

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

UNIVERSITÉ DU 20 AOÛT 1955 SKIKDA  
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE



**Thèse**

*Présentée pour obtenir le diplôme de*

***Doctorat en Science***

*Spécialité : Traitement de signal*

Par :

**M<sup>me</sup> Karima RABAH**

Thème

Contribution à la Modélisation et la Commande des Systèmes Chaotiques  
d'Ordre Fractionnaire

Soutenue le 22/03/ 2018.

Devant le jury :

Président :	Mr <b>Lachouri Abderrazak</b>	Professeur,	Université de Skikda
Rapporteur :	Mr <b>Ladaci Samir</b>	Professeur,	ENP Constantine
Co-Rapporteur:	Mr <b>Lashab Mohamed</b>	Professeur,	Université d'Oum El bouaghi
Examineur :	Mr <b>Djennoune Said</b>	Professeur,	Université de Tizi ouzou
Examineur :	Mr <b>Mehennaoui Lamine</b>	MCA,	Université de Skikda
Examineur :	Mr <b>Zennir Youcef</b>	MCA,	Université de Skikda

## *Dédicaces*

Je dédie ce modeste travail

**A** la mémoire de mon père et à ma très chère mère, pour leur amour, patience et soutien dont ils ont fait preuve pendant toute la durée de mes études.

**A** ma petite et grande familles, Spécialement Mon Mari.

K. Rabah

## *Remerciements*

Avant tout, ma reconnaissance va à Allah le tout puissant qui m'a donnée la volonté, le courage, la patience et m'a aidée à compléter ce travail.

Je pense en deuxième lieu à Mr Samir Ladaci, Professeur à l'ENP Constantine, que je remercie énormément pour avoir encadré ce travail de thèse avec ces précieux conseils et beaucoup de compétence et de disponibilité et la confiance qu'il m'avait accordé au cours de ces années.

J'exprime mes sincères remerciements à mon co-encadreur de thèse Monsieur Lashab Mohamed Professeur à l'Université d'Oum El bouaghi.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur Lachouri Abderrazak, Professeur à l'Université de Skikda, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury.

Mes chaleureux remerciements vont à Monsieur Djennoune Said, Professeur à l'Université de Tizi-Ouzou d'avoir bien voulu participer au Jury de ma soutenance de thèse.

Je remercie également Monsieur Mehennaoui Lamine, MCA à l'Université de de Skikda et Monsieur Zennir Youcef, MCA à l'Université de de Skikda, qui ont accepté d'examiner ce modeste travail de recherche.

Finalement, je remercie tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail même par un mot d'encouragement parmi mes enseignants, mes amis, mes collègues de l'université des frères Mentouri Constantine 1.

---

**Table des matières**

**1. Introduction générale** ..... 1

**2. Notions sur les Operateurs et les Systèmes d'ordre Fractionnaires** ..... 5

2.1. Introduction..... 5

2.2. Préliminaires et définitions ..... 6

    2.2.1. Définitions ..... 6

    2.2.2. Intégrale d'ordre fractionnaire..... 6

    2.2.3. Dérivée d'ordre fractionnaire ..... 7

        2.2.3.1. Définition de Riemann-Liouville ..... 8

        2.2.3.2. Définition de Caputo ..... 8

        2.2.3.3. Définition de Grünwald-Leitnikov ..... 9

2.3. Quelques propriétés de l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire ..... 10

2.4. Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire ..... 10

    2.4.1. Approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire dans le domaine fréquentiel ..... 11

        2.4.1.1. Approximation de l'opérateur intégrateur ..... 11

        2.4.1.2. Approximation de l'opérateur dérivateur ..... 13

    2.4.2. Approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire dans le domaine temporel 15

        2.4.2.1. Approximation des formules de Grünwald-Leitnikov ..... 16

        2.4.2.2. Approximation des formules de Riemann-Liouville..... 16

        2.4.2.3. L'Algorithme Fondamental Prédicteur-Correcteur..... 17

2.5. Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire ..... 18

2.6. Conclusion ..... 18

**3. Analyse et Contrôle des Dynamiques Chaotiques**

3.1. Introduction..... 19

3.2. Quelques définitions ..... 20

    3.2.1. Le chaos ..... 20

        3.2.1.1. Chaos dans le sens de Devaney ..... 20

3.2.1.2.	Chaos dans le sens de Li-Yorke .....	20
3.3.	Caractérisation du comportement chaotique .....	22
3.3.1.	Caractérisation par des outils numériques quantitatifs .....	22
3.3.2.	Caractérisation par des outils graphiques qualitatifs .....	22
3.3.2.1.	Le diagramme de bifurcation .....	22
3.3.2.2.	La section de Poincaré.....	24
3.3.2.3.	L'espace de phases .....	25
3.4.	Le chaos dans les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.....	27
3.5.	Contrôle du chaos dans les systèmes d'ordre entier et fractionnaire .....	28
3.5.1.	Stabilisation par retour d'état .....	29
•	Exemple illustratif .....	29
	Le système de Chen d'ordre fractionnaire modélisé par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire (3.1).....	29
3.5.2.	Contrôle par un régulateur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire .....	33
3.5.3.	Contrôle par mode glissant .....	34
3.5.3.1.	Introduction .....	34
3.4.3.2.	Synthèse de la loi de commande .....	35
3.6.	Conclusion .....	37
	<b>4. Contrôleurs <math>PI^\lambda D^\mu</math> d'ordre fractionnaire appliqués aux systèmes chaotiques non linéaires</b>	
4.1.	Introduction.....	38
4.2.	Stratégie de contrôle.....	40
4.3.	Procédure de conception .....	41
4.4.	Exemples d'application.....	42
4.4.1.	Système chaotique multi-scroll de Chen .....	42
4.4.1.1.	Utilisation d'un contrôleur PID classique. ....	44
4.4.1.2.	Utilisation d'un contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire.....	50
4.4.2.	Système chaotique de Genesisio-Tesi.....	55
4.4.2.1.	Utilisation d'un contrôleur PID classique. ....	55
4.4.2.2.	Utilisation d'un contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire .....	60
4.5.	Conclusion .....	64

---

<b>5. Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires avec un régulateur par mode glissant fractionnaire</b>	
5.1.	Introduction..... 65
5.2.	Définition du problème de la synchronisation ..... 67
5.3.	Conception du contrôleur par mode glissant..... 68
5.4.	Analyse de la stabilité ..... 69
5.5.	Résultats de simulation ..... 70
5.1.1.	Synchronisation du système de Genesio-Tesi fractionnaire..... 71
5.1.1.1.	Synchronisation dans le cas idéal (sans perturbation) ..... 72
5.1.1.2.	Synchronisation du système fractionnaire de Genesio-Tesi perturbé ... 75
5.1.2.	Synchronisation du système de Jerk d'ordre fractionnaire ..... 78
5.1.2.1.	Synchronisation dans le cas idéal (sans perturbation) ..... 80
5.1.2.2.	Synchronisation du système de Jerk modifié d'ordre fractionnaire retardé ..... 83
5.6.	Conclusion ..... 86
<b>6. Commande Adaptative par mode glissant pour la Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire</b>	
6.1.	Introduction..... 88
6.2.	Synchronisation de deux systèmes chaotiques fractionnaires..... 89
6.3.	Analyse de la stabilité ..... 91
6.4.	Résultat de simulation..... 92
6.4.1.	Synchronisation du système d'Arneodo dans le cas idéal ..... 95
6.4.2.	Synchronisation du système fractionnaire d'Arneodo perturbé ..... 97
6.5.	Conclusion ..... 102
<b>7. Conclusion générale.....103</b>	
<b>Bibliographie..... 105</b>	

---

## Table des figures

2.1 Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	13
2.2 Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire.....	15
3.1 Attracteur de Lorenz.....	21
3.2 Sensibilité aux conditions initiales.....	21
3.1 Diagramme de bifurcation du système de Hénon pour $b=0.3$ .....	24
3.2 Section de Poincaré : la trajectoire de phase $\Gamma$ coupe le plan $\Sigma$ .....	25
3.3 Plan de phase $(y,z)$ du système de Chen.....	26
3.4 Diagramme de bifurcation $x=f(q_2)$ avec $(q_1, q_3) = (1, 1)$ du système de Chen.....	30
3.5 Schéma-bloc Matlab/Simulink pour le système de Chen d'ordre fractionnaire (1, 0.9, 1).....	30
3.6 Représentation du système de Chen fractionnaire dans le plan de phase : (a) $(x,y)$ et (b) $(y,z)$ .....	31
3.7 Schéma-bloc Matlab/Simulink pour le système de Chen fractionnaire contrôlé.....	32
3.8 Système de Chen d'ordre fractionnaire contrôlé sur un point fixe.....	33
3.9 Système de Chen d'ordre fractionnaire contrôlé sur une orbite périodique : (a) Variables d'état et (b) Plan de phase $(x,y)$ .....	33
3.12 Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état.....	36
4.1 Système de contrôle PIDOF.....	40
4.2 Plan de phase du système Multi-Scroll de Chen.....	42
4.3 Points fixes du système Multi-Scroll de Chen.....	44
4.4 Diagramme de bifurcation $x = f(k_p)$ .....	45
4.5 Critère quadratique $J = f(k_p)$ .....	46
4.6 Diagramme de bifurcation $x = f(k_r)$ .....	46

---

4.7 Critère quadratique $J = f(k_I)$ .....	47
4.8 Diagramme de bifurcation $x = f(k_D)$ .....	47
4.9 Critère quadratique $J = f(k_D)$ .....	48
4.10 Critère quadratique $J = f(\lambda)$ .....	50
4.11 Critère quadratique $J = f(\mu)$ .....	50
4.12 Variables d'état du système Multi-Scroll de Chen perturbé contrôlé .....	54
4.13 Signal de controle $PI^{\lambda}D^{\mu}$ .....	54
4.14 Portrait de phase du système de Genesio-Tesi.....	56
4.15 Diagramme de bifurcation $x = f(k_p)$ .....	57
4.16 Critère quadratique $J = f(k_p)$ .....	57
4.17 Diagramme de bifurcation $x = f(k_I)$ .....	58
4.18 Critère quadratique $J = f(k_I)$ .....	58
4.19 Diagramme de bifurcation $x = f(k_D)$ .....	59
4.20 Critère quadratique $J = f(k_D)$ .....	59
4.21 Critère quadratique $J = f(\mu)$ .....	60
4.22 Variables d'état du système de Genesio-Tesi contrôlé.....	62
4.23 Signal de contrôle du $PD^{\mu}$ .....	62
4.24 Variables d'état du système de Genesio-Tesi contrôlé perturbé.....	63
4.25 Signal de contrôle du $PD^{\mu}$ pour le système perturbé.....	63
5.1 Le comportement chaotique du système fractionnaire de Genesio-Tesi.....	71

