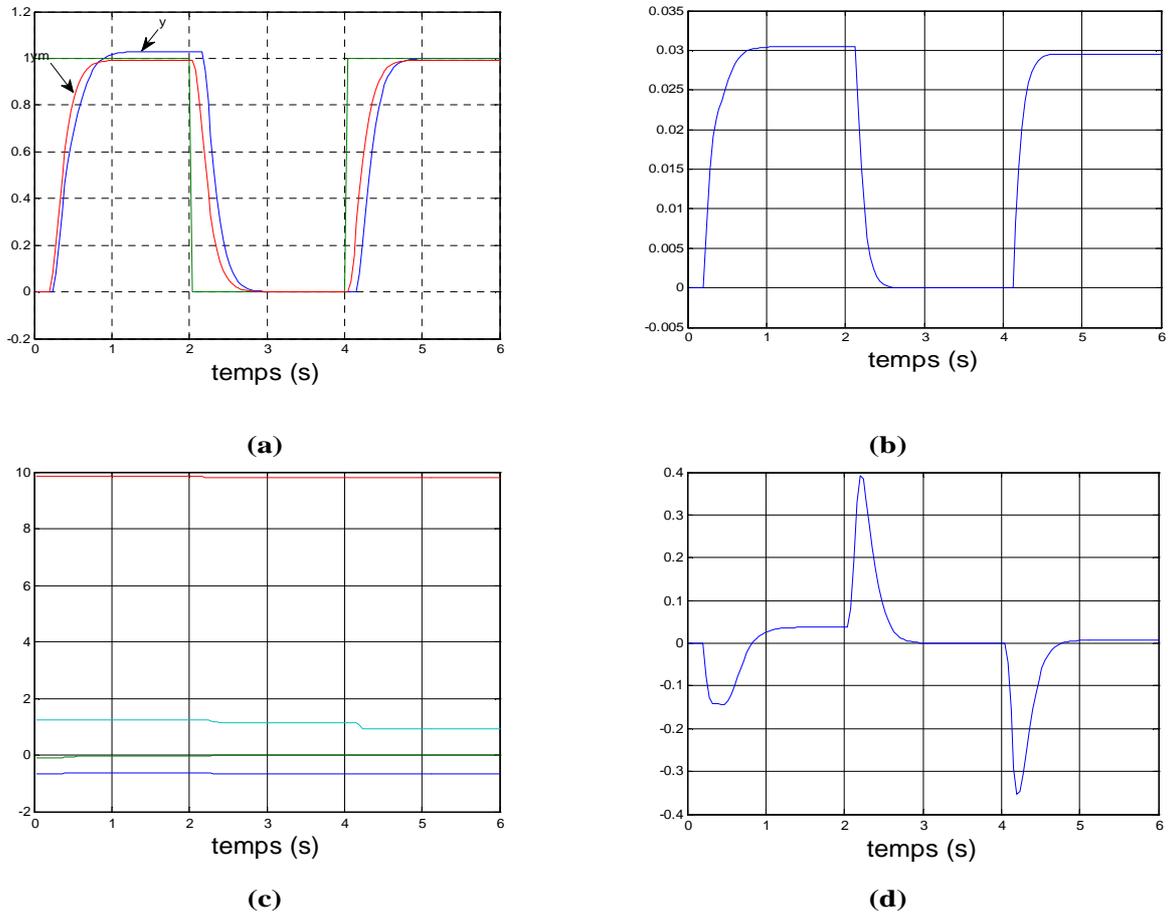


Figure III.9. le résultat de (a) : Sortie de système, (b) : Signal de commande, (c) : Paramètres estimés, (d) : Signal d'erreur

**Commentaires :**

D'après les figures (III. 8), (III. 9), on constate :

- La stabilité du système est satisfaite.
- Dépassement acceptable.
- Temps de réponse assez rapide
- Le système suit le modèle de référence.

### **III.6. Conclusion**

Nous avons appliqué dans ce chapitre la commande adaptative indirecte par la méthode de placement de pôles d'ordre entier et d'ordre fractionnaire sur des un exemple d'application (Moteur à Courant Continu), les résultats ont été très satisfaisant et montrent l'efficacité de cette méthode, pour contrôler des systèmes dont le modèle exacte n'est pas disponible ou dont les paramètres évoluent lentement dans le temps.

## Chapitre IV :

# La Fractionalisation : Une nouvelle approche pour la robustification des systèmes de commande

### IV.1.Introduction

L'usage des correcteurs classiques assurent quelques performances notamment la précision et la stabilité grâce à l'action intégrale et l'action dérivée. Vu les bonnes performances qui caractérisent les systèmes d'ordre fractionnaire, un travail de recherche intensif dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire est en cours de réalisation.

Dans ce chapitre nous proposons une nouvelle approche pour introduire les filtres fractionnaires dans les schémas de commande classique. Elle est basée sur le remplacement d'une fonction d'ordre entier par une cascade de fonctions d'ordre fractionnaire.

Dans la suite, nous allons utiliser l'approche « fractionalisation » dans les différentes techniques de commande (commande PI, Commande PID et commande PI adaptative) pour objectif d'améliorer les performances des systèmes.

### IV.2. Commande d'un PID classique :

Aujourd'hui, le correcteur PID est la structure de commande la plus utilisée dans les boucles de rétroaction. Plus de 90% des boucles d'asservissement sont des correcteurs PID. Généralement, le correcteur PID classique est implémenté dans des systèmes de commande à retour unitaire classique donné par la figure IV .1.

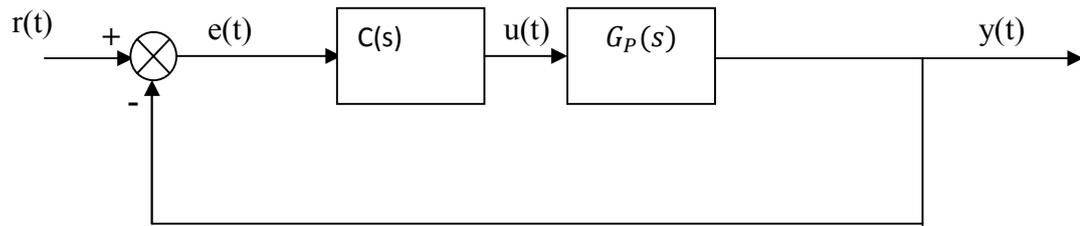


Figure IV .1: Système de commande à retour unitaire classique.

Où :

$u(t)$ : le signal de commande

$e(t)$  : l'écart résultant de la différence entre la consigne  $r(t)$

$Y(t)$ : la grandeur à commander

$C(t)$  : la fonction de transfert du correcteur

$G_p(s)$  : est la fonction de transfert de système.

Le comportement du correcteur proportionnel intégral dérivé (PID) classique est décrit par l'équation suivante :

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (\text{IV.1})$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (IV.1) avec les conditions initiales nulles la fonction de transfert de ce correcteur peut être exprimé par :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{s} + T_d s \right) \quad (\text{IV.2})$$

Les paramètres du correcteur associés à ces différents termes sont le gain proportionnel  $K_p$ , la constante d'intégration  $T_i$  et la constante de dérivation  $T_d$ . Les trois termes proportionnel, intégral et dérivé possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire.

La partie proportionnelle constitue la forme la plus élémentaire de rétroaction, où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à commander, multiplié par le gain  $K_p$ . L'intuition veut qu'en augmentant ce gain, le signal de commande agisse de manière plus forte sur le système et ainsi atténue plus rapidement l'écart. Lorsque  $K_p$  augmente, le temps de réponse varie peu et l'erreur statique est améliorée.

D'un autre côté, un correcteur agissant trop fortement donnera naissance à des comportements oscillatoires, témoins d'une diminution, voire d'une perte de stabilité. L'apparition d'un signal de commande non nul, dans le cas d'un correcteur proportionnel, est soumise à l'existence d'un écart entre la consigne et la grandeur à commander. La suppression de celui-ci est assurée par l'utilisation du terme intégral. Ce dernier génère, à partir d'un signal d'erreur de signe constant, une commande dont l'amplitude ne cesse de croître. Cela aura pour conséquence de supprimer tout écart permanent. Pour cette raison, le terme intégral est souvent interprété dans la littérature comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du correcteur. Mais il engendre un effet déstabilisant. Au contraire, l'objectif premier de l'élément dérivé est d'accroître la stabilité en boucle fermée. L'idée du terme dérivé est de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement, sans attendre son apparition [19].

### IV.3-Contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire :

Le contrôleur PID, de part sa simplicité, est très utilisé dans le monde industriel, néanmoins, ses performances deviennent insuffisante en raison par exemple de la présence d'un retard non négligeable dans le modèle du procédé ou lorsque les paramètres du procédé varient. Dans ce cas, on fait appel à d'autres algorithmes de réglage tels que, le réglage par retour d'état, le réglage par modèle interne, le réglage Par régime glissant, etc.

Mais récemment, Podlubny, pour améliorer le comportement du correcteur PID, à proposé le contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire, comportant un intégrateur d'ordre  $\lambda$  et un différentiateur d'ordre  $\mu$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  appartiennent à l'ensemble des nombre réels. L'équation de sortie du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire dans le domaine de temps est donnée sous la forme :

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\lambda}(e(t)) + T_d D^\mu(e(t)) \right] \quad (IV.3)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (IV.3) avec les conditions initiales nulles, la fonction de transfère de ce correcteur peut être exprimé par :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s^\lambda} + T_d s^\mu \right) \quad (IV.4)$$

Où les d'intégration  $K_i$  et de dérivation  $K_d$  sont liés aux paramètres de la forme classique par les relations suivantes :

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (IV.5)$$

$$K_d = K_p T_d \quad (IV.6)$$

La fonction de transfère  $C(s)$  d'un correcteur est :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s^\lambda} + T_D s^\mu \right) \quad (IV.7)$$

En choisissant

$\lambda = 1$  et  $\mu = 1$  dans l'équation (IV.7), on obtien le correcteur PID classique.

$\lambda = 1$ ,  $\mu = 0$  et  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$  donnent respectivement les correcteur PI et PD classique ,

$\lambda = 0$  et  $\mu = 0$  donnent un correcteur proportionnel .

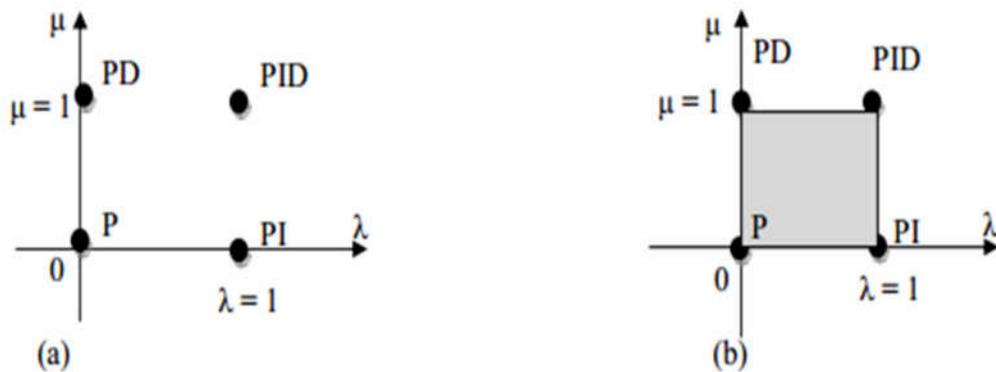


Figure IV .2. Correcteur PID, (a) :Ordre entier, (b) :Ordre fractionnaire

En plus de  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$ , le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  possède deux autres paramètres de réglage  $\lambda$  et  $\mu$ . Ceci le rend plus flexible et donc une opportunité pour mieux ajuster les propriétés dynamiques des systèmes de commande d'ordre fractionnaire. S'inspirant de l'idée du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  ; plusieurs travaux sur les techniques de réglage sont actuellement publiés [16].

L'avantage le plus important du correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est sa possibilité de bien commander la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire. Un autre avantage se trouve dans le fait que les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire sont moins sensibles aux changements des paramètres d'un système commandé, ce qui donne une amélioration de la robustesse. Ceci est parce que les correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire possèdent deux degrés de liberté supplémentaires pour mieux ajuster les propriétés dynamiques des systèmes de commande. Puisque les ordres  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels arbitraires, le correcteur  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire est plus flexible et donne l'avantage de mieux régler les propriétés dynamiques des systèmes [20, 21].

Des activités de recherche sont dirigées pour définir de nouvelles techniques de réglage des correcteurs  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire par l'extension de la théorie de la commande classique.

#### IV .4. Méthodes de réglage des correcteurs fractionnaires :

Une précision insuffisante, une stabilité trop relative (instabilité), un temps de réaction trop lent, un dépassement trop important, sont des qualités qui peuvent être inacceptables au regard d'un cahier de charges. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans le système asservis un réseau correcteur dont l'objectif est d'améliorer un ou plusieurs de ces différents paramètres sans bien sûr le faire au détriment des autres. Si l'on souhaite améliorer les caractéristiques de précision, stabilité et la rapidité du système, il est nécessaire d'introduire un correcteur dans la boucle de commande.