---

---

5.2 Portrait de phase de l'attracteur de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire .....	72
5.3 Synchronisation du système de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire.....	73
5.4 Les erreurs de synchronisation du système de Genesio-Tesi fractionnaire.....	73
5.5 Signal de contrôle pour la synchronisation du système de Genesio-Tesi fractionnaire.....	74
5.6 Surface de glissement pour la synchronisation par CMG du système de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire.....	74
5.7 Synchronisation du système de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire en présence de la perturbation.....	75
5.8 Les erreurs de synchronisation du système de Genesio-Tesi fractionnaire perturbé .....	76
5.9 Signal de contrôle pour la synchronisation du système de Genesio-Tesi fractionnaire perturbé.....	76
5.10 Surface de glissement pour la synchronisation par CMG du système de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire perturbé.....	77
5.11 Comportement chaotique du système de Jerk modifié d'ordre fractionnaire :	
(a) plan( $x, y$ ) (b) plan( $x, z$ ), (c) plan( $y, z$ ), (d) l'espace( $x, y, z$ ).....	79
5.12 Synchronisation du système de Jerk modifié d'ordre fractionnaire.....	81
5.13 Les erreurs de synchronisation du système Jerk modifié fractionnaire.....	81
5.14 Signal de contrôle pour la synchronisation du système Jerk modifié fractionnaire.....	82
5.15 Surface de glissement pour la synchronisation par CMG du système de Jerk modifié d'ordre fractionnaire.....	82

---

---

5.16 Critère d'erreur quadratique $J_k$ par rapport aux paramètres du contrôleur $k_1$ et $k_2$ ..	84
5.17 Synchronisation des systèmes de Jerk modifiés d'ordre fractionnaire avec perturbation de retard.....	84
5.18. Les erreurs de la synchronisation des systèmes de Jerk modifiés d'ordre fractionnaire avec des perturbations de retard.....	85
5.19 Signal de contrôle pour la synchronisation du système de Jerk modifié fractionnaire avec des perturbations de retard.....	85
5.20 Surface de glissement pour la synchronisation par CMG du système Jerk modifié d'ordre fractionnaire avec des perturbations de retard.....	86
6.1 Schéma de la synchronisation.....	90
6.2 Attracteur d'Arneodo d'ordre fractionnaire.....	93
6.3 Comportement chaotique du système d'Arneodo fractionnaire Maître.....	94
6.4 Comportement chaotique du système d'Arneodo fractionnaire Esclave.....	94
6.5 Synchronisation du système d'Arneodo d'ordre fractionnaire.....	95
6.6 Erreurs de la synchronisation du système d'Arneodo fractionnaire.....	95
6.7 Surface de glissement pour la synchronisation par CMGA du système d'Arneodo d'ordre fractionnaire.....	96
6.8 Signal de contrôle pour la synchronisation du système d'Arneodo d'ordre fractionnaire.....	96
6.9 Le gain adaptatif $k^* = k\xi(t)$ .....	97
6.10 (1) Synchronisation et (2) erreur de synchronisation du système d'Arneodo perturbé par un échelon ; (a): $B = 0.01$ et (b) : $B = 0.04$ .....	98
6.11 (1) Synchronisation et (2) erreur de synchronisation du système d'Arneodo perturbé par un aléatoire ; (a): $B = 0.01$ et (b) : $B = 0.05$ .....	99

---

6.12 (1) Synchronisation et (2) erreur de synchronisation du système d'Arneodo perturbé par une sinusoïde où  $\omega = 10$ ; (a):  $B = 0.01$  et (b) :  $B = 0.02$  .....100

6.13 Synchronisation du système d'Arneodo en présence d'une perturbation multiple  $\delta(t) = 0.01 \cdot rand \cdot \sin(10t)^2$  ; (a) synchronisation du système maître et esclave, (b) les erreurs de la synchronisation, (c) la perturbation appliquée.....101

---

**Liste des tableaux**

4.1 $J = f(k_p)$ .....	48
4.2 $J = f(k_I)$ .....	49
4.3 $J = f(k_D)$ .....	49
4.4 $J = f(\lambda)$ .....	51
4.5 $J = f(\mu)$ .....	53
4.6 $J = f(\mu)$ .....	61
5.1 Temps de réponse et critère quadratique en fonction du paramètre de contrôle $k$ .....	78
5.2 Performances dynamiques du système de Jerk modifié via le paramètre de contrôle $k$ .....	83

# Chapitre 1

## Introduction Générale

Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du 17<sup>ème</sup> siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral, mais ce n'est que lors des quatre dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu le plus d'intérêt et les applications des dérivées fractionnaires se sont le plus diversifiées.

Comme il est bien connu, beaucoup de systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par un modèle dynamique d'ordre fractionnaire, basé en général sur la notion de différentiation ou d'intégration d'ordre non-entier avec des exemples d'application dans divers domaines tel que le traitement du signal[1], le traitement d'image [2], le contrôle automatique[3-4], la robotique[5], et l'énergie renouvelable [6].

Le *chaos* est la deuxième notion-clé sur laquelle se base cette thèse. Le comportement chaotique se situe entre la régularité rigide et l'aspect aléatoire, et son application pratique n'a eu naissance qu'à la révolution de l'ordinateur, d'où l'apparition d'une variété d'applications industrielles et commerciales, basées sur les différents aspects des systèmes chaotiques.

Depuis la découverte du chaos, il a été considéré comme un comportement incontrôlable et imprédictible en raison de l'effet des perturbations et à la sensibilité au plus léger changement des conditions initiales qui provoque une évolution différente dans la trajectoire du système.

Dans leur tentative de contrôler le chaos, les chercheurs essayèrent d'apporter de nouvelles idées et techniques qui utilisent la nature même du chaos pour le contrôler. Le premier article publié dans ce domaine est celui d'Ott, Grebogi et York en 1990[7]. Ce qui a vraiment intéressé les chercheurs du domaine est le fait qu'une dynamique complexe pouvait être stabilisée par une méthode simple et efficace. En parallèle avec la parution de l'article d'OGY, Pecora et Carroll ont prouvé la possibilité de synchroniser deux systèmes chaotiques évoluant initialement dans deux états différents malgré la dynamique très complexe des systèmes chaotiques[8]. Et après le travail développé par Chen et Lai en 1996 qui consiste à appliquer au système, une loi de commande tirée de la condition de stabilité de Lyapunov pour déplacer le système de sa position d'équilibre sans divergence [9], plusieurs recherches ont été développées sur le contrôle, la synchronisation et la

---

chaotification dite anti-contrôle des systèmes dynamiques non linéaires.

Basée sur les concepts usuels d'ordre, il est bien connu que le chaos ne peut pas se produire dans des systèmes continus ayant un ordre total inférieur à trois. Dans le cas des systèmes fractionnaires l'ordre total du système passe de trois à la somme de l'ordre de chaque équation particulière. Dans de tels cas, le chaos a été exposé dans un système avec un ordre total inférieur à trois et des comportements chaotiques ont été trouvés dans les systèmes d'ordre fractionnaire de Lorenz-Stenflo [10], Chua [11], Chen[12], Qi [13], Duffing [14], Newton–Leipnik [15] et Liu [16]. En outre, le contrôle et la synchronisation du chaos sont des applications utiles de la théorie du chaos. En effet, la synchronisation et le contrôle du chaos dans les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire n'est qu'un recentrage intéressant en raison de leurs applications potentielles dans l'industrie et des communications sécurisées.

L'intérêt majeur de la généralisation de la théorie de la commande classique à la commande d'ordre fractionnaire est l'amélioration des performances des systèmes de commande en utilisant les concepts de la dérivation non entière. En effet, la conception des contrôleurs d'ordre fractionnaire, a attiré l'attention de plusieurs chercheurs qui ont enrichi ce domaine par différentes structures de commandes d'ordre fractionnaire. Les méthodes les plus connues sont : la commande CRONE (Commande Robuste d'ordre non entier) proposée par Oustaloup, la commande par  $PI^\lambda D^\mu$ , et la commande intelligente (commande adaptative floue, commande par mode glissant...).

Les systèmes de commande intelligente d'ordre fractionnaire ont montré des performances et des propriétés très intéressantes, et à cet effet, de nombreuses applications de ces systèmes ont été signalées dans différents domaines.

## Objectif de ce travail

En raison des performances améliorées des contrôleurs d'ordre fractionnaire relativement à celles des contrôleurs d'ordre entier démontrées dans plusieurs travaux précédents [17]-[18], cette thèse se place dans ce contexte et vise à contribuer à une meilleure maîtrise et un contrôle plus performant de ces systèmes. Notre intérêt pour l'introduction de ces schémas de commande est motivé par notre volonté d'enrichir les techniques de commande des systèmes chaotiques d'ordre entier et fractionnaire. Dans la suite, on considère l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaire dans trois algorithmes de commande différents.

L'objectif de notre contribution est l'amélioration des performances temporelles et la robustesse des schémas de commande des systèmes non linéaires à comportement chaotique affectés

---

par différents types de perturbations.

La contribution majeure de cette thèse se résume en trois grandes lignes ;

- Proposition d'une nouvelle technique d'identification des paramètres du contrôleur fractionnaire  $PI^\lambda D^\mu$  en se basant sur les diagrammes de bifurcation
- Conception systématique d'un nouveau schéma de synchronisation d'une classe de systèmes chaotiques par mode glissant fractionnaire.
- Amélioration du schéma de synchronisation par mode glissant proposé en introduisant une loi d'adaptation des paramètres du contrôle.