Ces correcteurs doivent permettre de réaliser le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité du système étudié [18, 23]. Les correcteurs classiques PID possèdent trois paramètres  $K_p, T_i$ , et  $T_d$ , ce nombre de paramètres augmente par rapport aux correcteurs fractionnaires. Les paramètres qui doivent être ajuster pour un correcteur fractionnaire sont  $K_p, T_i$ ,  $T_d, \lambda$  et  $\mu$ . Pour déterminer ces cinq paramètres, il faut avoir 5 équations à 5 inconnues.

##### IV.4. 1. Critères de performances temporelles :

Nous pouvons citer par exemple coefficient d'amortissement, erreur statique, temps de réponse et temps de montée.

##### IV.4. 2. Critères de performances fréquentielles :

On cite ci-dessous les spécifications fréquentielle qui peuvent être utilisées pour déterminer les paramètres des correcteurs fractionnaires :

A. La marge de phase  $\varphi_m$  et la fréquence de la coupure  $w_{cg}$  :

$$|C(w_{cg})G(w_{cg})|_{db} = 0db \quad (IV.8)$$

$$\pi + \varphi_m = arg|C(w_{cg})G(w_{cg})| \quad (IV.9)$$

B. Marge du gain :

$$M_g = \frac{1}{C(jw_{-\pi})G(jw_{-\pi})} \quad (IV.10)$$

$$\arg(C(j\omega_{-\pi})G(j\omega_{-\pi})) = \pi \quad (\text{IV.11})$$

C. Garantir un rejet du bruit en haute fréquence, la fonction du transfert en boucle fermée doit avoir une petite amplitude en haut fréquence :

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1+C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{db} < A_{db} \quad (\text{IV.12})$$

$$|F(j\omega_t)|_{db} = A_{db} \omega \geq \omega_t \text{ rad/s}$$

Où A est l'atténuation désirée de bruit pour des fréquences rad/s

D. pour assurer un bon rejet de bruit de mesure de sortie on doit atteindre la contrainte :

$$\left| \frac{1}{1+C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{db} \leq N_{db}$$

$$|S(j\omega_t)|_{db} \omega \geq \omega_s \text{ rad/s} \Rightarrow |S(j\omega_s)|_{db} = N_{Db} \quad (\text{IV.13})$$

Avec N la valeur désirée de la fonction de sensibilité pour les fréquences  $\omega \geq \omega_s \text{ rad/s}$

e-Garantir la robustesse vis-à-vis aux variations du gain du système, la phase de la fonction du transfert en boucle ouverte doit être constante autour de la fréquence de coupure

$$\frac{d}{d\omega} \arg|C(j\omega)G(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}} = 0 \quad (\text{IV.14})$$

La vérification de l'équation (IV.14) signifie que le système est plus robuste aux variations du gain, ce qui donne un dépassement presque constant.

f-Rejet de bruit de sortie :

La contrainte suivante doit être atteinte :

$$|s(j\omega) = \frac{1}{1+C(j\omega)G(j\omega)}|_{db} \leq B_{db} \quad (\text{IV.15})$$

$$\Rightarrow |s(j\omega_s)|_{db} = B_{dB} \omega \leq \omega_s \text{ rad/s}$$

Avec B la valeur désirée de la fonction de sensibilité pour les fréquences  $\omega \leq \omega_s \text{ rad/s}$  (plages de fréquences désirées).

### IV.5.La fractionalisation des Correcteurs PI et PID :

La fractionalisation de PI classique ainsi que PID classique est obtenue en modifiant le terme intégrateur dans les fonctions de transferts des correcteurs précédent.

L'intégrateur  $1/s$  est fractionalisé comme suit [26, 87] :

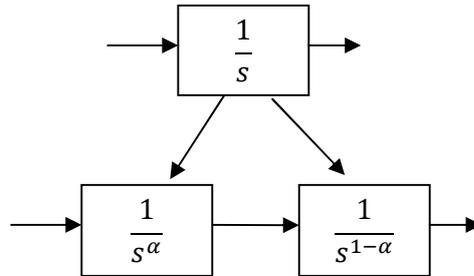


Figure IV .3.Fractionalisation d'un intégrateur

Tel que :  $\frac{1}{s} = \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{s^{1-\alpha}}$

Avec  $\alpha$  est un nombre réel:  $0 < \alpha < 1$ .

Soit la fonction de transfert d'un correcteur classique PI est :

$$C_{PI}(p) = K_p + \frac{1}{T_i p} \tag{IV.16}$$

La fonction de transfert d'un correcteur PI fractionalisé est donnée comme suit:

$$C_{PIf} = \frac{1}{p^\alpha} \frac{1}{p^{\alpha-1}} \left( \frac{k_p \tau_i p + 1}{\tau_i} \right) \tag{IV.17}$$

Avec  $0 < \alpha < 1$

Soit la fonction de transfert d'un correcteur PID classique donnée par l'équation suivante :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Le Correcteur PID fractionalisé définie par la fonction suivante [26] :

$$C(s) = \frac{1}{s} \left( \frac{(k_p T_d T_i s^2 + k_p T_i s + k_p)}{T_i} \right)$$

$$C(s) = \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{s(1-\alpha)} \left( \frac{(k_p T_d T_i s^2 + k_p T_i s + k_p)}{T_i} \right) \tag{IV.18}$$

Avec  $0 < \alpha < 1$

## IV.6. Commande PI adaptatif Robuste d'ordre Fractionnaire

### IV.6. 1. Contrôleur adaptatif PI d'ordre entier

Le schéma ordinaire de contrôleur PI adaptatif d'ordre entier [55] est donné par la figure IV.4.

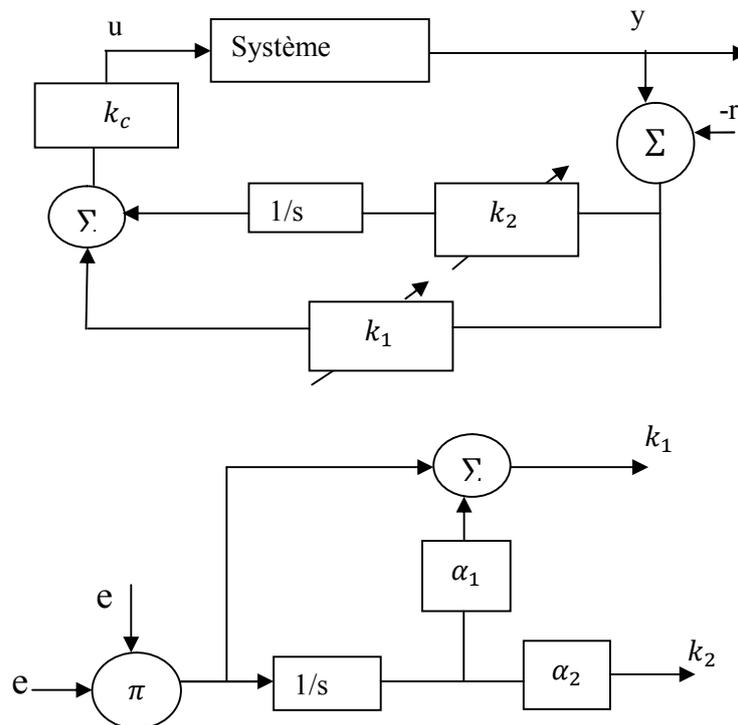


Figure. IV .4. Contrôleur adaptatif PI d'ordre entier.

La loi de commande de régulateur adaptatif *PI* d'ordre entier est donnée comme suit [55, 81]:

$$u(t) = k_c \left[ k_1(t)e(t) + \int_0^t k_2(\tau)e(\tau)d\tau \right] \tag{IV.19}$$

Avec :

$$k_1(t) = k_p(t) + \alpha_1 k_i(t)$$

$$k_2(t) = \alpha_2 k_i(t)$$

$$k_p(t) = e^2(t)$$

$$k_i(t) = \int_0^t e(\tau)^2 d\tau$$

$$e(t) = y(t) - r(t)$$

Avec  $k_c, \alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes positives.

**IV.6. 2. Contrôleur adaptatif *PI* d'ordre fractionalisé :**

Le schéma ordinaire de contrôleur *PI* adaptatif fractionalisé est donné par la figure IV .5 :

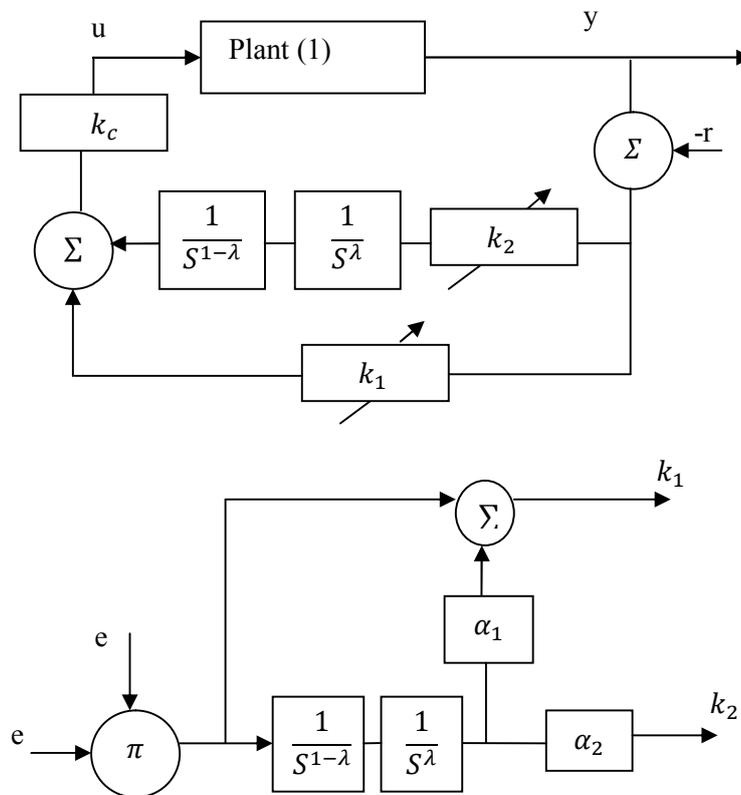


Figure IV .5. Contrôleur adaptatif *PI* fractionalisé.

La loi de commande de régulateur adaptatif *PI* fractionnalisé est donnée comme suit [28]:

$$u(t) = k_c \left[ k_1(t)e(t) + I^{1-\lambda} \left\{ I^\lambda \{ k_2(t)e(t) \} \right\} \right] \quad (\text{IV.20})$$

Avec :

$$k_1(t) = k_p(t) + \alpha_1 k_i(t)$$

$$k_2(t) = \alpha_2 k_i(t)$$

$$k_p(t) = e^2(t)$$

$$k_i(t) = I^{1-\lambda} \left\{ I^\lambda \{ e^2(t) \} \right\}$$

$$e(t) = y(t) - r(t)$$

## IV.7.Exemples et Simulations :

### IV.7.1.Commande PI et PI fractionnée

#### IV.7.1.1: Commande PI et PI fractionnée d'un système 3<sup>ème</sup> ordres

On considère comme un exemple d'application un système de fonction de transfert:

$$G(s) = \frac{-2s^2 + 2s + 10}{s^3 + 10s^2 + 10s + 5} \quad (\text{IV.21})$$

Les paramètres de réglage obtenus en utilisant la méthode de Hrones-Reswick sont :

$$K_p = 0.75, \tau_i = 3.1$$

La figure IV.6 représente la sortie du système après l'utilisation de correcteur PI et PI fractionné.