## Présentation de la thèse

Cette thèse est composée de deux parties :

- La première partie, présente des généralités sur les bases théoriques utilisées dans ce travail de recherche. Elle comporte deux chapitres :
    1. Le premier chapitre est consacré au calcul fractionnaire, aux définitions fondamentales et à l'approximation de l'opérateur fractionnaire dans le domaine fréquentiel et temporelle. Des concepts de base y sont répertoriés pour une bonne compréhension de la partie "résultats".
    2. Le deuxième chapitre est dédié au phénomène chaotique. Il introduit les définitions du chaos et ses outils de détection suivies par la présentation des schémas de commandes concernés par ce travail de recherche.
  - La deuxième partie, est la partie "Contribution" ou résultats, qu'on a répartie suivant le type de commande proposée en trois chapitres :
    1. Le troisième chapitre présente les résultats obtenus de l'application d'une commande par un contrôleur PID d'ordre fractionnaire dont la configuration des paramètres se base sur les diagrammes de bifurcation associés à l'erreur quadratique. Deux différents systèmes chaotiques avec et sans perturbation y sont proposés comme des exemples de simulation.
    2. Le quatrième chapitre donne une nouvelle conception systématique du schéma de contrôle par mode glissant fractionnaire pour la synchronisation d'une classe de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. L'approche de conception considérée
-

fournit une loi fractionnaire qui garantit la stabilité asymptotique des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire dans le sens du théorème de stabilité de Lyapunov. Deux exemples de simulation numériques sont proposés, dans des conditions idéales et perturbées respectivement.

3. Le cinquième chapitre est consacré à la commande par mode glissant fractionnaire adaptatif pour la synchronisation de la même classe de systèmes chaotiques étudiée dans le chapitre 4. La stabilité de ce schéma de commande proposé dans cette thèse est établie. Un exemple de simulation est présenté pour montrer l'efficacité et la faisabilité du schéma de synchronisation.

Enfin, une conclusion générale, présente les principaux résultats de ces travaux et leurs perspectives de développement dans le futur.

# Chapitre 2

## Notions sur les Operateurs et les Systèmes d'ordre Fractionnaires

### 2.1. Introduction

Le concept d'opérateur de différenciation  $D = \frac{d}{dx}$  est familier à tous ceux qui ont étudié le calcul élémentaire. Pour les fonctions appropriées, la  $n^{\text{ième}}$  dérivée de la fonction  $f$ , noté  $D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ , est bien définie lorsque  $n$  est un nombre entier positif. En 1695, L'Hôpital demanda à Leibniz quel sens pourrait être attribué à  $D^n f$  si  $n$  était une fraction. Depuis lors, le calcul fractionnaire a attiré l'attention de nombreux mathématiciens célèbres, comme Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann et Laurent. Mais ce n'est qu'en 1884 que la théorie des opérateurs généralisés a atteint un tel niveau dans son développement qui en fait un point de départ pour le mathématicien moderne[19].

Pour la première monographie, le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier[20], qui, après une collaboration conjointe commencée en 1968, ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974. En 1987, le livre de S. Samko, A. Kilbas et O. Marichev[21], appelé «encyclopédie» du CF, est apparu en russe et plus tard avec une édition anglaise en 1993. De nos jours, les ouvrages, les revues et les textes consacrés au calcul fractionnaire et à ses applications incluent plusieurs dizaines de titres et cette liste devrait encore augmenter dans les années à venir[22].

Le calcul fractionnaire, en permettant les intégrales et les dérivées de tout ordre réel positif (le terme «fractionnaire» n'est conservé que pour des raisons historiques) peut être considéré comme une branche de l'analyse mathématique qui traite des opérateurs et des équations intégral-différentielles. Il est strictement lié à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels[19].

Durant les dernières années on a pu constater un progrès significatif de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation pour un nombre d'applications dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie, en raison de l'intérêt considérable qui a été porté au calcul fractionnaire et ces concepts.

## 2.2. Préliminaires et définitions

### 2.2.1. Définitions

La généralisation de l'intégration et de la différentiation est représentée par l'opérateur intégral-différentiel continu d'ordre non entier  ${}_c D_t^\alpha$  où  $c$  et  $t$  sont des limites de l'opération tel que:

$${}_c D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \Re(\alpha) > 0, \\ 1 & \Re(\alpha) = 0, \\ \int_c^t (d\tau)^{-\alpha} & \Re(\alpha) < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ , est l'ordre de l'opération.

Dans la littérature, il existe plusieurs définitions pour l'opérateur intégral-différentiel d'ordre fractionnaire dont les plus populaires sont celles de Caputo, Weyl, Fourier, Grünwald-Leitnikov (GL) et Riemann-Liouville. Ces deux dernières sont en général les plus utilisées [17].

### 2.2.2. Intégrale d'ordre fractionnaire

La formule de Cauchy pour l'intégration successive permet de condenser  $j$  intégrations en une seule. Elle est notamment utilisée en analyse fractionnaire.

Soit  $f(t)$  une fonction réelle de la variable réelle  $t$  continue et intégrable sur  $[0, +\infty[$ , son intégration répétée  $j$  fois notée  $I^j f(t)$  s'exprime par la formule suivante:

$$I^j f(t) = \frac{1}{(j-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{j-1} f(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

Afin de généraliser l'équation (2.2) à un nombre réel  $\alpha \in \mathfrak{R}_+^*$ , Riemann a proposé en 1947 de remplacer la fonction factorielle par la fonction Gamma. On obtient alors la fonction

d'intégration fractionnaire :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

$\Gamma(\cdot)$  étant la fonction gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \forall x \in \mathfrak{R}^* \quad (2.4)$$

En remplaçant la borne d'intégration inférieure de l'intégrale d'ordre réel (2.3) par  $-\infty$  on tombe sur la définition dite de Riemann-Liouville. Il est intéressant de noter que pour  $\alpha = 1$  la quantité

$$\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ vaut } 1.$$

L'équation (2.3) peut aussi être écrite sous la forme :

$$I^\alpha f(t) = P_\alpha(t) \otimes f(t) \quad (2.5)$$

Où l'opérateur  $\otimes$  représente le produit de convolution.

La fonction  $P_\alpha(t)$  assure la pondération de chaque valeur de la fonction  $f(t)$ , elle est donnée par

$$P_\alpha(t) = \frac{(t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \text{ L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction } f(t) \text{ peut alors être interprétée}$$

comme l'aire entre  $t_0$  et  $t$  que délimite par rapport à l'axe des abscisses la fonction  $f(t)$  pondérée par la fonction  $P_\alpha(t)$ .

Pour une fonction  $f(t)$  causale, la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre  $\alpha$  a la même expression que la transformée de Laplace de l'opération d'intégration entière la seule différence est que l'ordre d'intégration est fractionnaire. Elle est donnée par:

$$L[I^\alpha f(t)] = \frac{1}{s^\alpha} L[f(t)] \quad (2.6)$$

où  $s$  désigne l'opérateur de Laplace.

### 2.2.3. Dérivée d'ordre fractionnaire

Les dérivées d'ordre fractionnaire fournissent un excellent instrument pour la description de la mémoire. Par ce principal avantage elles deviennent incontournables dans la modélisation des propriétés mécaniques et électriques des matériaux réels, ainsi que dans la description des propriétés rhéologiques des roches, et dans de nombreux autres domaines.

La généralisation de la différentiation entière à des ordres non entiers peut être obtenue à

partir de l'intégration fractionnaire de l'équation (2.3) donnant ainsi la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo. Une autre généralisation, basée sur la définition usuelle de la différentiation entière est proposée par Grünwald-Leitnikov.

### 2.2.3.1. Définition de Riemann-Liouville

La dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha > 0$  d'une fonction  $f(t)$  dite de Riemann-Liouville est donnée par :

$${}_{\text{RL}}D_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < \alpha < n$ .

La transformée de Laplace selon cette définition est donnée par de la fonction  $f(t)$  causale [17].

$$L[{}_{\text{RL}}D_{t_0}^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} L[f(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} s^i D^{\alpha-i-1} f(t) \Big|_{t=t_0} \quad (2.8)$$

où  $\sum_{i=0}^{n-1} s^i D^{\alpha-i-1} f(t) \Big|_{t=t_0}$  représente la  $(\alpha-i-1)^{\text{ème}}$  dérivée de  $f(t)$  lorsque  $t = t_0$ .

### 2.2.3.2. Définition de Caputo

Les problèmes appliqués en viscoélasticité, mécanique des solides et en rhéologie ont poussé plusieurs auteurs y compris Caputo à rendre compte que la définition de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville doit être révisée malgré le rôle important qu'elle a jouée dans le développement du calcul fractionnaire.

A la fin des années 60, dans le cadre de ces travaux Caputo a introduit une autre définition de la dérivation fractionnaire [17].

L'expression mathématique de cette définition est :

$${}_cD_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

où  $n$  est un entier tel que  $(n-1) < \alpha < n$  et  $f^{(n)}(\tau)$  étant la dérivée d'ordre entier  $n$  de la fonction  $f(\tau)$ .

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  causale selon la définition de Caputo est donnée par [17].

$$L[{}_cD_{t_0}^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} L[f(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1} D^i f(t) \Big|_{t=t_0} \quad (2.10)$$

où  $D^i f(t) \Big|_{t=0}$  représente la  $i^{\text{ème}}$  dérivée entière de  $f(t)$  à  $t = t_0$ . Les conditions initiales s'expriment en fonction des valeurs en  $t_0$  des dérivées entières  $D^i f(t)$ , ( $i = 0, \dots, n-1$ ).

La définition de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo peut être formulée à partir de la définition de Riemann-Liouville comme suit [17]:

$${}_{RL}D^\alpha f(t) = {}_C D^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (2.11)$$

### 2.2.3.3. Définition de Grünwald-Leitnikov

La définition proposée par Grünwald [17] est plus adéquate pour le calcul numérique de la dérivation fractionnaire. En effet, partant de la dérivée première et avec une période d'échantillonnage  $h$  ;

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.12)$$

La dérivée seconde donne :

$$D^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (2.13)$$

Le premier niveau de la généralisation à un ordre entier  $n$  est donné par:

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j f(t-jh) \quad (2.14)$$

$n$  étant un nombre entier, la notation  $\binom{n}{j}$  représente la combinaison de  $j$  élément parmi  $n$  dont

l'expression est donnée par :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (2.15)$$

Pour des valeurs fractionnaires  $\alpha \in \mathfrak{R}_+$ , l'équation (2.14) peut être écrite comme L'extension [17]:

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} (-1)^j f(t-jh) \quad (2.16)$$

La notation  $\binom{\alpha}{j}$  désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j! \Gamma(\alpha-j+1)} \quad (2.17)$$

### 2.3. Quelques propriétés de l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire

- si  $f(t)$  est une fonction analytique de  $t$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  ${}_0D_t^\alpha f(t)$  est une fonction analytique de  $t$  et  $\alpha$ .
- Pour  $\alpha=0$  l'opération  ${}_0D_t^\alpha f(t)$  est l'opérateur identité :

$${}_0D_t^0 f(t) = f(t)$$

- La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires:

$${}_0D_t^\alpha (af(t) + bg(t)) = a{}_0D_t^\alpha f(t) + b{}_0D_t^\alpha g(t)$$

- La loi additive d'index :

$${}_0D_t^\alpha {}_0D_t^\beta f(t) = {}_0D_t^\beta {}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

Dans la suite, des définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire sont données avec des outils mathématiques d'approximation numérique nécessaires pour les implémentations des algorithmes obtenus.