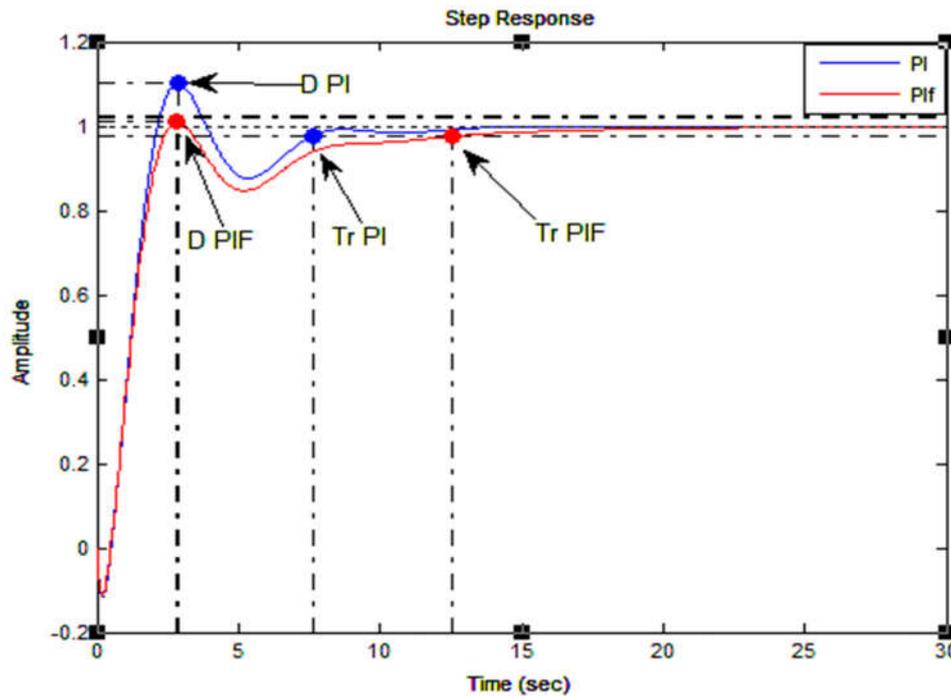


Figure IV.6 : Commande PI et PI Fractionisée d'un système 3<sup>ème</sup> ordres

Le tableau suivant représente le résumé des caractéristiques d'un PI et PI fractionisé pour les différentes valeurs de  $\alpha$  :

Tableau IV.1. Les caractéristiques d'un PI et PI fractionisé de système 3<sup>ème</sup> ordres

Correcteur ( $\alpha, \alpha - 1$ )	PI	PI Fractionisé
(0.1, 0.9)	Tr : 7.68s D : 0.1	Tr : 12.7s D : 0.091
(0.2, 0.8)	Tr : 7.68s D : 0.1	Tr : 12.9s D : 0.094
(0.3, 0.7)	Tr : 7.68s D : 0.1	Tr : 13.1s D : 0.099
(0.4, 0.6)	Tr : 7.68s D : 0.1	Tr : 13.3s D : 0.098
(0.5, 0.5)	Tr : 7.68s D : 0.1	Tr : 13.4s D : 0.094

### IV.7.1.2. La commande de la température d'un radiateur :

La fonction transfert d'un radiateur est:

$$G(s) = \frac{1}{39.69s^{1.26} + 0.598} \quad (\text{IV.22})$$

Le modèle approximé du radiateur, en utilisant la méthode d'oustaloup est donné par :

$$G_P(s) = \frac{0.004181 s^5 + 1.606 s^4 + 36.59 s^3 + 52.4 s^2 + 4.717 s + 0.0252}{s^6 + 187.2 s^5 + 2081 s^4 + 1474 s^3 + 95.06 s^2 + 2.986 s + 0.01507} \quad (\text{IV.23})$$

Le réglage par la méthode de Hrones-Reswick donne :

$$K_p = 2.75, \quad \tau_i = 4.5$$

La courbe suivante représente la sortie du système après l'application de la commande PI et PI fractionalisée :

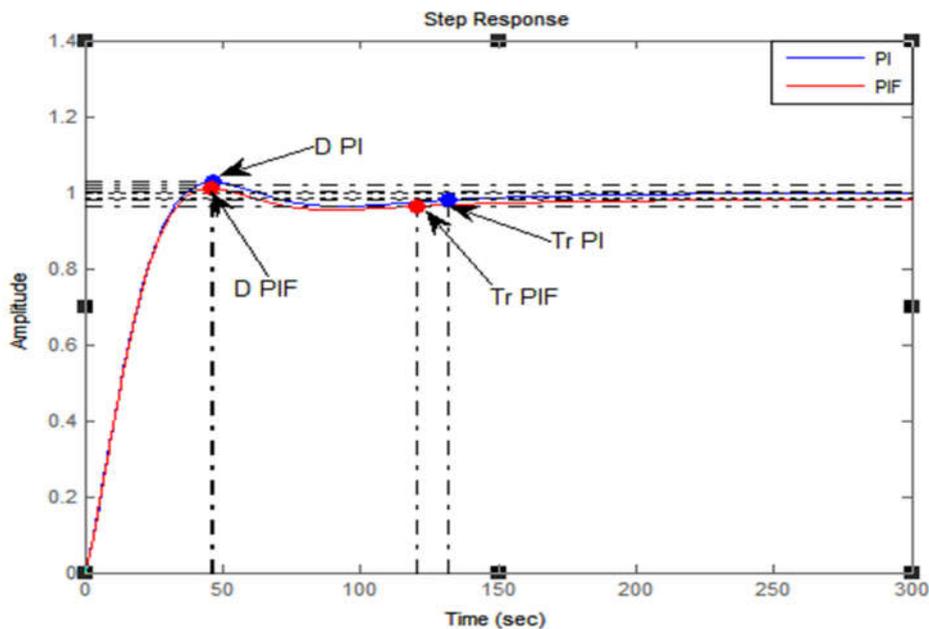


Figure IV.7 : Commande PI et PI fractionalisée d'un radiateur.

Le tableau IV.2 représente le résumé des caractéristiques d'un PI et PI fractionalisé pour les différentes valeurs de  $\alpha$  :

Tableau IV.2 .Les caractéristiques d'un PI et PI Fractionalisé d'un radiateur.

Correcteur ( $\alpha, \alpha - 1$ )	PI	PI Fractionalisé
(0.1, 0.9)	Tr : 106 s D : 0.01	Tr : 98 s D : 0.0089
(0.2, 0.8)	Tr : 106 s D : 1.01	Tr : 96.5 s D : 0.0092
(0.3, 0.7)	Tr : 106 s D : 0.01	Tr : 96 s D : 0.0098
(0.4, 0.6)	Tr : 106 s D : 0.01	Tr : 95.5 s D : 0.008
(0.5, 0.5)	Tr : 106 s D : 0.01	Tr : 95.3 s D : 0.009

#### IV.7.1.3. Commande d'un four :

La fonction de transfert d'un four donné par [24] est :

$$G(s) = \frac{0.1}{s^2 + 531s + 1.5 \cdot 10^4} \quad (\text{IV.24})$$

La figure IV.8 présente la sortie de système après l'application de la commande PI et PI fractionalisée.

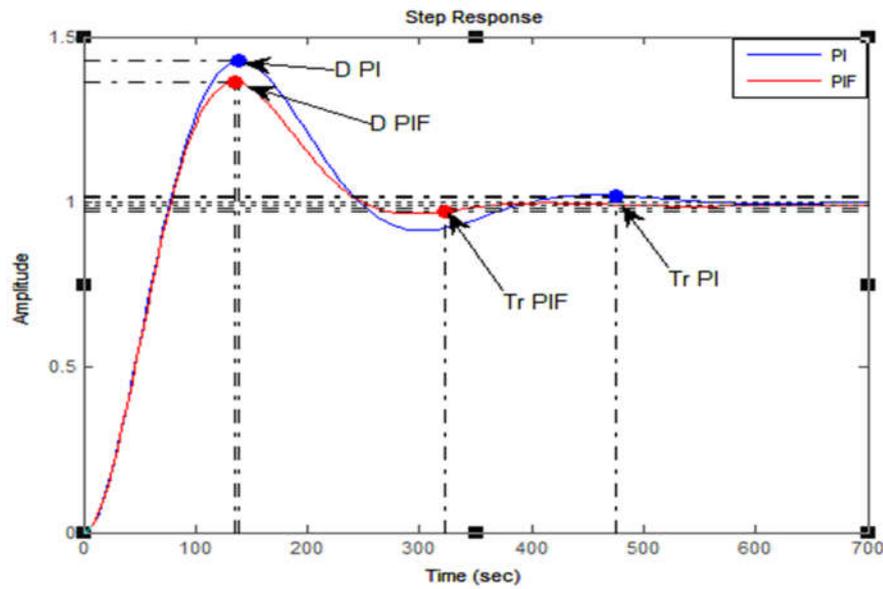


Figure IV.8. Commande PI et PI fractionalisée d'un four.

Le réglage par la méthode de Hrones-Reswick donne:

$$K_p = 5.25, \tau_i = 2.1$$

Le tableau IV.3 présente le résumé des caractéristiques d'un PI et PI fractionalisé pour les différentes valeurs de  $\alpha$ .

Tableau IV.3 .Les caractéristiques d'un PI et PI Fractionalisé de four.

Correcteur ( $\alpha, \alpha - 1$ )	PI	PI Fractionalisé
(0.1, 0.9)	Tr : 480 s D : 0.43	Tr : 355s D : 0.37
(0.2, 0.8)	Tr : 480 s D : 0.43	Tr : 326s D : 0.37
(0.3, 0.7)	Tr : 480 s D : 0.43	Tr : 242 s D : 0.36
(0.4, 0.6)	Tr : 480 s D : 0.43	Tr : 243 s D : 0.36
(0.5, 0.5)	Tr : 480 s D : 0.43	Tr : 244 s D : 0.36

## Commentaires :

D'après les tableaux IV.1, IV.2, IV.3, On remarque que :

- La stabilité est garantie dans les deux cas (entier et fractionalisé).
- La commande PI fractionalisée nous a permis d'améliorer le temps de réponse ( $T_r$ ) et de minimiser le dépassement ( $D$ ).

## IV.7.2. Commande PID et PID fractionalisé :

### IV.7.2.1. Commande PID et PID fractionalisée du moteur à courant continu :

On considère la fonction de transfert d'un moteur à courant continu :

$$G_p(s) = \frac{K_0}{s(\tau s + 1)} \quad (\text{IV.25})$$

Les valeurs nominales du gain  $K_0$  et du temps de relaxation  $\tau$  sont respectivement données par  $K_0 = 235$  et  $\tau = 1/66.9$ .

Les paramètres de réglage  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$  obtenus en utilisant la méthode de Ziegler\_Nichols sont respectivement: 0.0011, 0.12, 0.045.

La courbe IV.9 présente les sorties du MCC après l'application des correcteurs PID et PID fractionalisé :

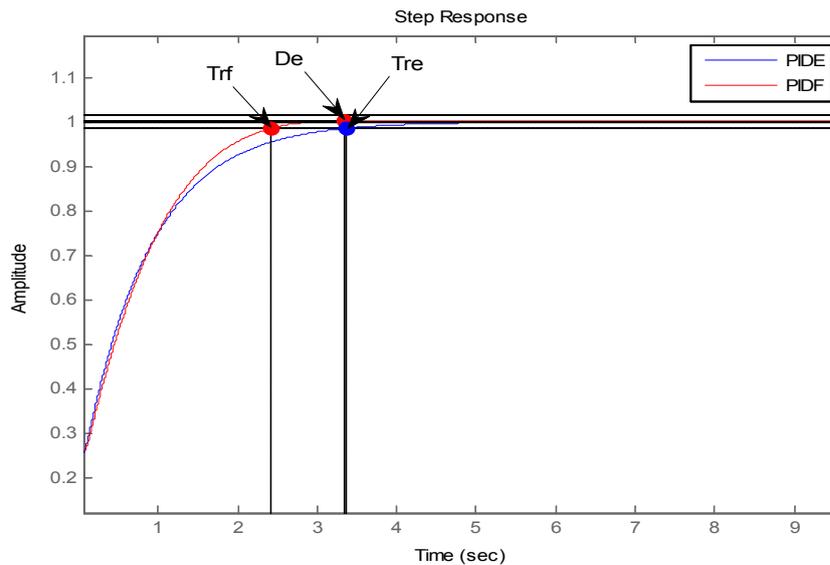


Figure IV.9 : Commande PID et PID fractionalisée d'un Mcc.

Le tableau IV.4 présente la différence entre les deux commandes PID et PID fractionalisée à partir le temps de réponse et le dépassement.

Tableau IV.4. Comparaison entre la commande PID et PID fractionalisée d'un Mcc.

Correcteur ( $\alpha, \alpha - 1$ )	PID	PID fractionalisé
(0,1 . 0,9)	$Tr = 3,36$	$T_r = 2,41$
(0,2 . 0,8)	$Tr = 3,36$	$T_r = 2,89$
(0,3 . 0,7)	$Tr = 3,36$	$T_r = 2,85$
(0,4 . 0,6)	$Tr = 3,36$	$T_r = 3,25$
(0,5 . 0,5)	$Tr = 3,36$	$T_r = 3,25$

#### IV.7.2.2. Commande PID et PID fractionalisée de la température d'un Radiateur :

Le modèle mathématique d'un Radiateur est donné par [42] :

$$G(s) = \frac{1}{39.69 s^{1.26} + 0.598} \quad (\text{IV.26})$$

Les paramètres de réglage  $K_p, T_i$  et  $T_d$  obtenus en utilisant la méthode de Ziegler\_Nichols sont respectivement:  $K_p = 10,5481, T_i = 2, T_d = 20$

La fonction de transfert du modèle approximé en utilisant la méthode d'oustaloup est donnée par la fonction suivante :

$$G_p(s) = \frac{0.004181 s^5 + 1.606 s^4 + 36.59 s^3 + 52.4 s^2 + 4.717 s + 0.0252}{s^6 + 187.2 s^5 + 2081 s^4 + 1474 s^3 + 95.06 s^2 + 2.986 s + 0.01507}$$

La courbe IV.10 présente les sorties de la température d'un Radiateur après l'application des commandes PID et PID fractionalisé avec  $\alpha=0.4$ .

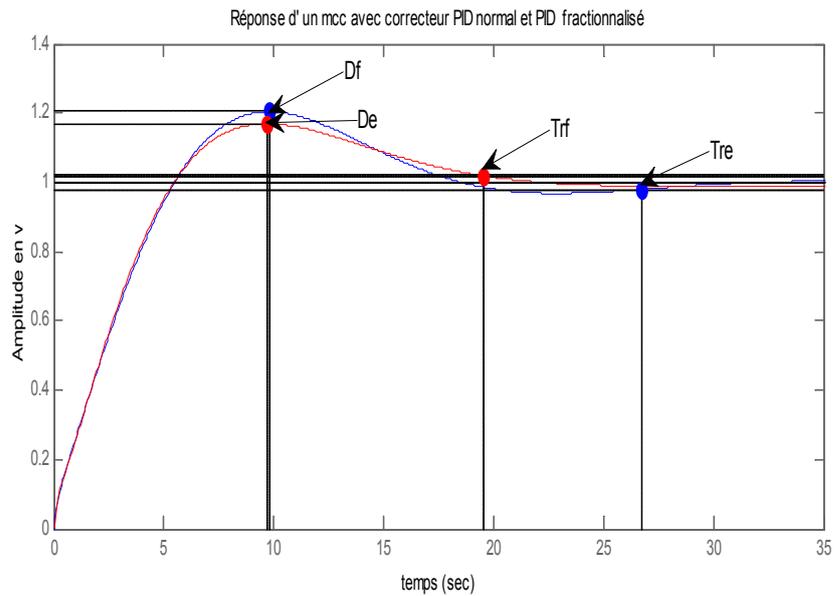


Figure IV.10. Commande PID et PID fractionnée d'un Radiateur.

Le tableau IV.5 présente la comparaison entre la commande PID et PID fractionnée de la température de radiateur

Tableau IV.5. Comparaison entre la commande PID et PID fractionnée d'un Radiateur.

Correcteur ( $\alpha, \alpha - 1$ )	PID	PID fractionnée
(0,1 . 0,9)	Tr = 26,7s D = 0,2	Tr = 25,4 s D = 0,17
(0,2 . 0,8)	Tr = 26,7s D = 0,2	Tr = 18,4 s D = 0,19
(0,3 . 0,7)	Tr <sub>e3</sub> = 26,7s D = 0,2	Tr = 19 s D = 0,18
(0,4 . 0,6)	Tr = 26,7s D = 0,2	Tr = 19,4 s D = 0,19
(0,5 . 0,5)	Tr = 26,7s D = 0,2	Tr = 19,6 s D = 0,17

**IV.7.2.3. Commande PID et PID fractionnisée d'un modèle de 2<sup>ème</sup> ordre:**

On considère le système de 2<sup>ème</sup> ordre suivant :

$$G_p(s) = \frac{10s+2}{s^2+s+1} \tag{IV.27}$$

Les paramètres de réglage  $K_p, T_i$  et  $T_d$  obtenus en utilisant la méthode de Ziegler\_Nichols sont respectivement:  $K_p = 10, T_i = 0.2, T_d = 1.3$

La figure IV.11 présente la réponse après la commande PID et PID fractionnisée avec  $(\alpha, 1-\alpha)=(0.4, 0.6)$  :

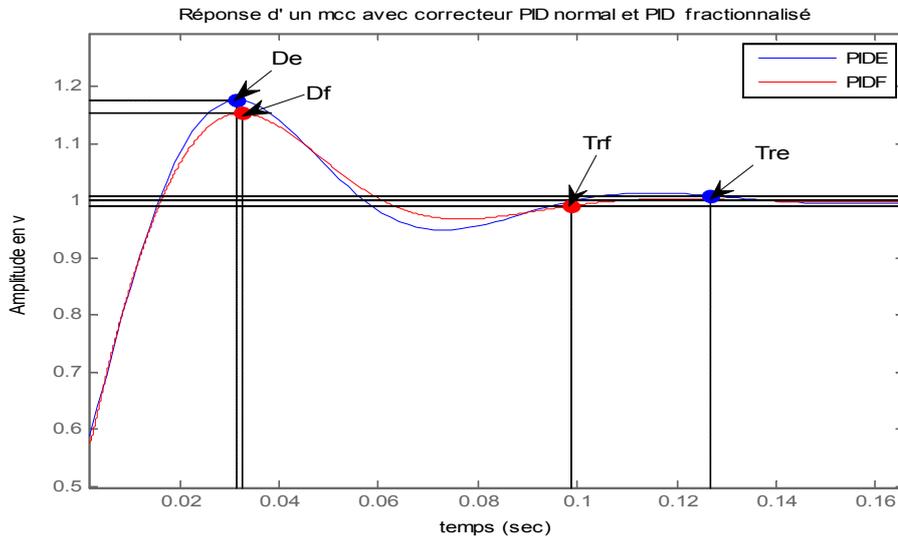


Figure IV.11 Commande PID et PID fractionnisée d'un modèle de 2<sup>ème</sup> ordre.

Le tableau IV.6 présente la comparaison entre la commande PID et PID fractionnisée d'un modèle de 2<sup>ème</sup> ordre.

Tableau IV.6. Comparaison entre la commande PID et PID fractionalisée d'un model de 2<sup>ème</sup> ordre.

Correcteur ( $\alpha, \alpha - 1$ )	PID	PID Fractionalisée
(0,1 . 0,9)	Tr = 0,127 s D = 0,175	Tr = 0,124 D = 0,11
(0,2 . 0,8)	Tr = 0,127 s D = 0,175	Tr = 0,0977 D = 1,15
(0,3 . 0,7)	Tr = 0,127 s D = 0,175	Tr = 0,0982 D = 0,16
(0,4 . 0,6)	Tr = 0,127 s D = 0,175	Tr = 0,0306 D = 0,16
(0,5 . 0,5)	Tr = 0,127 s D = 0,175	Tr = 19,6 D = 0,15

**Commentaires :**

D'après les tableaux IV.4, IV.5, IV.6, On remarque que :

- La stabilité est garantie dans les deux cas (entier et fractionalisé).
- La commande PID fractionalisé nous à permis d'améliorer le temps de réponse (Tr) et de minimiser le dépassement (D).

### IV.7.3. Commande PI adaptatif Robuste d'ordre Fractionnaire

Soit la fonction du moteur à courant continu donné par la fonction IV.28 suivante [28, 141]:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{0.08}{s(0.05s+1)} \quad (\text{IV.28})$$

Les Sorties du MCC après l'application de la commande PI adaptative entier et fractionnée ( $\alpha=0.3$ ) avec bruit aléatoire à la sortie (amplitude 5% du signal de référence) sont donnés par la figure IV.12 avec les paramètres  $k_c = 5, \alpha_1 = 3000, \alpha_2 = 5000, \alpha=0.3$ :

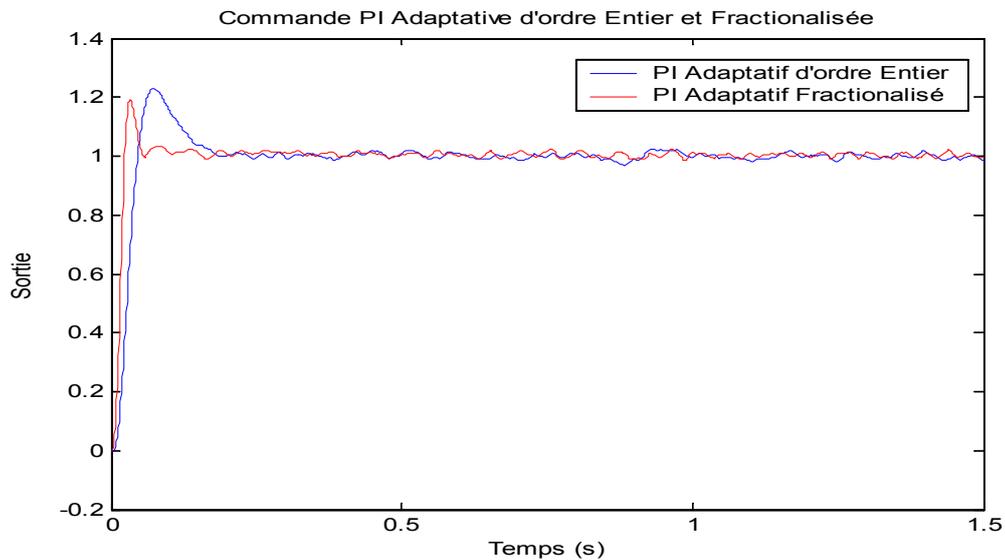


Figure IV.12. Sortie du MCC après l'application de la commande PI adaptative entier et fractionnée ( $\alpha=0.3$ ) avec bruit aléatoire à la sortie(amplitude 5% du signal de référence)

Les signaux de commande de PI adaptatif entier et fractionné sont donnés par la figure IV.13.

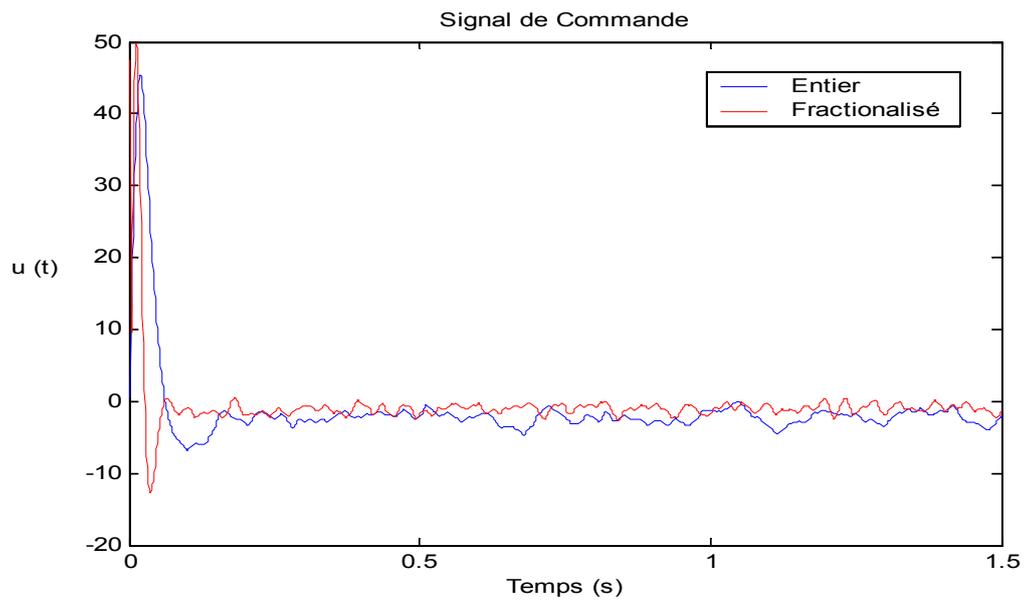


Figure .IV.13. Les signaux de commande d'un PI Adaptatif entier et fractionalisé ( $\alpha=0.3$ ).

Les figures IV.14 et IV.15 montrent l'évolution des paramètres  $k_1$  et  $k_2$ :

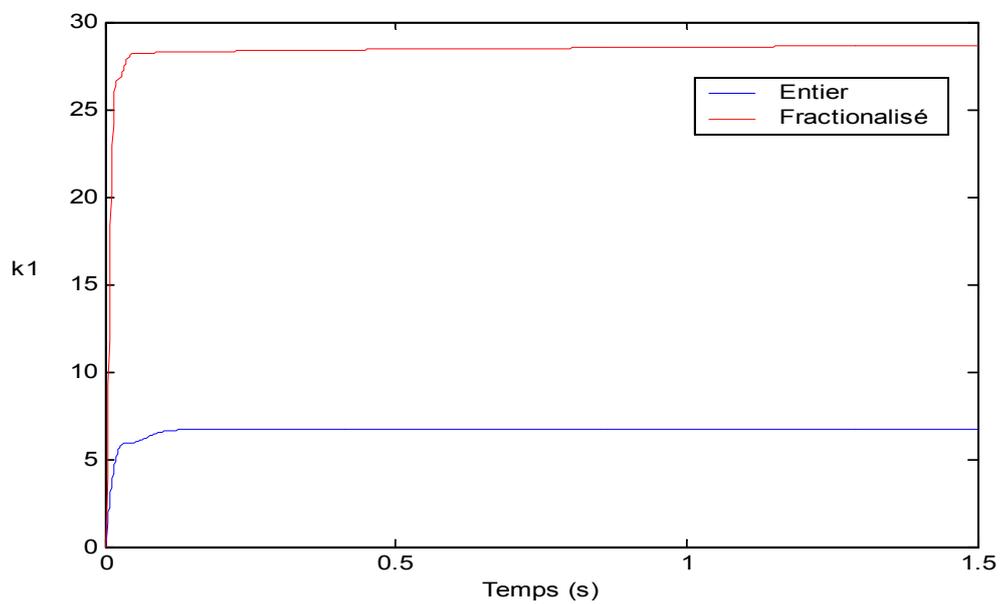


Figure .IV.14. Evolution de paramètre  $k_1$ .