### 2.4. Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Il existe plusieurs approches d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire que ce soit dans le domaine temporel ou fréquentiel, les approximations disponibles dans le domaine fréquentiels sont appelées des approximations analogiques. Des méthodes d'approximation différentes et variées ont été développées[23]. Parmi ces méthodes on peut citer les suivantes :

- La méthode de Charef.
- La méthode d'Oustaloup
- La méthode de Carlson.
- La méthode de Matsuda.

Dans la littérature, les méthodes les plus utilisées sont celles de Charef et d'Oustaloup. La méthode de Charef nommée méthode de la fonction de singularité est plus pratique pour les approximations des fonctions de transferts d'ordre fractionnaire (voir réf. [24]), c'est pourquoi

on va l'utiliser pour l'implémentation d'un schéma de commande par retour d'état proposé dans le chapitre 3. Généralement, les processus de contrôle industriel sont échantillonnés, de sorte qu'une approximation numérique de l'opérateur fractionnaire est indispensable. Les définitions citées ci-dessus ont également des approximations numériques représentées dans la section 2.4.2.

## 2.4.1. Approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire dans le domaine fréquentiel

### 2.4.1.1. Approximation de l'opérateur intégrateur

Les méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles sont basées essentiellement sur les travaux de Charef *et al.* [24]. Elles consistent à approximer le dérivateur ou l'intégrateur d'ordre fractionnaire réel, dans une bande de fréquence donnée, par une fonction rationnelle réalisable physiquement en utilisant un ensemble de cellules élémentaires de premier ordre.

La fonction de transfert d'un opérateur d'ordre fractionnaire élémentaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^\alpha} \quad (2.18)$$

Où  $s = j\omega$  est la fréquence complexe et  $\alpha$  un nombre réel tel que  $0 < \alpha < 1$ .

pour une bande de fréquence donnée  $[\omega_L, \omega_H]$ , cet opérateur peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire PPF comme suit [25] :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^\alpha} \cong \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} \quad (2.19)$$

L'approximation du PPF par une fonction rationnelle est donnée par [25] :

$$G_I(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.20)$$

Où  $p_i$  et  $z_i$  sont obtenus à partir des formules suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0, \quad i=0,1,\dots, N \quad (2.21)$$

$$z_i = (ab)^i ap_0, i=0,1,\dots, N-1 \quad (2.22)$$

$$a = 10^{\left\lfloor \frac{y}{10(1-\alpha)} \right\rfloor}, \quad b = 10^{\left\lfloor \frac{y}{10\alpha} \right\rfloor} \quad (2.23)$$

$$p_0 = \omega_c 10^{\left\lfloor \frac{y}{20\alpha} \right\rfloor} \quad (2.24)$$

$$N = \left( \text{Integer} \left[ \frac{\log \left( \frac{\omega_{\max}}{p_0} \right)}{\log(ab)} \right] + 1 \right) \quad (2.25)$$

$y$  et  $\omega_{\max}$  représentent respectivement l'erreur en dB et la fréquence maximale donnée.

Pour une valeur  $\omega \gg \omega_c$  appartenant à la bande de fréquence  $[\omega_L, \omega_H]$  on peut écrire :

$$G_I(s) = \frac{K_I}{\left( \frac{s}{\omega_c} \right)^\alpha} = \frac{K_I \omega_c^\alpha}{s^\alpha} = \frac{1}{s^\alpha} \quad (2.26)$$

avec  $K_I = 1/\omega_c^\alpha$  et  $\omega_c = \omega_L \sqrt{10^{(y/10\alpha)} - 1}$  est la fréquence de coupure du PPF à  $-3\alpha$  dB.

Alors, dans la bande de fréquence  $[\omega_L, \omega_H]$ , l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est donnée par :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^\alpha} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (2.27)$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation, on doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$G_I(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i ap_0} \right)}{\prod_{i=0}^N \left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left( 1 + \frac{s}{(ab)^i p_0} \right)} \quad (2.28)$$

où les coefficients  $h_i$  sont les résidus qui sont déterminés par :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j a_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - \frac{(ab)^j p_0}{(ab)^j a_0} \right)} = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a_0} \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left( 1 - (ab)^{i-j} \right)} \quad (2.29)$$

L'équation (2.28) correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Foster de la 1<sup>ère</sup> forme de N+1 cellules RC parallèles dont le schéma est représenté dans la figure 2.1.

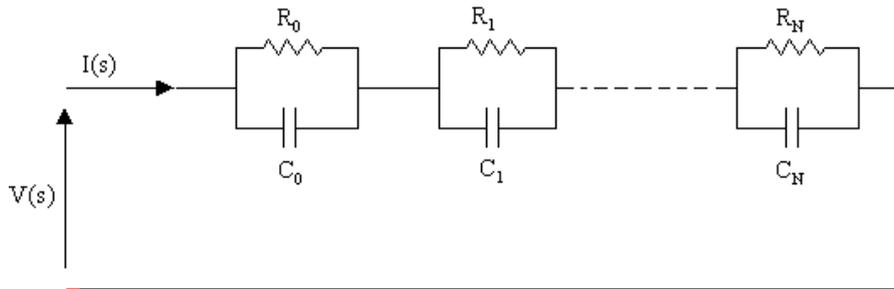


Fig. 2.1 Réseau équivalent d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Cette impédance  $Z(s)$  du circuit de la Figure 2.1 est donnée comme :

$$Z(s) = \sum_{i=0}^N \left( \frac{R_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (2.30)$$

avec,

$$R_i = h_i \text{ et } C_i = \frac{1}{h_i (ab)^i p_0} \quad (2.31)$$

#### 2.4.1.2. Approximation de l'opérateur dérivateur

La fonction irrationnelle qui représente l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire dans le domaine fréquentiel est donnée par :

$$G_D(s) = s^\alpha \quad (2.32)$$

Cet opérateur peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire ZPF comme suit [25] :

$$G_D(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.33)$$

Où  $p_i$  et  $z_i$  sont obtenus à partir des formules suivantes :

$$z_i = (ab)^i z_0, \quad i=0,1,\dots,N \quad (2.34)$$

$$p_i = (ab)^i az_0, \quad i=0,1,\dots,N \quad (2.35)$$

Pour une erreur d'approximation  $y$  en dB et une fréquence maximale  $\omega_{\max}$  donnée, les paramètres d'approximation  $z_0$  et  $N$  sont calculés par

$$z_0 = \omega_c 10^{\left[\frac{y}{20\alpha}\right]}$$

$$N = \left( \text{Integer} \left[ \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{z_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \right)$$

Pour une valeur  $\omega \gg \omega_c$  appartenant à la bande de fréquence  $[\omega_L, \omega_H]$  on peut écrire :

$$G_D(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha = \frac{K_D}{(\omega_c)^\alpha} (s^\alpha) = s^\alpha \quad (2.34)$$

Où  $K_D = (\omega_c)^\alpha$  et la fréquence de coupure du ZPF à  $3\alpha$  dB  $\omega_c = \omega_L \sqrt{10^{(y/10\alpha)} - 1}$ .

L'approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire est donnée par:

$$G_D(s) = s^\alpha \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{az_0(ab)^i}\right)} \quad (2.35)$$

Pour des nécessités d'implémentation,  $\frac{G_D(s)}{s}$  est développée en fonctions élémentaires, telle que :

$$\frac{G_D(s)}{s} = \frac{1}{s} K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{az_0(ab)^i}\right)} \quad (2.36)$$

L'équation (2.36) peut être donnée par :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i s}{\left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.37)$$

Avec ;

$$G_0 = K_D \text{ et } g_i = K_D \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{(i-j)})}{(-az_0(ab)^i) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad (2.38)$$

L'équation (2.37) correspond à l'admittance d'un réseau du type Foster de la 2<sup>ème</sup> forme ( $N+1$ ) cellules RC série donné par le schéma suivant :

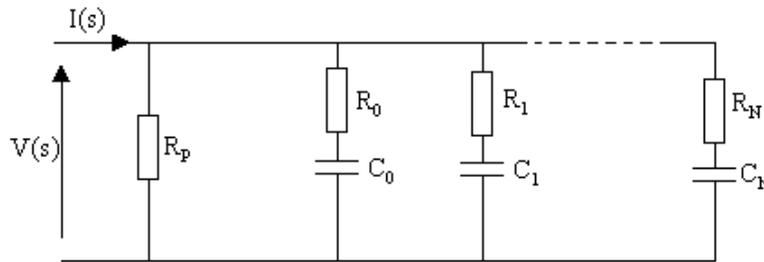


Fig. 2.2 Réseau équivalent d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

L'admittance  $Y(s)$  du circuit de la figure 2.2 est donnée par :

$$Y(s) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \left( \frac{sC_i}{1 + sR_i C_i} \right) \quad (2.39)$$

Avec ;

$$R_p = \frac{1}{G_0}, \quad C_i = g_i, \quad \text{et} \quad R_i = \frac{1}{g_i p_i} \quad (2.40)$$

### 2.4.2. Approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire dans le domaine temporel

Il y a eu beaucoup de travaux sur les solutions numériques des équations différentielles d'ordre fractionnaire ainsi que sur la discrétisation des systèmes et opérateurs d'ordre fractionnaire[26]. Diethelm a proposé récemment une méthode efficace pour la résolution

numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire [27], basée sur un prédicteur-correcteur de type Adams. Vinagre et al. [28] ont développé une nouvelle méthode pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire en utilisant l'approche de Tustin. Ferdi[29] a récemment présenté une méthode de calcul de la dérivée et de l'intégrale d'ordre fractionnaire par le développement en séries de puissances et la modélisation du signal.

#### 2.4.2.1. Approximation des formules de Grünwald-Leitnikov

Pour une fonction causale  $f(t)$  et pour  $t = kh$ , les approximations de la dérivé et de l'intégrale d'ordre fractionnaire G-L sont respectivement données par:

$$\begin{aligned} D_{GL}^{\mu} f(kh) &= \frac{d^{\mu}}{dt^{\mu}} f(t) \\ &\cong h^{-\mu} \sum_{j=0}^k \omega_j^{\mu} f(kh - jh) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} I_{GL}^{\lambda} f(kh) &= D^{-\lambda} f(kh) \\ &\cong h^{\lambda} \sum_{j=0}^k \omega_j^{-\lambda} f(kh - jh) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Où  $\omega_j^{\mu}$ ,  $\omega_j^{-\lambda}$  sont les coefficients binomiaux des équations (2.41) et (2.42) respectivement, qui peuvent être calculés à partir des formules récurrentes suivantes :

pour  $j = 1, 2, \dots, k$  et  $\omega_0^{(\mu)} = \omega_0^{(-\lambda)} = 1$ .

$$\omega_j^{(\mu)} = \left(1 - \frac{1 + \mu}{j}\right) \omega_{j-1}^{(\mu)}, \quad \omega_j^{(-\lambda)} = \left(1 - \frac{1 - \mu}{j}\right) \omega_{j-1}^{(-\lambda)}$$

#### 2.4.2.2. Approximation des formules de Riemann-Liouville

L'approximation numérique de l'intégrale fractionnaire Riemann-Liouville est basée sur la méthode rectangulaire.

En posant  $t = k\Delta$  où  $t$  est le temps,  $k$  entier et  $\Delta$  est la période d'échantillonnage on obtient:

$$\begin{aligned}
I_{RL}^{\lambda} f(k\Delta) &= \frac{\Delta}{\Gamma(\lambda)} \sum_{\tau=0}^{k-1} (k\Delta - \tau\Delta)^{\lambda-1} f(\tau\Delta) \\
&= \frac{\Delta^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \sum_{\tau=0}^{k-1} (k - \tau)^{\lambda-1} f(\tau\Delta)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

### 2.4.2.3. L'Algorithme Fondamental Prédicteur-Correcteur

Maintenant, une définition de la méthode fractionnaire d'Adams-Bashforth-Moulton introduite dans [30] est donnée; car nous allons l'utiliser plus tard pour approximer numériquement l'opérateur intégral d'ordre fractionnaire. En fait, il est plus pratique d'utiliser une méthode d'intégration numérique pour calculer l'intégration ou la dérivation d'ordre fractionnaire car les fonctions de transfert approximatives sont d'ordres relativement élevés.

On considère l'équation différentielle,

$$D^{\alpha} y(x) = f(x, y(x)) \tag{2.44}$$

avec les conditions initiales :

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \tag{2.45}$$

où  $m = [\alpha]$  et les nombres réels  $y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ , sont supposés être donnés.

Cette approche est basée sur la propriété analytique selon laquelle le problème de valeur initiale (2.44), (2.45) est équivalent à l'équation intégrale de Volterra

$$y(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \tag{2.46}$$

En introduisant les nœuds équidistants  $t_j = jh$  avec un  $h > 0$ , et en appliquant la technique intégrale trapézoïdale pour calculer (2.46), la formule correctrice devient :

$$y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y^{(k)}(0) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)) \tag{2.47}$$

$$\begin{cases} a_{0,n+1} = n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha \\ a_{j,n+1} = (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, \\ (1 \leq j \leq n) \end{cases} \quad (2.48)$$

et  $y_h^P(t_{n+1})$  est donnée par:

$$y_h^P(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_n, y_h(t_j)) \quad (2.49)$$

où

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} \left( (n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha \right) \quad (2.50)$$

## 2.5. Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire

Nous rappelons ce résultat important pour la stabilité,

**Lemme 2.1**[31] Soit  $x = 0$  un point d'équilibre pour le système d'ordre fractionnaire,

$$D^\alpha x(t) = f(x, t) \quad (2.51)$$

où  $f(x, t)$  est Lipschitz avec une constante Lipschitz  $l > 0$  et  $\alpha$  dans  $(0, 1)$ . Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V(t, x(t))$  telle que

$$\varepsilon_1 \|x\|^7 \leq V(t, x) \leq \varepsilon_2 \|x\| \quad (2.52)$$

$$D^\alpha V(t, x) \leq -\varepsilon_3 \|x\| \quad (2.53)$$

où  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sont des constantes positives. Alors le point d'équilibre du système (2.51) est stable au sens de Mittag-Leffler (asymptotiquement).

## 2.6. Conclusion

Ce chapitre présentait quelques éléments de base du Calcul Fractionnaire où on a répertorié des notions essentielles sur les méthodes d'approximation fréquentielles et temporelles des opérateurs et transferts d'ordre fractionnaire nécessaires pour la réalisation et la compréhension de notre travail sur le contrôle des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

## Chapitre 3

### Analyse et contrôle des dynamiques chaotiques

La découverte de la dynamique chaotique des systèmes non-linéaires remonte aux travaux d'Henri Poincaré sur la mécanique céleste et la mécanique statistique, vers 1900 [32]. Mais, la mise en évidence du caractère chaotique des conditions météorologiques et par conséquent des mouvements turbulents d'un fluide comme l'atmosphère n'est réalisée qu'en 1963 par le météorologue du Institute de Technologie Massachusetts (MIT) Edward Lorenz [33].

Le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut la non-linéarité, le déterminisme, l'imprévisible, l'irrégularité en plus de la sensibilité aux conditions initiales [34].

Pratiquement, une dynamique chaotique peut être identifiée, en première analyse, par la reconnaissance de propriétés caractéristiques : attracteur étrange, spectre, sensibilité aux conditions initiales ... etc.

Dans le cas général, le modèle d'un système peut être réécrit sous forme de trois équations différentielles simples, où les expressions contiennent des dérivées d'ordre non-entier (fractionnaire). Ainsi, l'ordre total du système passe de 3 à la somme de chaque commande particulière. Pour mettre ce fait en exergue, on peut considérer le modèle dynamique d'un système non linéaire d'ordre fractionnaire. Dans ce cas, le chaos a été observé dans un système avec un ordre total inférieur à trois.

Le terme "ordre du système" devrait également être mentionné. L'ordre du système n'est pas égal au nombre d'équations différentielles si on considère les équations différentielles d'ordre fractionnaire. Il est égal à l'ordre de dérivée le plus élevé de l'équation différentielle fractionnaire du modèle mathématique[35].

## 3.2. Quelques définitions

### 3.2.1. Le chaos

Le comportement chaotique est lié à l'instabilité et à la non-linéarité (chaoticité) dans des systèmes dynamiques déterministes. La relation entre ces deux caractéristiques est alors que le système manifeste une très haute sensibilité aux changements de conditions qui est affirmé par Poincaré dans un chapitre sur le Hasard de son ouvrage intitulé Science et Méthode [36]:

*«Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. (...). Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux. Une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit».*

Comme pour beaucoup de limites en science, il n'y a aucune définition standard du chaos d'où la parution de plusieurs définitions légèrement différentes. Deux principes mathématiques importants expliquent le comportement chaotique, celui de Devaney [37] et celui de Li-Yorke [38].

#### 3.2.1.1. Chaos dans le sens de Devaney

Devaney proposa la définition suivante du chaos : un système dynamique est chaotique si et seulement si

- il est topologiquement transitif.
- il possède un ensemble dense d'orbites périodiques,
- il présente le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.

La transitivité signifie simplement que si l'on considère deux voisinages quelconques de deux états distincts d'un système dynamique, il existe une trajectoire qui passe de l'un à l'autre.

Notons que les deux premières hypothèses impliquent la troisième sans que la réciproque soit vraie [39].

#### 3.2.1.2. Chaos dans le sens de Li-Yorke

Li et Yorke ont introduit la première définition mathématique du chaos. Ils ont établi un critère très simple "La présence de trois périodes implique le chaos". Ce critère joue un rôle très important dans l'analyse des systèmes dynamiques chaotiques.

### 3.2.2. Attracteur

Les trajectoires associées à des régimes dynamiques différents parcourent des objets géométriques de nature différente : point ... fixe, cycle limite, tore invariant ou bien attracteur étrange. Par contre, les états d'une dynamique aléatoire se répartissent au hasard dans l'espace des phases.

1. L'attracteur "point fixe" est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante.

2. L'attracteur "cycle limite" est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.

3. L'attracteur "tore" représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".

4. Les attracteurs chaotiques sont bien plus complexes que les autres, on observe que la trajectoire dans l'espace des phases reste confinée dans une région bien définie, après une période transitoire de durée variable.

#### ○ Propriétés de l'attracteur chaotique

Un attracteur étrange manifeste les propriétés suivantes :

**L'autosimilarité** : le motif géométrique se répète sur des échelles de plus en plus petites quelle que soit l'échelle à laquelle on regarde cette structure, l'aspect paraît identique figure (3.).

**La sensibilité aux conditions initiales**: deux trajectoires initialement très voisines de l'espace des phases s'écartent l'une de l'autre et divergent de façon exponentielle au cours du temps, mais cette divergence ne peut pas être indéfinie car l'attracteur est de diamètre fini figure (3.).

**La dimension fractale** : la dimension  $d$  de l'attracteur étrange est non entière. Elle doit être strictement supérieure à la dimension de l'espace des phases.

**L'étirement et le repliement** : L'attracteur étrange est invariant par l'étirement et le repliement pour plusieurs itérations. Si le système est de dimension 3, l'étirement de l'attracteur par le flot se fait dans une direction, le repliement dans une autre direction, et un comportement périodique selon la troisième direction.

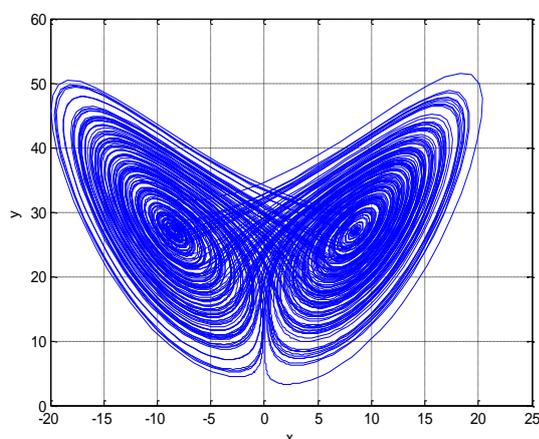


Fig. 3.1 attracteur de Lorenz

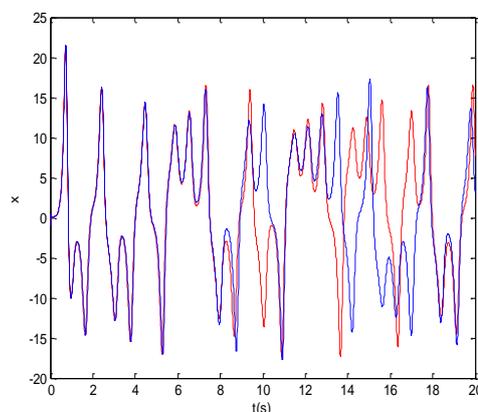


Fig. 3.2 sensibilité aux conditions initiales

### 3.3. Caractérisation du comportement chaotique

Généralement, la caractérisation des systèmes non linéaires peut se faire à partir d'observations grâce à des outils issus du domaine des dynamiques non linéaires tels que : le diagramme de bifurcation, la section de Poincaré, l'espace des phases, ou bien par des outils mathématiques tels que les exposants de Lyapunov[40][41].