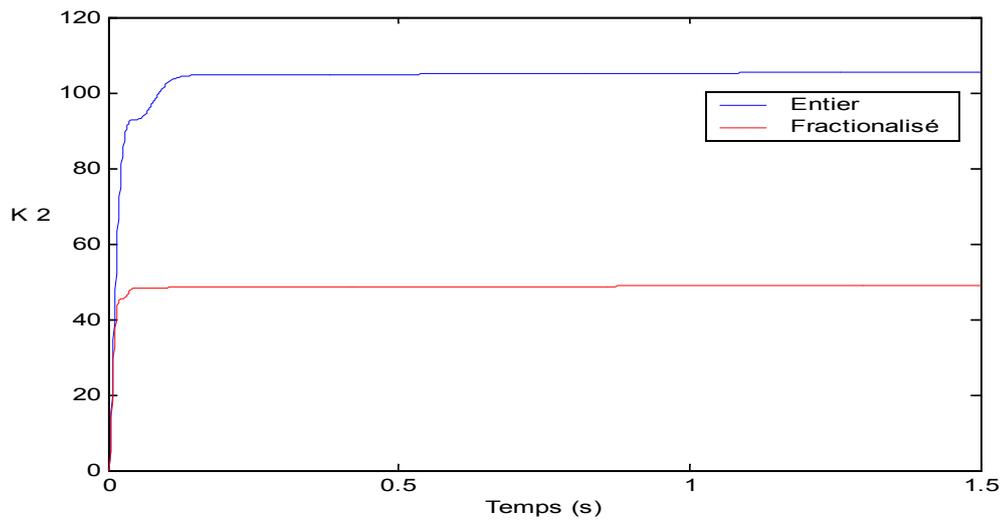
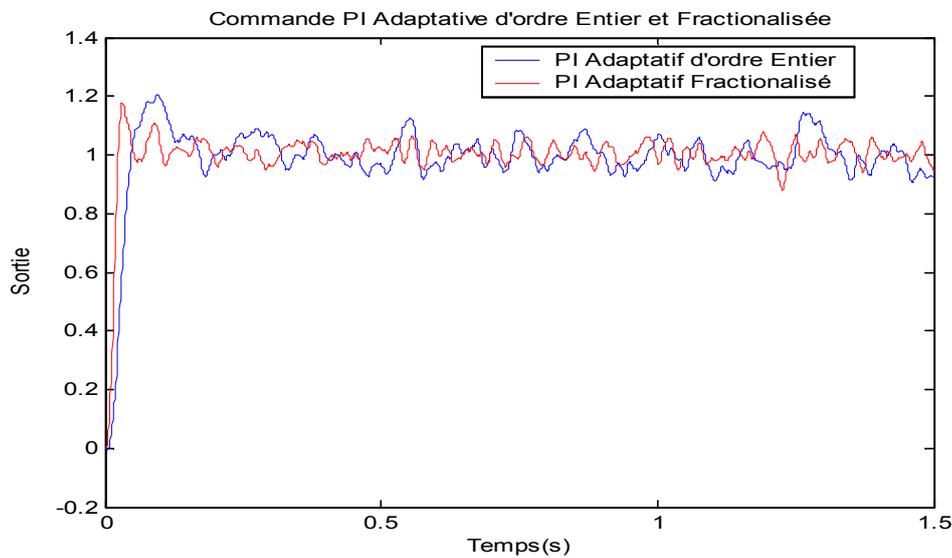


Figure .IV.15.Evolution de paramètre k2.

Les Sorties du MCC après l'application de la commande PI Adaptative entier et fractionalisée ( $\alpha=0.3$ ) avec bruit aléatoire à la sortie(amplitude 20% du signal de référence) sont donnés par la figure IV.16 avec les paramètres  $k_c = 5$ ,  $\alpha_1 = 3000$ ,  $\alpha_2 = 5000$ ,  $\alpha=0.3$ :

Figure IV.16. Sortie du MCC après l'application de la commande PI adaptative entier et fractionalisée ( $\alpha=0.3$ ) avec bruit aléatoire à la sortie(amplitude 5% du signal de référence)

Les signaux de commande de PI adaptatif entier et fractionalisé sont donnés par la figure IV.17.

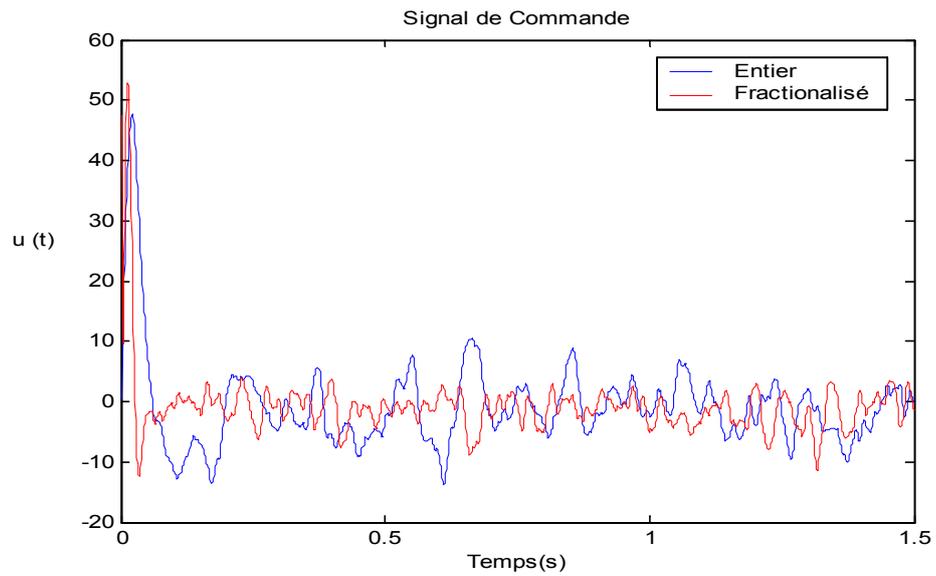


Figure .IV.17. Les signaux de commande de PI adaptatif entier et fractionalisé ( $\alpha=0.3$ ).

Les figures IV.18 et IV.19 montrent l'évolution des paramètres  $k_1$  et  $k_2$ :

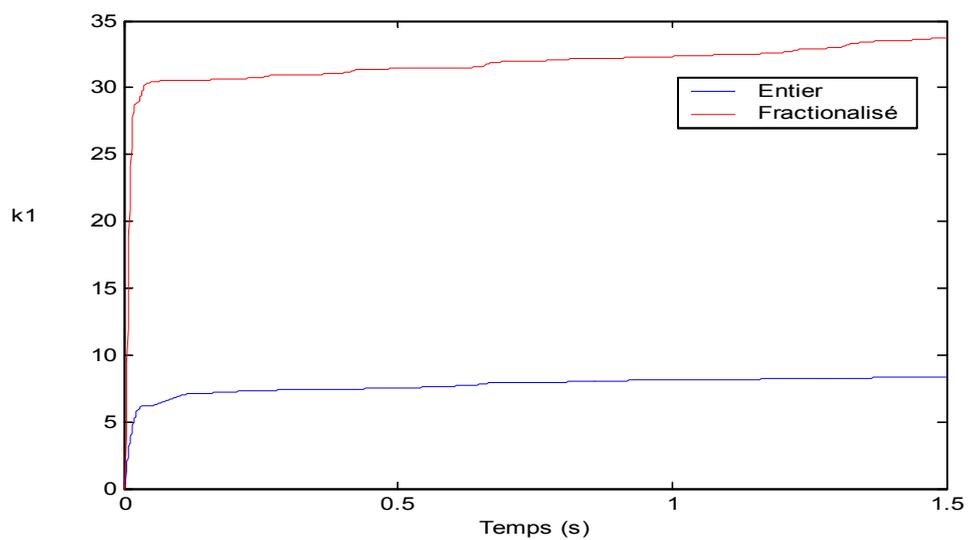


Figure .IV.18. Evolution de paramètre  $k_1$ .

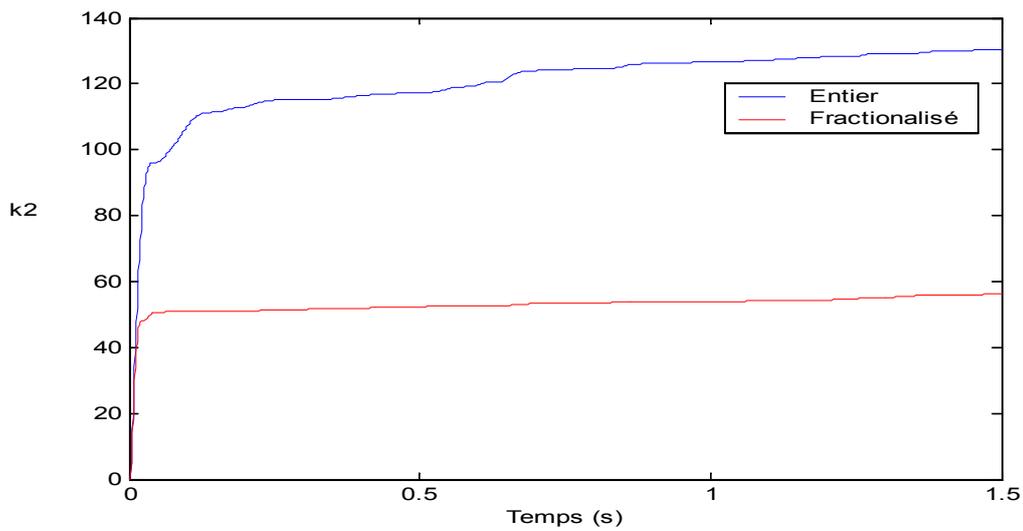


Figure .IV.19. Evolution de paramètre k2.

### IV.8. Analyse de Robustesse

L'évaluation de performance de système de commande est réalisé en utilisant le critère de l'erreur quadratique J suivant :

$$J = \int_{t_I}^{t_F} (u_r(t) - y(t))^2 dt$$

Le critère de l'erreur quadratique J en utilisant un bruit aléatoire de 5% et 20% de la sortie est donné par le tableau IV.7 et IV.8 respectivement :

Tableau IV.7. Le critère de l'erreur quadratique J avec un bruit aléatoire de 5% de la sortie

$\alpha$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1
J	0.07	0.06	0.058	0.083	0.062	0.262
d	0.196	0.195	0.194	0.196	0.195	0.22

Tableau IV.8. Le critère de l'erreur quadratique J avec un bruit aléatoire de 20 % de la sortie

$\alpha$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1
J	0.218	0.186	0.175	0.247	0.213	0.262
D	0.217	0.22	0.205	0.21	0.21	0.23

### **Commentaires :**

D'après les tableaux IV.7.et IV.8.on remarque :

- La diminution de dépassement dans le cas d'utilisation du contrôleur PI adaptatif fractionalisé par rapport au cas entier.
- Pour le cas  $\alpha=0.3$  on a obtenu le meilleur critère quadratique J et un dépassement minimal.
- Le critère d'erreur quadratique J est minimal dans le cas d'utilisation de contrôleur PI adaptatif fractionalisé, ce qui justifie l'amélioration de la robustesse.

### **IV.9. Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons présenté trois techniques de commandes (commande PI, Commande PID et commande PI adaptative) et dans chacune de ces technique nous avons fais une comparaison entre le cas entier et le cas fractionalisé.

D'après les résultats obtenus on constate que les régulateurs fractionalisés nous donnent les meilleures performances (rapidité et dépassement minimal et robustesse) par rapport au cas entier.

## Conclusion générale

Ce travail sur l'utilisation des filtres fractionnaires dans les systèmes de commande adaptatifs pour l'objectif d'améliorer le niveau de performance des systèmes de commande concernant la phase transitoire de la réponse, et d'obtenir une meilleure robustesse contre les bruits et les perturbations, a permis de valider quelques résultats qui existaient dans ce domaine mais son mérite est de faire plusieurs propositions sur des algorithmes adaptatifs améliorés par l'introduction des filtres d'ordre fractionnaire, et d'élargir cette théorie de commande naissante, en ouvrant de nouveaux horizons pour le développement de la commande adaptative.

Nous avons présenté plusieurs contributions relatives à la simulation, à la commande d'ordre entier et d'ordre fractionnaire des systèmes, ainsi qu'à la commande robuste d'ordre fractionnaire pour certains types de systèmes dynamiques.

- ✓ Notre première contribution concerne l'introduction d'un modèle de référence d'ordre fractionnaire dans le schéma de commande CAMR pour le but d'améliorer les performances des systèmes. Le principe consiste à approximer d'abord le modèle de référence fractionnaire en utilisant l'une des méthodes d'approximation (Oustaloup) et ensuite utiliser l'algorithme classique de la commande adaptative à modèle de référence. notre objectif a été de trouver une commande qui conduit le système à un objectif désiré (le signal de référence). Les résultats de simulation ont confirmé les avantages de la commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire tel que :
  - la réduction du retard qui est très grand dans le cas où le modèle de référence est d'ordre entier ainsi que le bon suivi de trajectoire de robot SCARA.
  - le bon suivi de la consigne, l'amélioration de la rapidité et de robustesse.
- ✓ Notre deuxième contribution concerne s'intègre dans la ligne des lois de commande polynomiale auto-ajustables et adaptatives. Les méthodes de synthèse par placement des pôles associées à la loi de commande polynomiale présentent actuellement une solution élégante pour de nombreuses applications. Bien que les régulateurs polynomiaux par placement des pôles soient très répandus, la plupart des applications qui leur font recours

considèrent des problèmes de régulation où la consigne ne varie pas dans le temps. Ce nouveau régulateur est appelé RST et permet d'obtenir à partir d'une synthèse par placement des pôles une structure généralisée, qui numériquement est plus robuste et plus maniable.