#### 3.3.1. Caractérisation par des outils numériques quantitatifs

Les outils du chaos sont des moyens capables de rendre intelligible l'évolution temporelle de phénomènes complexes. Lyapunov et al. ont découverts des outils mathématiques tels que le calcul de la dimension de corrélation et les coefficients de Lyapunov qui vont permettre d'exclure ou d'affirmer que le système va suivre une dynamique non linéaire imprédictible à long terme. Dans la littérature, les paramètres les plus significatifs permettant une estimation des systèmes dynamique non linéaires sont:

- La dimension de corrélation, ou dimension de complexité : elle témoigne en théorie du nombre de degré de liberté que possède un système purement non linéaire, elle tend pour un nombre de points infini vers la dimension de l'attracteur du système dite dimension fractale.
- L'entropie de Kolmogorov : dont une valeur positive témoigne de la dynamique chaotique du système étudié.
- L'exposant principal de Lyapunov : il donne une estimation de la vitesse de divergence ou de convergence des trajectoires voisines dans l'espace des phases. Sa positivité signe une divergence exponentielle des trajectoires donc la sensibilité aux conditions initiales. C'est le paramètre qui témoigne le mieux de la non-linéarité.

#### 3.3.2. Caractérisation par des outils graphiques qualitatifs

Les phénomènes chaotiques que l'on observe sont souvent dus aux non-linéarités que présentent les systèmes, dans des domaines très variés. L'identification des caractéristiques de ses systèmes par des outils d'observation facilite la distinction du comportement.

##### 3.3.2.1. Le diagramme de bifurcation

Le passage d'un point fixe à un cycle limite de deux périodes, puis à un cycle limite de quatre

---

périodes, est un événement important dans la dynamique d'un système. On dit qu'il y a une bifurcation lorsqu'un tel changement qualitatif des solutions se produit à l'occasion de la variation d'un paramètre. Les graphiques qui explicitent ces bifurcations, sont logiquement appelés *diagrammes de bifurcation*.

Le diagramme de bifurcations unidimensionnel est un tracé repérant la nature des différentes solutions du système et leur stabilité lorsqu'un paramètre varie. Il est composé d'intervalles sur lesquelles les solutions asymptotiques (ou les ensembles limites qui leur correspondent) évoluent continûment avec le paramètre et les intervalles sont séparés par les points de bifurcation. L'utilisation de cet outil permet d'évaluer rapidement et de manière efficace l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. Cette notion est incontournable pour l'étude du chaos[42].

Dans le cas d'un système autonome, ces valeurs particulières peuvent être obtenues en travaillant avec une section de Poincaré. Pour un système excité par une fonction périodique du temps, elles peuvent l'être en échantillonnant la variable à la fréquence d'excitation. On obtient ainsi pour chaque valeur du paramètre la suite des états discrets de la variable lorsque le régime asymptotique est atteint.

Un seul point sur une verticale indique un fonctionnement périodique fondamental. En effet, si pour une valeur donnée du paramètre le régime est périodique, la variable échantillonnée à la fréquence fondamentale  $f$  prend une valeur unique. Les  $n$  points correspondants à la même abscisse se superposent donc exactement.

Lorsque les points se répartissent densément sur un segment de la verticale, on peut en déduire que la solution est aperiodique mais il n'est pas possible de préciser si elle est quasi périodique ou chaotique.

On voit apparaitre aussi un enchainement très rapide de doublements de période qui mène à une situation...chaotique. Un exemple de diagramme de bifurcation est représenté sur la figure. 3.2 [43].

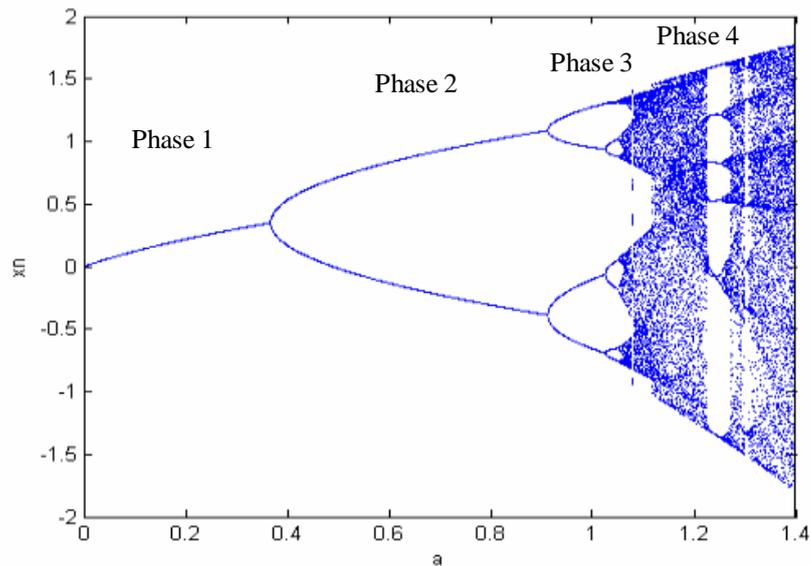


Fig. 3.3 Diagramme de bifurcation du système de Hénon pour  $b=0.3$

Le système de Hénon est décrit par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

Où  $a$  et  $b$  représentent les paramètres de contrôle.

Le comportement dynamique du système de Hénon pour  $a$  variant entre 0 et 1.4 peut se décomposer en quatre phase ; la première représente l'état stable où le système se stabilise sur un point fixe, la deuxième montre l'état périodique 'cycle limite', la troisième un doublement de période et la dernière représente l'état aperiodique (quasi-périodique et chaotique).

### 3.3.2.2. La section de Poincaré

La technique dite des sections de Poincaré facilite l'étude des systèmes dynamiques en ramenant l'analyse d'un système différentiel (temps continu) à celle d'une application (temps discret). Par le biais de cette méthode, la dimension  $d$  du problème initial sous forme de système différentiel est réduite d'une unité avec l'application en dimension  $d-1$ .

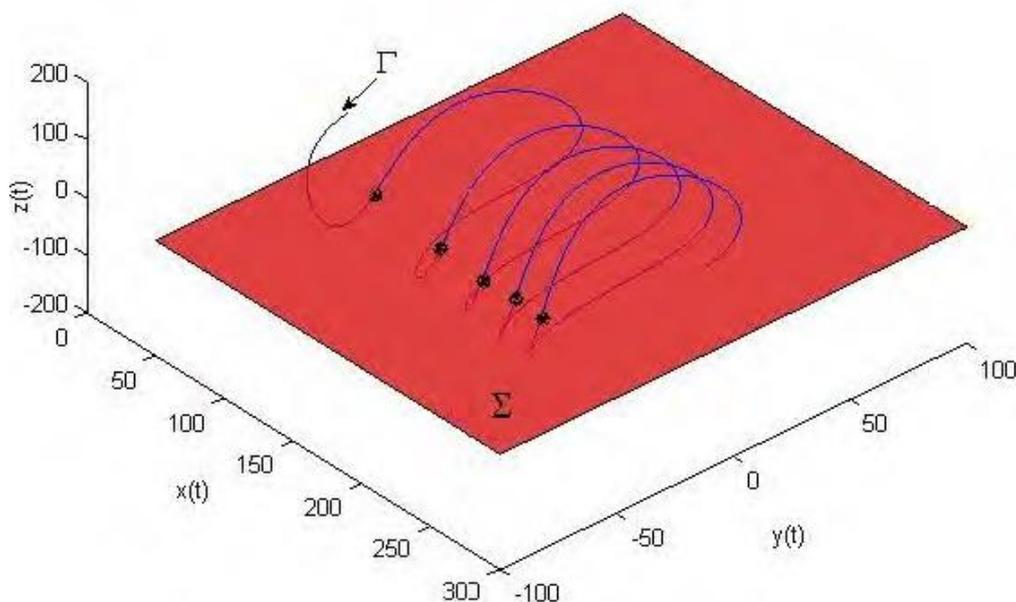


Fig. 3.4 Section de Poincaré : la trajectoire de phase  $\Gamma$  coupe le plan  $\Sigma$

L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface représente la section de Poincaré.

Dans un espace euclidien, le plan de la section doit être choisi de manière à garantir l'existence d'intersections avec la trajectoire  $\Gamma$  et de telle sorte que celle-ci le traverse alternativement dans un sens puis dans l'autre.

### 3.3.2.3. L'espace de phases

Si on considère le cas d'un système physique régi par des équations différentielles, la représentation de son évolution temporelle est alors réalisable. Pour cela, on construit d'abord un modèle avec les lois physiques et les paramètres nécessaires et suffisants pour caractériser ce système. Puis, on définit, à un instant donné, un point dans un "repère". Ce point caractérisera l'état du système dans l'espace à cet instant. Cet espace est appelé "l'espace des phases". Lorsque le temps s'écoule, le point figurant l'état du système décrit en général une courbe dans cette espace. On parle alors de son orbite.

Pour les phénomènes les plus simples, ce point est attiré vers un point d'équilibre ou une courbe limite, près desquels il repasse périodiquement. Les mathématiciens appellent ces courbes "limites des attracteurs".

Pour les phénomènes déterministes, une trajectoire dans l'espace des phases a la propriété de ne posséder aucune intersection avec elle-même ou avec d'autres. En effet, prenons l'exemple d'une ou plusieurs trajectoires de l'espace des phases se recoupant en un point. Si l'on considère maintenant ce point comme l'état initial, le système peut donc évoluer selon plusieurs de ces trajectoires possibles et par conséquent, son évolution n'est plus déterminée par son état initial. L'intersection de trajectoires dans l'espace des phases est incompatible avec le caractère déterministe du système.

De manière simplifiée, l'espace des phases permet de traduire des séries de nombre en une représentation spatiale, de dégager l'essentiel de l'information d'un système en mouvement et de dresser la carte routière de toutes ses possibilités.

L'espace des phases est un espace mathématique souvent multidimensionnel. Chaque axe de coordonnées de cet espace correspond à une variable d'état du système dynamique étudié et chaque variable d'état caractérise le système à un instant donné. A chaque instant donné, le système est donc caractérisé par un point de cet espace. A l'instant suivant, il sera caractérisé par un autre point et ainsi de suite. Si l'espace des phases est représenté en trois dimensions, cette suite de points peut montrer graphiquement l'évolution du système dans le temps. L'ensemble des trajectoires possibles constitue le portrait de phases. Celui-ci peut aider à percevoir l'attracteur du système.

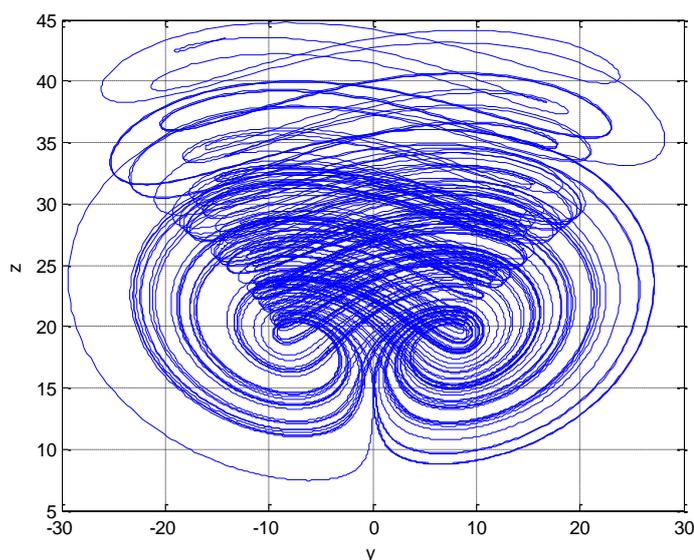


Fig. 3.5 Plan de phase (y,z) du système de Chen

### 3.4. Le chaos dans les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

L'analyse du comportement dynamique des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire montre l'existence du chaos dans de nombreuses applications réelles telles que les circuits [44], les mathématiques [45], les systèmes de puissance [46], la médecine [47], la biologie [43], les réacteurs chimiques [49] ... et d'autres. L'importance de ces applications pour les systèmes chaotiques fait du chaos l'un des sujets les plus populaires pour les chercheurs dans divers domaines scientifiques [45].

Ce paragraphe offre une vue assez riche sur l'état de l'art du problème des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire dans la littérature.

D. Wang et al (2008) [51], ont prouvés la nature chaotique dans le système logistique retardé à partir de l'ordre 0,1, Y. Suansook et al [52], en utilisant les exposants de Lyapunov ont définis le comportement chaotique de l'équation logistique pour les ordres 0,25 et 0,5. Pour les systèmes dynamiques non linéaires continus, de nombreuses études démontrent que le chaos peut apparaître dans les systèmes continus avec un ordre total inférieur à l'ordre du système.

Dans [11], il est montré que le circuit de Chua d'ordre fractionnaire entre 2,6 et 3,8 peut produire l'attracteur chaotique. Dans [53], deux modèles chaotiques fractionnaires ont été étudiés, un oscillateur électronique et le modèle mécanique de « Jerk » où l'attracteur chaotique peut être obtenu à un ordre aussi bas que 2,1. Dans [12], l'ordre inférieur trouvé pour obtenir le chaos dans le système de Chen est 2,1. Dans [54], l'ordre le plus bas constaté pour que le système de Chen Lee fractionnaire produise le chaos est 2,43, un doublement des routes périodiques vers le chaos dans le système est également obtenu. En outre, la production de quatre scrolls dans l'attracteur chaotique est observée. Dans [15], Il a été constaté que le chaos existe dans le système fractionnaire Newton–Leipnik pour un ordre inférieur à 3, l'ordre le plus bas pour produire le chaos est 2,82. Dans [14], Les ordres totaux du système trouvés pour que le chaos existe dans le système Duffing sont 1,8- 1,9- 2,0 et 2,1. Dans [55], le chaos est observé dans le système Lorenz-Stenflo fractionnaire avec un ordre aussi bas que 3,6. Dans [10] pour le système de Lorenz conjugué commensurable l'ordre de fraction supérieur à 0.7905 est la condition nécessaire pour avoir le chaos. Dans [56], un système de commutation avec une structure multi-modèle qui peut générer le chaos est proposé. Les sous modèles représentent des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire avec un ordre commensurable inférieur à 1. Le système posé est capable de démontrer un comportement chaotique si ses paramètres et les règles de commutation sont choisis de manière appropriée. Dans [57], le comportement chaotique du système de Lorenz simplifié est étudié en utilisant le diagramme de bifurcation et le chaos dans l'ordre fractionnaire apparaît pour un ordre inférieur ou supérieur de trois, l'ordre le plus bas qui peut donner le chaos est 2,620. Dans [16], une Investigation numérique sur la dynamique du système de Liu a été réalisées.

Les propriétés du système ont été analysées au moyen d'exposants de Lyapunov. En outre, les dimensions minimales efficaces ont été identifiées pour que le chaos existe dans l'ordre commensurable 2,76 et incommensurable 2,60. Dans [13], on trouve que le chaos existe dans le système Qi fractionnaire pour un ordre moins de trois. L'ordre le plus bas pour obtenir le chaos dans ce système est 2,745. Dans [58], l'auteur donne une preuve mathématique de l'existence du chaos dans l'oscillateur Duffing généralisé d'ordre fractionnaire avec déviation. Le document [59] aborde la forme fractionnaire d'un système chaotique autonome à quatre ailes, et trouve des attracteurs chaotiques dans les différents ordres fractionnaire du système. Les attracteurs chaotiques peuvent être trouvés lors de la variation d'ordre entre 1,5 à 2,7, en particulier dans l'ordre fractionnaire aussi bas que 2,7.

Le document [60], porte sur l'analyse d'un système fractionnaire qui représente la croissance ou le développement d'une tumeur en se basant sur les concepts des systèmes chaotiques. Le modèle développé comprend les interactions entre les cellules saines du tissu, des cellules tumorales et des cellules activées du système immunitaire, ce qui conduit évidemment à un comportement chaotique. Le modèle fractionnaire avec un ordre inférieur à trois peut aussi se comporter de manière chaotique. Dans [61], la nature chaotique d'un générateur de spins nucléaire fractionnaire est démontrée en analysant la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire.

### **3.5. Contrôle du chaos dans les systèmes d'ordre entier et fractionnaire**

La théorie classique de la commande a été amplement développée pour les systèmes linéaires, elle permet dans ce cas d'obtenir de bons résultats. Malheureusement, lorsque ces méthodes sont appliquées à des systèmes ou processus réels, généralement non linéaires, on ne peut obtenir que des performances sous optimales. Pour cette raison, une grande partie des recherches actuelles est centrée sur la commande non linéaire.

Contrôler un système, c'est lui faire suivre un comportement désiré. Ce comportement dépend essentiellement de la tâche à résoudre. Cependant les dynamiques des systèmes, l'équipement de mesure, la puissance des calculateurs disponibles, ... etc. influencent la formulation du comportement désiré.

Comme il est bien connu, après l'apparition des articles d'Ott-Grebogi-York [7] et de Pecora-Carroll [8], le contrôle et la synchronisation du chaos attirent de plus en plus l'attention de diverses disciplines en science et ingénierie que ce soit pour l'ordre entier ou fractionnaire. Depuis lors, plusieurs recherches ont été établies dans ce sens en utilisant différentes méthodes parmi ces méthodes

---

on peut citer :

### 3.5.1. Stabilisation par retour d'état

D'après la littérature, la méthode de retour d'état est très utilisée pour le contrôle des systèmes chaotiques fractionnaires [62]-[63] et même pour la synchronisation [64]-[65]. Cette technique qui est assez facile à implémenter pour ces systèmes décrits généralement dans l'espace d'état est aussi efficace et donne de bonnes performances en sortie. Dans la suite, on propose un exemple illustratif qui montre le contrôle du système de Chen d'ordre fractionnaire en utilisant un retour d'état.

- **Exemple illustratif**

Le système de Chen d'ordre fractionnaire modélisé par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire (3.1).

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = a(y-x) \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = (c-a)x - xz + cy \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont les ordres de dérivations, et l'ordre totale du système non commensurable est  $q = (q_1 + q_2 + q_3)$ . Pour garder le comportement chaotique dans l'ordre fractionnaire on doit faire un choix convenable de l'ordre de fractions. Pour cela le digramme de bifurcation montré dans la figure 3.6 est utilisé.

Dans notre étude on a sélectionné  $(q_1, q_2, q_3) = (1, 0.9, 1)$  donc l'ordre total du système est 2.9. Le diagramme block du modèle du système (3.1) en utilisant Matlab/Simulink est présenté dans la figure 3.7.

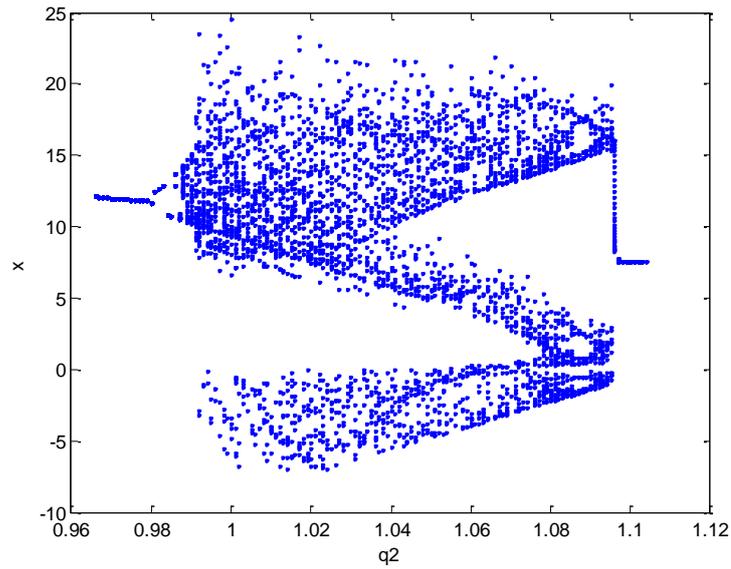


Fig. 3.6 Diagramme de bifurcation  $x=f(q_2)$  avec  $(q_1, q_3) = (1, 1)$  du système de Chen.