Dans notre travail nous avons appliqué la commande auto ajustable indirecte par placement de pôles à processus inconnus d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. Les résultats obtenus montrent que la commande adaptative d'ordre fractionnaire est meilleure par rapport à la commande adaptative d'ordre entier surtout concernant la rapidité et la précision.

- ✓ La troisième contribution présente la proposition d'une nouvelle approche, à savoir "La Fractionalisation", qui peut être utilisée dans les différentes techniques de commande existantes dans le but d'améliorer le niveau de performances des systèmes. nous avons présenté trois techniques de commandes (commande PI, Commande PID et commande PI adaptative) et dans chacune de ces techniques nous avons effectués une comparaison entre le cas entier et le cas fractionné.

D'après les résultats obtenus on constate que les régulateurs fractionnés nous donnent les meilleures performances (rapidité, dépassement minimal et robustesse) par rapport au cas entier.

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a permis de réaliser plusieurs publications, notamment :

- pour ce qui concerne de la commande adaptative à modèle de référence d'ordre fractionnaire un journal international [21], trois conférences internationales [24,27, 73].
- Concernant la commande par placement de pôles auto-ajustable d'ordre fractionnaire une publication dans une revue internationale de renommée [89] et deux conférences internationales [72, 88].
- Concernant la nouvelle approche qui est la Fractionalisation, une publication dans une revue indexée [28] et deux conférences internationales [26] et [87].
- Utilisation d'un filtre fractionnaire pour l'amélioration des performances d'un régulateur PID [23].
- Elimination du bruit dans une conduite d'aération en utilisant les filtres adaptatifs [22].
- Utilisation de l'approximation Sub-Optimal pour désigner le bon contrôleur PID, à une conférence internationale [25].
- Commandes Multi-modèles du Moteur a Courant Continu, à une conférence internationale [20].

## **Perspectives...**

Ce travail pourrait donner lieu à des études complémentaires dans les directions suivantes :

- Jusqu'à présent, nous avons considéré des systèmes bien modélisés, mais on sait qu'en pratique, les modèles sur lesquels on s'appuie sont incertains. La prise en charge de modèles incertains est un challenge important pour les futurs travaux.
- Généraliser les résultats obtenus au cas des systèmes multi-variables (MIMO).
- Etudier l'application des algorithmes de commande classique et moderne à des processus régis par des équations différentielles d'ordre fractionnaire.
- Développer de nouveaux schémas de commande adaptative robuste d'ordre fractionnaire.

## ANNEXE

### Modélisation du robot SCARA à 3ddl

#### Modèle dynamique :

Le but de cette annexe est de donner les matrices du modèle dynamique du robot SCARA à 3 ddl. Pour cela on rappelle le modèle dynamique Lagrangien

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

Les différentes matrices de ce modèle dynamique sont détaillées par le code Matlab suivant :

%---- matrice d'inertie -----

B=zeros(3);

B(1,1)=I1+I2+I3+(m3+0.25\*m1+m2)\*d1^2+(0.25\*m2+m3)\*d2^2+(2\*m3+m2)\*d1\*d2\*cos(q2);

B(1,2)=I2+I3+(0.25\*m2+m3)\*d2^2+(0.5\*m2+m3)\*d1\*d2\*cos(q2); %

B(1,3)=0; %

B(2,1)=B(1,2); %

B(2,2)=I2+I3+(0.25\*m2+m3)\*d2^2; %

B(2,3)=0; %

B(3,1)=B(1,3); %

B(3,2)=B(2,3); %

B(3,3)=m3;

%---- matrice de Coriolis -----

C=zeros(3); %

---

```
C(1,1)=-0.5*d1*d2*sin(q2)*(2*m3+m2)*q2p; %  
C(1,2)=-0.5*d1*d2*sin(q2)*(2*m3+m2)*(q1p+q2p); %  
C(1,3)=0; %  
C(2,1)=-0.5*d1*d2*sin(q2)*(2*m3+m2)*(q1p+q2p); %  
C(2,2)=-0.5*d1*d2*sin(q2)*(2*m3+m2)*q1p; %  
C(2,3)=0; %  
C(3,1)=0; %  
C(3,2)=0; %  
C(3,3)=0;  
%----- Vecteur de gravité -----  
G=zeros(3,1); %  
G(1)=0; %  
G(2)=0; %  
G(3)=m3*g;
```

## **Références Bibliographiques**

- [1] Abedini M., Nojournian M.A., Salarieh H., Meghdari A. “Model reference adaptive control in fractional order systems using discrete-time approximation methods,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, Vol. 25, pp. 27–40, 2015.
- [2] Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A. “Fractional adaptive control for an automatic voltage regulator,” *ISA Transactions*, Vol. 52, pp. 807-815, 2013.
- [3] Ahn H.-S., Bhambhani V., Chen Y.-Q. Fractional-order integral and derivative controller for temperature profile tracking. *Sadhana*. Vol. 34, No. 5, pp. 833–850, October 2009.
- [4] Al-Alaoui M.A. “Novel digital integrator and differentiator,” *Electronics Letters*, Vol. 29, No.4, pp. 376-378, 1993.
- [5] Alonge F., D’Ippolito F., Raimondi F.M., “An adaptive control law for robotic manipulator without velocity feedback,” *Control Engineering Practice*, Vol. 11, pp. 999–1005, 2003.
- [6] Amiri A., Gharib M., Moavenian M., Torabi K. “Modelling and control of a SCARA robot using quantitative feedback theory,” *J. Systems and Control Engineering*, 2009.
- [7] Anderson B. D. O. “Exponential convergence and persistent excitation,” in *Proc. 27st Conf. on Decision and Control*, Orlando, FL, pp. 12-17, Dec. 1982.
- [8] Aoun M., Malti R., Levron F., Oustaloup A. Numerical Simulations of Fractional Systems:An Overview of Existing Methods and Improvements. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 38, pp. 117–131, 2004.
- [9] Astrom K.J., Wittenmark B. “On self-tuning regulators,” *Automatica*, Vol. 9, pp. 185-199, 1973.

- [10] Astrom K. J. “Analysis of Rohrs counterexample to adaptive control,” in Proc. 22<sup>nd</sup> IEEE Conf. on Decision and Control, San Antonio, TX, pp. 982-987, Dec. 1983.
- [11] Åström K.J. “Adaptive Feedback Control”, Proceedings of The IEEE, Vol. 75, No. 2, pp. 185-217, February 1987.
- [12] Åström K.J., Wittenmark. B. “Adaptive control,” NewYork: Addison-Wesley publishing company, 1995.
- [13] Aurélien D. “Etude de systèmes différentiels fractionnaires,” Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy 1, 2010.
- [14] Axtell M., Bise M.E. “Fractional calculus applications in control systems,” the IEEE National Aerospace and Electronics Conference, New York, USA, pp. 563-566, 1990.
- [15] Bagley R.L., Torvik. P.J. “A theoretical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity,” Journal of Rheology, Vol. 27, pp. 201–210, 1983.
- [16] Bagley R.L., Torvik P.J. “On the appearance of the fractional derivatives in the behavior of real materials,” J. Applied Mechanics, Vol. 41, pp. 294–298, 1984.
- [17] Bagley R.L., Torvik P.J. “On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior,” Journal of Rheology, Vol. 30, pp. 133–155, 1986.
- [18] Barbosa, R.S., Machado, J.A.T., And Ferreira, I.M. “Tuning of PID Controllers Based on Bode’s Ideal Transfer Function”. Nonlinear Dynamics, Vol. 38, pp. 305–321, 2004.
- [19] BarKana I. Positive realness in discrete-time adaptive control systems. International Journal of Systems Science, Vol. 17, No. 7, pp. 1001-1006, 1986.
- [20] **Bensafia Y.**, Ladaci S., Khettab K. “Commande Multi-modèles du Moteur a Courant Continu ,” International Conference on Electronics and Oil, ICEO’2011, Ouragla, Algeria, March 2011.
- [21] **Bensafia Y.**, Ladaci S. “Adaptive control with fractional order reference model,” Int. J. of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering, IJ-STA, Vol. 5, No. 2, pp. 1614–1623, 2011.

- [22] **Bensafia Y.**, Ladaci S. “ Elimination du bruit dans une conduite d’aération en utilisant les filtres adaptatifs,” In: International Conference on Signal, Image, Vision and their Applications SIVA'11, November 21-24, 2011, Guelma, Algeria, 2011.
- [23] **Bensafia Y.**, Khettab K., Ladaci S. “Utilisation d’un filtre fractionnaire pour l’amélioration des performances d’un régulateur PID,” In: 3ème Conférence Nationale sur les Systèmes d’Ordre Fractionnaire et leurs Applications, SOFA 2012 Université 08 Mai 1945, Guelma, Algérie, 25-27 Novembre 2012.
- [24] **Bensafia Y.**, Khettab K. ;, Ladaci S. “Robustness test of the Fractional Adaptive Control,” 3ème Conférence Nationale sur les Systèmes d’Ordre Fractionnaire et leurs Applications, SOFA 2012, Université 08 Mai 1945, Guelma, Algérie, 25-27 Novembre 2012.
- [25] **Bensafia Y.**, Ladaci S., Khettab K. “Using the Sub-optimal Approximation of Fractional Order Transfer Functions to Design Suitable PID,” Controllers In: 13th International conference on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering, STA'2012, 784-791, Monastir, Tunisia, December 17–19, 2012.
- [26] **Bensafia Y.**, Ladaci S., Khettab K. “Performance Analysis of Fractionalized Order PID Controller with the Conventional PID Controller,” International Conference on Control, Engineering & Information Technology, CEIT'14 22-25 March 2014, Sousse, Tunisia, 2014.
- [27] **Bensafia Y.**, Khettab K., Ladaci S. “Using the Fractional Model Reference for Tracking Trajectory in Adaptive Control,” In: 2nd International Conference on Networking and Advanced Systems, ICNAS 2015, Annaba, Algeria, May 6-7, 2015.
- [28] **Bensafia Y.**, Ladaci S., Khettab K. “Using a Fractionalized Integrator for Control Performance Enhancement”, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, IJICIC, Vol. 11, No. 6, pp. 2013–2028, December 2015.
- [29] Bensouici. T., Charef. A. “Design of fractional order digital FIR integrator and differentiator,” 1<sup>ère</sup> Conférence Internationale en Génie Electrique, CIGET'09, Tébessa, Algérie, 25-26 Octobre, 2009.

- [30] Bensouici T. “Implémentation Numérique du Retard d’ordre Fractionnaire,” Thèse de Doctorat en sciences, Université Mentouri de Constantine, 2012.
- [31] Bertrand N., Sabatier J., Briat O., Vinassa J.M. “Fractional non-linear modelling of ultracapacitors,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, Vol. 15, No. 5, pp. 1327-1337, 2010.
- [32] Bettou K., Charef. A. “Control quality enhancement using fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller”, *International Journal of Systems Science*, Vol. 40, No. 8, pp. 875–888, August 2009.
- [33] Bettou K., Charef. A. “Improvement Of Control Performances Using Fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  Controllers”, 5th International Symposium on Hydrocarbons & Chemistry (ISHC5), Sidi Fredj, Algiers, May 23-25, 2010.
- [34] Bettou K., Charef. A. “Tuning of Fractional Order  $PI^{\alpha}$ -PD Controller using Particle Swarm Optimization Algorithm.” *Proceedings of the 3rd International Conference on Systems and Control*, Algiers, Algeria, October 29-31, 2013.
- [35] Buller S., Karden E., Kok D., Doncker R.W. “Modeling the dynamic behavior of supercapacitors using impedance spectroscopy,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 38, No. 6, November/December 2002.
- [36] Calderon A.J., Vinagre B.M., Feliu V. “Fractional order control strategies for power electronic buck converters”, *Signal Processing*, Vol. 86, pp. 2803-2819, 2006.
- [37] Cao H., Deng Z., Li X., Yang J., Qin Y. “Dynamic modeling of electrical characteristics of solid oxide fuel cells using fractional derivatives, *International Journal of Hydrogen Energy*, Vol. 35, No. 4, pp. 1749-1758, February 2010.
- [38] Caponetto R., Dongola G., Fortuna L., Petráš I. “Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications,” *World scientific series on nonlinear science, Series A*. World scientific, Singapore, 2010.
- [39] Caponetto R., Dongola G., Fortuna L., Petráš I. “A Fractional Model for IPMC Actuators,” *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings*, IMTC 2008, pp. 2103-2107, 12-15 May 2008.

- [40] Charef A., Sun. H.H., Tsao .Y.Y., Onaral. B. “Fractal system as represented by singularity function,” IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. 37, No. 9, pp.1465-1470, 1992.
- [41] Charef A., “Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation”, Nonlinear Dynamics, Vol. 46, pp. 195-210, 2006.
- [42] Charef A. “Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller,” IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 153, pp. 714-720, 2006.
- [43] Charef A., Assabaa M., Ladaci S., Loiseau, J.J. “Fractional order adaptive controller for stabilised systems via high-gain feedback,” IET Control Theory and Applications, Vol. 7, No. 6, pp. 822-828, 2013.
- [44] Chen Y.-Q, Petrás I., Xue D., “Fractional order control - a tutorial,” IEEE American Contr. Conf., St-Louis, USA, 2009.
- [45] Chien C.J., Sun K.C., Wu A.C., Fi L.C., “A robust MRAC using variable structure design for multivariable plants,” Automatica; Vol. 32, No. 6, pp. 833–848, 1996.
- [46] Colbaugh R., Glass K., Seraji H., “Adaptive tracking control of manipulators: Theory and experiments,” Robotics & Computer-Integrated Manufacturing; pp 209–216, 1996.
- [47] Copot C., Muresan C., Ionescu C.M., De Keyser R. “ Fractional Order Control of a DC Motor with Load Changes” 14th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment OPTIM 2010, Brasov, Romania May 22-24, 2014.
- [48] Cortesào R. “Model reference adaptive control for robotic manipulation with Kalman active observers,” Genetic Algorithms and Evolution Strategies in Engineering and Computer Science, Croatia, pp.145–164, 2009.
- [49] Craiem D.O., Armentano R.L. “Arterial viscoelasticity: a fractional derivative model,” 28th Annual International Conference of the IEEE on Engineering in Medicine and Biology Society, EMBS '06, pp. 1098-1101, September 3, 2006.

- [50] Delavari H., Ghaderi R., Ranjbar N. A., HosseinNia S.H., Momani S. “Adaptive Fractional PID Controller for Robot Manipulator”. Proceedings of FDA’10. The 4<sup>th</sup> IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications. Badajoz, Spain, October 18-20, 2010.
- [51] Dingyü X., Yang Q.C. “Sub-optimum  $h_2$  Rational Approximations to Fractional Order Linear Systems,” International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE), Long Beach, California USA, September 24-28, 2005.
- [52] Djouambi A., Charef A. Voda B.A. “Fractional Order Robust Control Based on Bodes Ideal Transfer Function,” RS-JESA, Vol. 42, Fractional order systems, pp. 999-1014, 2008.
- [53] Dubois F., Galucio A.C. Point N. “Introduction à la dérivation fractionnaire, théorie et applications,” Techniques de l’Ingénieur AF510, 2010.
- [54] Dugowson S. “Les Différentielles Métaphysiques : Histoire et Philosophie de la Généralisation de l’Ordre de Dérivation,” Thèse de Doctorat, Université de Paris XIII, Villetaneuse, France, 1994.
- [55] Fan J.-C., Kobayashi T. “A Simple Adaptive PI Controller for Linear Systems with Constant Disturbances,” IEEE transactions on automatic control, Vol. 43, No. 5, pp. 733-736, may 1998.
- [56] Faucher J., Khaorapapong T., Kabbaj H. “Comparison of four fractional power order transfer function models of rotor bar,” Fifth International Conference on Electrical Machines and Systems, ICEMS 2001, Vol. 1, pp. 448-451, Shenyang, 18-20 August 2001.
- [57] Faucher J., Khaorapapong T., Kabbaj H. “Parametric identification of fractional transfer function models of induction motor rotor bar,” IEEE SDEMPED Conference, International Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives, pp. 299-303, Grado Italy, 1-3 September 2001.
- [58] Ferdi Y. “Computation of Fractional Order Derivative and Integral via Power Series Expansion and Signal Modelling”. Nonlinear Dynamics, Vol. 46, pp. 1–15, 2006.

- [59] Fergani N., Charef A. Process step response based fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller parameters tuning for desired closed loop response. *International Journal of Systems Science*, 2014.
- [60] Gorenflo R., Mainardi F. “ Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order, Fractals and Fractional Calculus ,” in *Continuum Mechanics*, Springer Verlag, pp. 223 – 276, Wien and New York, 1997.
- [61] Hamdaoui K. Charef A. “A New Discretization Method for Fractional Order Differentiators via Bilinear Transformation,” 15th Int. Conference on Digital Signal Processing, Cardiff, UK, July 1-4, pp. 280-283, 2007.
- [62] He Y., Gong R. “Application of fractional order MRAC on industry Boiler Burning System”. *Int. Conf. Intelligent Computation Technology and Automation*. Pp. 750-753, 2010.
- [63] Hélie T., Matignon D. “Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses,” *Math. Mod. and Meth. in Appl. Sc.*, pp. 503–536, 2006.
- [64] Hilfer R. “Applications of Fractional Calculus in Physics,” World Scientific, 2000.
- [65] Hotzel R. “Contribution à Théorie Structurelle et à la commande des Systèmes Linéaires Fractionnaires. Thèse de Doctorat, Université de PARIS XI, Orsay, France, 1998.
- [66] Houmor T. “Analyse du Chaos dans un Système d’Équations Différentielles Fractionnaires,” Thèse Doctorat en sciences, Université Mentouri de Constantine, 2014.
- [67] Ioannou P. A., Kokotovic P. V. ”Robust redesign of adaptive control,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-29, pp. 202-211, 1984.
- [68] Iwai Z., Mizumoto I. “Realization of simple adaptive control by using parallel feedforward compensator”, *Int. J. Control*, Vol. 59, No. 6. pp. 1543-1565, 1994.
- [69] [52] Jun W., Zhengming Z., Xiaoying S. “Comparisons of electric machines used for the electro-mechanical actuation systems in all-electric airplane,” *Sixth International Conference on Electrical Machines and Systems, ICEMS 2003*, Vol. 2, pp. 665-668, 9-11 Novembre 2003.

- [70] Kalman R.E. "Design of a self-optimizing control system," Trans. ASME, Vol. 80, pp. 468-478, 1958.
- [71] Kaneko T., Shimada M., Kujiraoka S., Kojima T., "Easy Maintenance and Environmentally-friendly Train Traction System," Hitachi Review, Vol. 53, No. 1, pp.15-19, 2004.
- [72] Khettab K., Ladaci S., Boukhalfa A., **Bensafia Y.** "Commande adaptative fractionnaire de type auto-ajustable directe," 3ème Conférence Nationale sur les Systèmes d'Ordre Fractionnaire et leurs Applications, SOFA 2012 Université 08 Mai 1945, Guelma, Algérie, 25-27 Novembre 2012.
- [73] Khettab K., Ladaci S., **Bensafia Y.**, Boukhalfa A. "Control Improvement of the Direct Current Motor: Adaptive Approach with Integer/Fractional Reference Model Comparison," International Conference on Fractional Differentiation and its Applications, ICFDA'2014, Catania, Italy, June 23-25, 2014.
- [74] Khettab K., **Bensafia Y.**, Ladaci S. "Robust Adaptive Fuzzy control for a Class of Uncertain nonlinear Fractional Systems," Second International Conference on Electrical Engineering And Control Applications, ICEECA'14, Constantine, Algeria, November 18-20, 2014.
- [75] Koolen J.L.A. "Design of Simple and Robust Process Plants". Wiley-VCH, New York, 2002.
- [76] Kreisselmeier C., Narendra K. S. "Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbances," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-27, pp. 1169-1175, 1982.
- [77] Kuhn E. "Contribution à la conception optimale d'une motorisation hybride parallèle: Choix d'un modèle d'accumulateur," Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2004.
- [78] Kulish V.V., Chan W.K. "Fractional Model of Market Behavior: a New Modeling Approach," International Conference on Cyberworlds, pp. 289-296, 23-25 November 2005.

- [79] Ladaci S., Charef A. “Commande adaptative à modèle de référence d’ordre fractionnaire d’un bras de robot,” *Revue Communication Sciences & Technologie*, pp. 50–52, 2002
- [80] Ladaci S., Charef A. “On Fractional Adaptive Control,” *Nonlinear Dynamics*, Vol. 43, No. 4, pp. 365-378, 2006.
- [81] Ladaci S., Charef A. “An Adaptive Fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  Controller” in *Proceedings Sixth International Symposium on Tools and Methods of Competitive Engineering, TMCE 2006*. Edited by I. Horvath and J. Duhovnik, Ljubljana, Slovenia, pp. 1533-1540, Avril 18-22, 2006.
- [82] Ladaci S. “Contribution a la Commande Adaptative d'Ordre Fractionnaire,” *Thèse de Doctorat, Département d'Electronique, Université Mentouri de Constantine*, 2007.
- [83] Ladaci S., Loiseau J.J., Charef A. “Fractional order adaptive high-gain controllers for a class of linear systems,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, Vol. 13, No. 4, pp. 707-714, 2008.
- [84] Ladaci S., Charef A., Loiseau. J.J., “Robust fractional adaptive control based on the strictly positive realness condition,” *Int. J. of Applied Mathematics and Computer Science*; Vol. 19, No. 1, pp. 69-76, 2009.
- [85] Ladaci S., Loiseau J.J., Charef A. “Adaptive Internal Model Control with Fractional Order Parameter,” *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*; Vol. 24, pp. 944–960, 2010.
- [86] Ladaci S., Charef A. “Fractional order adaptive control systems: A survey,” In: E. W. Mitchell, S. R. Murray (Ed.), *Classification and Application of Fractals*. Nova Science Publishers, USA, pp. 261-275, October 2012.
- [87] Ladaci S., **Bensafia Y.** “Fractionalization: A new tool for robust adaptive control of noisy plants,” *6th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications, FDA’13, Grenoble, France*, pp. 379-384, February 4-6, 2013.

- [88] Ladaci S., **Bensafia Y.** “Fractional order Self-Tuning Control,” IEEE 13th International Conference on Industrial Informatics, INDIN’15, pp. 544-549, Cambridge, United Kingdom, 22-24 July 2015.
- [89] Ladaci S., Bensafia Y. “Indirect fractional order pole assignment based adaptive control”, Engineering Science and Technology, an International Journal, Elsevier, [DOI: 10.1016/j.jestch.2015.09.004], 2015.
- [90] Lanusse P., Oustaloup A., Sutter D. “Multi-scalar CRONE control of multivariable plants,” Wsc’96-Isiac, Montpellier, France, 1996.
- [91] Lee B.S., Gushee D.E. “Massive Electricity Storage Makes Sense,” Chemical Engineering Progress, February 2010.
- [92] Lin M., Srivastava A.K., Schulz N.N. “A Generic Digital Model of Multiphase Synchronous Generator for Shipboard Power System,” IEEE Electric Ship Technologies Symposium, ESTS 2007, pp. 348-355, Arlington, Virginia, 21-23 May 2007.
- [93] Loiseau J.J., Mounier H. « Stabilisation de l'équation de la chaleur commandée en flux ». ESAIM : Proc., pp. 131-144, 1998.
- [94] Makoudi M., Radouane L. “A robust model reference adaptive control for non-minimum phase systems with unknown or time-varying delay. Automatica; Vol. 36, pp. 1057–1065, 2000.
- [95] Martinez R., Bolea Y., Grau A., Martinez H. “Fractional DC/DC converter in solar-powered electrical generation systems,” IEEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation, ETFA 2009, pp. 1-6, 22-25 September 2009.
- [96] Masoumeh N., Balochian S. “Robust Stabilization of Fractional-Order Uncertain Systems with Multiple Delays in State,” Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 2014.
- [97] Matsuda K., Fuji H. “H1 optimized wave-absorbing control: analytical and experimental results,” J. Guidance, Contr. & Dynamics, Vol. 16, pp. 1146–1153, 1993.
- [98] Mbodje B., Montseny G. “Boundary fractional derivative control of the wave equation,” IEEE Trans. Aut. Contr., Vol. 40, pp. 378–382, 1995.

- [99] Miller K.S., Ross B. “An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,” John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [100] Monje A., Chen Y.-Q. “Fractional-order Systems and Controls, Fundamentals and Applications”, pp. 193-194, Springer, 2010.
- [101] Moradi M. “A genetic-multivariable fractional order PID control to multi-input multi-output processes”. *Journal of Process Control*, Vol. 24, pp. 336–343, 2014.
- [102] Mrani N. “Contribution à l’étude des Systèmes Fractionnaires : Théorie et Applications,” Thèse de Doctorat, Ecole Mohammadia d’Ingénieurs, Rabat, Maroc, 2004.
- [103] N’Doye I. “Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires,” Thèse de Doctorat, l’Université Henri Poincaré- Nancy 1 et de l’Université Hassan II AÏN Chock – Casablanca, février 2011.
- [104] N’Doye I., Zasadzinski M., Radhy N.E., Bouaziz A. “Robust Controller Design for Linear Fractional-Order Systems with Nonlinear Time-Varying Model Uncertainties,” 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED’09, pp. 821-826, Thessaloniki, 24-26 June 2009.
- [105] Neçaibia A., Ladaci S. “Self-tuning fractional order  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller based on extremum seeking approach,” *Int. J. Automation and Control*, Vol. 8, No. 2, pp. 99-121, [doi:10.1504/IJAAC.2014.063361], 2014.
- [106] Neçaibia A., Ladaci S., Charef A., Loiseau J.J. “Fractional order extremum seeking control” 22nd Mediterranean Conference on Control and Automation, MED’14, Palermo, Italy, p.459-462, June 16–19, 2014.
- [107] Neçaibia A., Ladaci S., Charef A., Loiseau J.J. “Fractional order extremum seeking approach for maximum power point tracking of photovoltaic panels. *Front. Energy*, Vol. 9, No. 1, pp. 43-53, 2015.
- [108] Ogata K. “Discrete-time control systems,” Prentice Hall, Englewood, Cliffs, USA, 1987.

- [109] Oldham K.B., Spanier J. “the Fractional Calculus,” Academic Press, New York, 1974.
- [110] Ortigueira M.D., Matos C., Piedade M.S. “Fractional Discrete-Time Signal Processing: Scale Conversion and Linear Prediction,” *Nonlinear Dynamics*, Vol. 29, pp. 173–190, 2002.
- [111] Oustaloup A. “La Commande CRONE,” Hermès science publications, Paris, 1991.
- [112] Oustaloup A. “La Dérivation Non Entière,” Hermès, Paris, 1995.
- [113] Oustaloup A., Moreau X., Nouillant M. “The CRONE suspension,” *Control Eng. Practice*, Vol. 4, No. 8, pp. 1101–1108, 1996.
- [114] Oustaloup A., Mathieu B., Lanusse P. “The CRONE control of resonant plants: application to a flexible transmission,” *European J. Contr.*, Vol. 1, pp. 113–121, 1995.
- [115] Pagilla P.R., Tomizuka. M. “An adaptive output feedback controller for robot arms: stability and experiments. *Automatica*; Vol. 37, pp. 983–995, 2001.
- [116] Peterson B.B., Narendra K.S. “Bounded error adaptive control,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-27, pp. 1161-1168, 1982.
- [117] Petras I., Podlubny I., O’Leary P., Dorcak L., Vinagre B.M. “ Analogue Realization of Fractional Order Controllers,” *Fakulta Berg , TU Kosice*, 2002.
- [118] Pfitzenreiter T. “A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations,” *Z. Angew. Math. Mech.* Vol. 84, No. 4, pp. 284–287, 2004.
- [119] Podlubny I. “Fractional Differential Equations,” Academic Press, New York, 1999.
- [120] Podlubny I. “Fractional-order system and fractional-order controllers. Technical report uef-03-94 Institut of Experimental Physics, Academy of Sciences, Slovakia, 1994.
- [121] Podlubny I. “Fractional Order Systems and  $PI^\lambda D^\mu$  Controllers,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 1, pp. 208-214, 1999.
- [122] Racewicz S. “Modélisation des machines synchrones par des systèmes d’ordre un demi,” *Stage Master 2 Recherche à l’INP de Grenoble*, 2005.

- [123] Racewicz S., Riu D., Retière N., Chrzan P.J. “Non linear half-order modeling of synchronous machine,” IEMDC 2009, pp. 778-783, Miami, Florida, 3-6 May 2009.
- [124] Retière N.M., Ivanès M.S. “An introduction to electric machine modeling by systems of non integer order. Application to double-cage induction machine,” IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, No. 4, pp. 1026-1032, December 1999.
- [125] Retière N.M., Ivanès M.S. “Modeling of electric machines by implicit derivative half-order systems,” IEEE Power Engineering Review, pp. 62–64, September 1998.
- [126] Riu D. “Modélisation des courants induits dans les machines électriques par des systèmes d’ordre un demi,” Thèse de Doctorat de l’INPG, Décembre 2001.
- [127] Riu D., Retière N.M. “Modélisation des machines électriques par des systèmes d’ordre un demi,” Revue internationale de Génie Electrique, Vol. 3, No. 4, 2000.
- [128] Riu D., Retière N.M., Ivanès M.S. “Electric machine modelling by half order systems,” ICEM 2000, pp. 1646-1650, Espoo, Finlande, 28-30 August 2000.
- [129] Riu D., Retière N.M., Ivanès M.S. “Induced currents modeling by half-order systems application to hydro- and turbo-alternators,” IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 18, pp. 94-99, March 2003.
- [130] Riu D., Retière N.M., Ivanès M.S. “Turbine generator modeling by non-integer order systems,” IEMDC 2001, pp. 185-187, Cambridge, Massachusetts, 17-20 June, 2001.
- [131] Riu D., Retière N.M., Linzen D. “Half-order modelling of supercapacitors,” IEEE industry applications conference: 39th IAS annual meeting, pp. 2550-2554, Seattle, 3-7 October 2004.
- [132] Rohrs C., Valavani L., Athans M., Stein C. “Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics”, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-30, No. 9, pp. 881-889, 1985.
- [133] Ross B. “Fractional Calculus and its Applications,” Vol. 457 of Lecture Notes in Mathematics, chapter A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional calculus,” pp. 1-36. Springer-Verlag, New York, 1975.

- [134] Rossi C., Casadei D., Pilati A., Marano M. “Wound Rotor Salient Pole Synchronous Machine Drive for Electric Traction,” Conference Record of the 2006 IEEE Industry Applications Conference, 41st IAS Annual Meeting, Vol. 3, pp. 1235-1241, Tampa, Florida, 8-12 October 2006.
- [135] Sabatier J., Agrawal O.P., Tenreiro Machado J.A. “Advances in fractional calculus,” Springer, 2007.
- [136] Schmidt V.H., Drumheller J.E. “Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate,” Physical Review B, Vol. 4, pp. 4582–4597, 1971.
- [137] Shi B., Yuan J., Dong C. “On Fractional Model Reference Adaptive Control,” The Scientific World Journal; Article ID 521625:18, 2014.
- [138] Sanchez E. “Adaptive control robustness in flexible aircraft, 1986,” Application. American Control Conference, pp. 494-496, Juin, 1986.
- [139] Racewicz S. “Identification et modélisation d'ordre fractionnaire des machines synchrones fonctionnant comme générateur,” Thèse Doctorat, Université de Grenoble et de Université Technologique de Gdansk, 2010.
- [140] Tabatabaei M. "Design of a fractional order adaptive controller for velocity control of a permanent magnet synchronous motor", COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, Vol. 34, No. 4. 2015.
- [141] Tajbakhsh H., Balochian S. “Robust Fractional Order PID Control of a DC Motor with Parameter Uncertainty Structure,” International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology, Vol. 1, No. 6, August 2014.
- [142] Tosunoglu S., Tesar D. “State of the art in adaptive control of robotic systems,” IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems; Vol. 24, No. 5, pp. 552–561, 1988.
- [143] Tsakalis K.S., Ioannou P.A. “Adaptive Control of Linear Time-Varying Plants: A New Model Reference Controller Structure”. IEEE Transactions On Automatic Control. Vol. 34. No. 10. 1989.

- [144] Tung P.C., Wang S.R., Hong F.Y. “Application of MRAC theory for adaptive control of a constrained robot manipulator,” *Int. J. of Machine Tools & Manufacture*; Vol. 40, pp. 2083-2097, 2000.
- [145] Urbain M., Rael S., Davat B., Desprez P., “Energetical Modelling of Lithium-Ion Battery Discharge and Relaxation,” *IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC 2008*, pp. 3628-3634, Rhodes, 15-19 June 2008.
- [146] Van Amerongen J., Ten Cate A.U. “Model reference adaptive controller for ships,” *Automatica*, Vol. 11, pp. 441-449, 1975.
- [147] Van Der Ziel A. “On the noise spectra of semiconductor noise and of flicker effects.” *Physica*, Vol.16, pp. 359-372, 1950.
- [148] Vinagre B.M., Chen Y.-Q, Petráš I. “Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator,” *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 340, pp. 349-362, 2003.
- [149] Vinagre B.M., Petras I., Podlubny I., Chen Y.-Q. “Using fractional-order adjustment rules and fractional order reference models in model reference adaptive control,” *Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems, Nonlinear Dynamics*, Vol. 29, pp. 269-279, 2002.
- [150] Wei Y., Sun Z., Hu Y., Wang Y. “On fractional order composite model reference adaptive control,” *Int. J. of Systems Science*, 2015.
- [151] Xue D., Atherton D.P. “A suboptimal reduction algorithm for linear systems with a time delay”. *International Journal of Control*, Vol. 60, No. 2, pp. 181–196, 1994.
- [152] Yanling Y. “Model free adaptive control for robotic manipulator trajectory tracking,” *The Open Automation and Control Systems Journal*, Vol. 7, pp. 358–365, 2015.
- [153] Yu W., Luo Y., Pi Y. “Fractional order modeling and control for permanent magnet synchronous motor velocity servo system”. *Mechatronics*, Vol. 23, pp. 813–820, 2013.

**ملخص** - هذا العمل الذي يكمن في استخدام المرشحات الجزئية في أنظمة التحكم المتكيف بهدف تحسين مستوى أداء أنظمة التحكم في المرحلة الانتقالية للاستجابة، والحصول على أفضل قوة ضد الضوضاء والاضطرابات. والذي سمحنا بتحقيق بعض النتائج التي كانت موجودة في هذا المجال ولكن مضمونها هو جعل عدة مقترحات على خوارزميات متكيفة ومحسنة من خلال إدخال نظام المرشحات الجزئية، وتوسيع هذه النظرية الوليدة، وفتح آفاق جديدة لتطوير التحكم المتكيف. قدمنا عدة مساهمات تتعلق بالمحاكاة، أنظمة التحكم الصحيحة وأنظمة التحكم الجزئي بأكملها، فضلا عن التحكم المتكيف القوي الجزئي لأنواع معينة من الأنظمة الديناميكية. تتعلق مساهمتنا الأولى في التحكم المتكيف في النموذج المرجعي (MRAC) الجزئي مع نتائج جيدة لاستمرار مسار الروبوت SCARA. مساهمتنا الثانية تتعلق بقوانين التحكم متعدد الحدود المتكيفة المعدل ذاتيا. كما نقدم خوارزميات بسيطة من أجل وضع الأقطاب الجزئية في الوقت الحقيقي في حلقة التحكم. أما النتيجة الثالثة نبيّن النهج الجديد المقترح، وهو "التشقق أو التجزؤ" لتحل محل الاستبدال المنطقي في حلقة التحكم بسلسلة من نفس الاستبدال مع قوى جزئية ذات جمع صحيح. ويمكن استخدامه في مختلف تقنيات التحكم القائمة من أجل تحسين مستوى أداء الأنظمة.

**الكلمات المفتاحية** - الحساب الجزئي، نظام التحكم الجزئي، التحكم المتكيف بنموذج مرجعي، التحكم المتكيف غير المباشر، تبديل الأقطاب الجزئي، التجزؤ (fractionalization).

**Abstract** - This work studies the introduction of fractional order filters in the adaptive control loops in order to improve the robustness and performance of the process. Many adaptive concepts are considered, and new control algorithms are proposed using fractional order operators (differentiator, integrator) as well as fractional order transfer functions. We have validated some existing results but the merit of this work is to propose several new adaptive controls schemes that are able to improve the robustness and time behavior of the systems. These proposed techniques concern mainly:

- Model reference adaptive control (MRAC) with fractional order reference model, with interesting results for the trajectory following of a SCARA robot.
- Indirect self-tuning control based on fractional order pole placement algorithm.
- "Fractionalization" which is a new concept and a tool for improvement of control system robustness against noise and disturbances, consisting in replacing the integer transfers by a succession of fractional order transfer functions.

Illustrative simulation examples have shown the superiority of the proposed control schemes in terms of robustness and behavior of the controlled plants.

**Keywords** - Fractional calculus, fractional order control system, model reference adaptive control, indirect adaptive control, fractional order pole placement, fractionalization.

**Résumé** - Ce travail traite l'utilisation des filtres fractionnaires dans les systèmes adaptatifs de commande dont l'objectif est d'améliorer le niveau de performance des systèmes de commande concernant la phase transitoire de la réponse, et d'obtenir une meilleure robustesse contre les bruits et les perturbations. Il a permis de valider quelques résultats qui existaient dans ce domaine mais son mérite est de faire plusieurs propositions sur des algorithmes adaptatifs améliorés par l'introduction des filtres d'ordre fractionnaire, et d'élargir cette théorie de commande naissante, en ouvrant de nouveaux horizons pour le développement de la commande adaptative. Nous avons présenté plusieurs contributions relatives à la simulation, à la commande d'ordre entier et d'ordre fractionnaire des systèmes, ainsi qu'à la commande adaptative robuste d'ordre fractionnaire pour certains types de systèmes dynamiques. Notre première contribution concerne la commande adaptative à modèle de référence (CAMR) d'ordre fractionnaire avec des résultats intéressants pour la poursuite de trajectoire de robot SCARA. Notre deuxième contribution concerne les lois de commande polynomiale auto-ajustables et adaptatives. Nous proposons des algorithmes simples pour le placement de pôles d'ordre fractionnaire en temps réel dans la boucle de commande. Le troisième résultat présente la proposition d'une nouvelle approche, à savoir "La Fractionalisation", consistant à remplacer le transfert rationnel dans la boucle de commande par une succession du même transfert avec des puissances d'ordre fractionnaire dont la somme est entière. Elle peut être utilisée dans les différentes techniques de commande existantes dans le but d'améliorer le niveau de performances des systèmes.

**Mots Clés** - Calcul fractionnaire, système de commande d'ordre fractionnaire, commande adaptative à modèle de référence, commande adaptative indirecte, placement de pôles fractionnaires, fractionalisation.