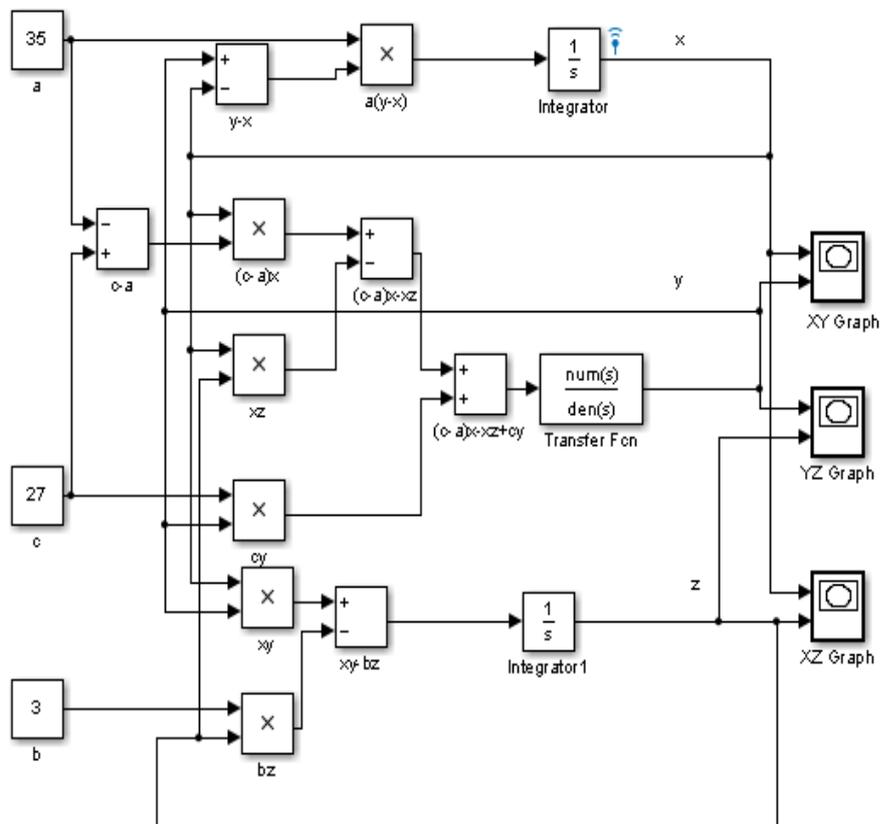


Fig.3.7 Schéma-bloc Matlab/Simulink pour le système de Chen d'ordre fractionnaire (1, 0.9, 1)

La figure 3.6 montre les trajectoires des variables  $x(t)$ ,  $y(t)$ , et  $z(t)$  du système dans le plan de phase pour  $T_{\text{sim}}=50\text{s}$ , commencé avec les conditions initiales  $(x_0, y_0, z_0)=(2,0,3)$ .

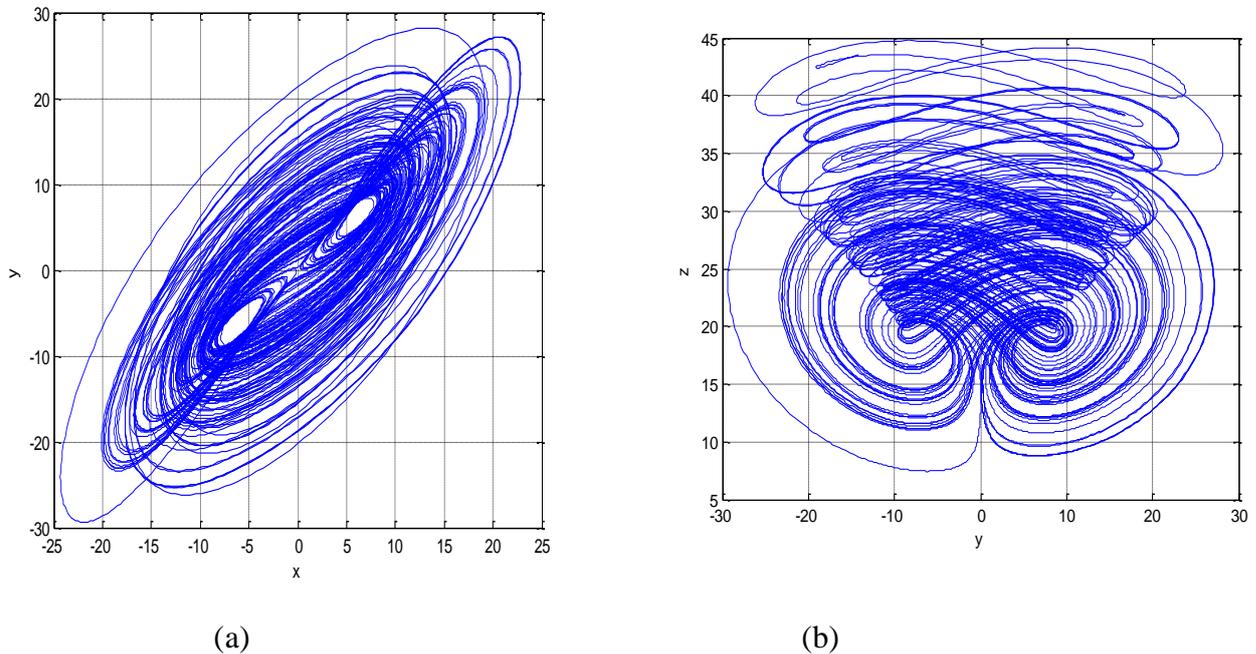


Fig. 3.8 Représentation du système de Chen fractionnaire dans le plan de phase

(a) : (x,y) et (b) :(y,z)

Les résultats de la simulation démontrent que le chaos existe effectivement dans le système de Chen d'ordre fractionnaire (3.1) avec un ordre fractionnaire de 2.9.

Dans la section suivante, on va concevoir un contrôleur à retour d'état linéaire afin de stabiliser le système sur un point fixe instable et sur une orbite périodique.

Une simple loi de contrôle par retour d'état linéaire est conçue pour stabiliser le système fractionnaire de Chen (3.1).

La refonte du modèle de système sous forme de vecteur compact est comme suit:

$$\frac{d^q X}{dt^q} = f(X) \tag{3.2}$$

avec  $X = [x, y, z]$ , en utilisant un simple contrôleur, le système précédent peut être écrit comme suit:

$$\frac{d^q X}{dt^q} = f(X) + U \tag{3.3}$$

où  $U = -KX$  et  $K$  est une matrice diagonale avec des paramètres constants.

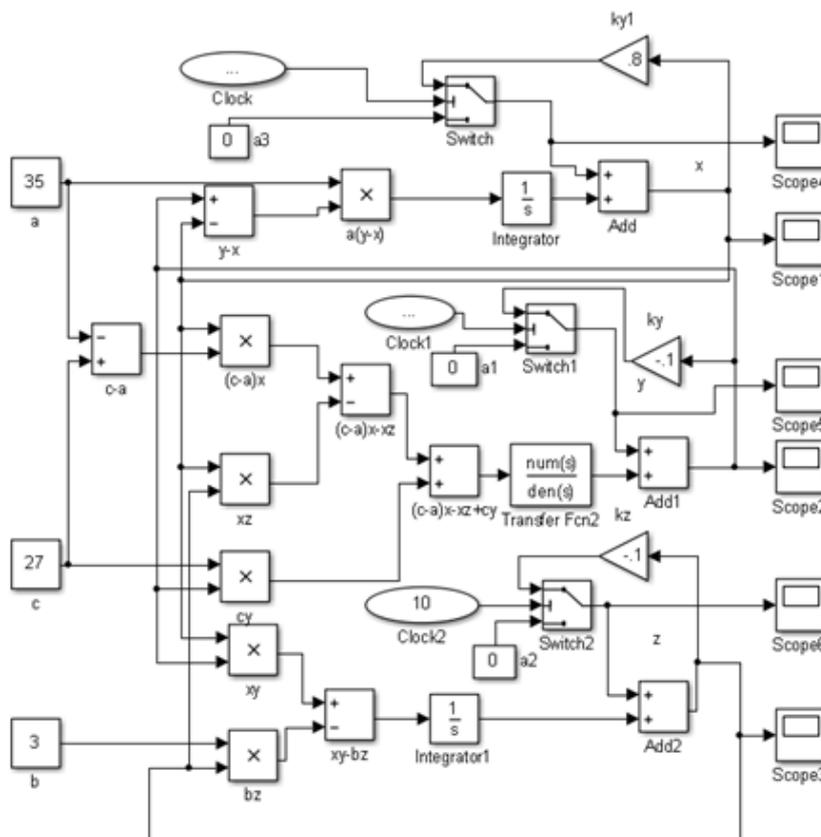


Fig.3.9 Schéma-bloc Matlab/Simulink pour le système de Chen fractionnaire contrôlé

La loi de commande est déclenchée à la troisième seconde, les résultats de simulation obtenus sont présentés dans les figures 3.10 et 3.11, où la première montre que pour  $(k_x, k_y, k_z) = (0.8, -0.1, -0.1)$  le contrôleur peut stabiliser le système fractionnaire de Chen sur le point fixe  $(-7.57, -7.54, 18.97)$ , et la deuxième prouve que le système est stable sur une orbite périodique pour  $(k_x, k_y, k_z) = (0.6, 0.5, 0.1)$ .

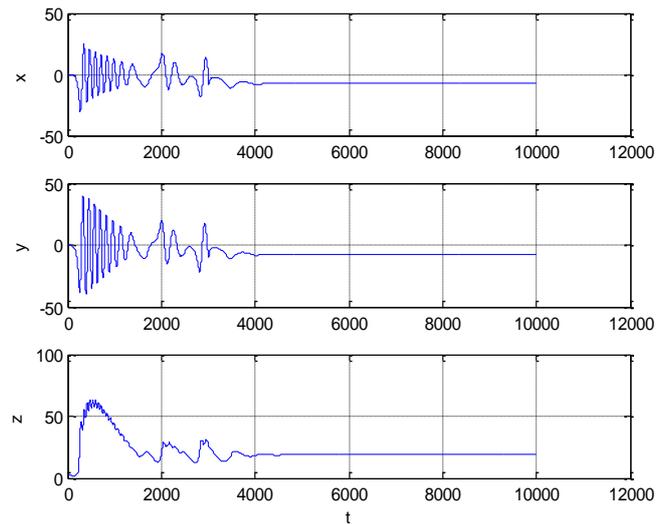


Fig.3.10 Système de Chen d'ordre fractionnaire contrôlé sur un point fixe

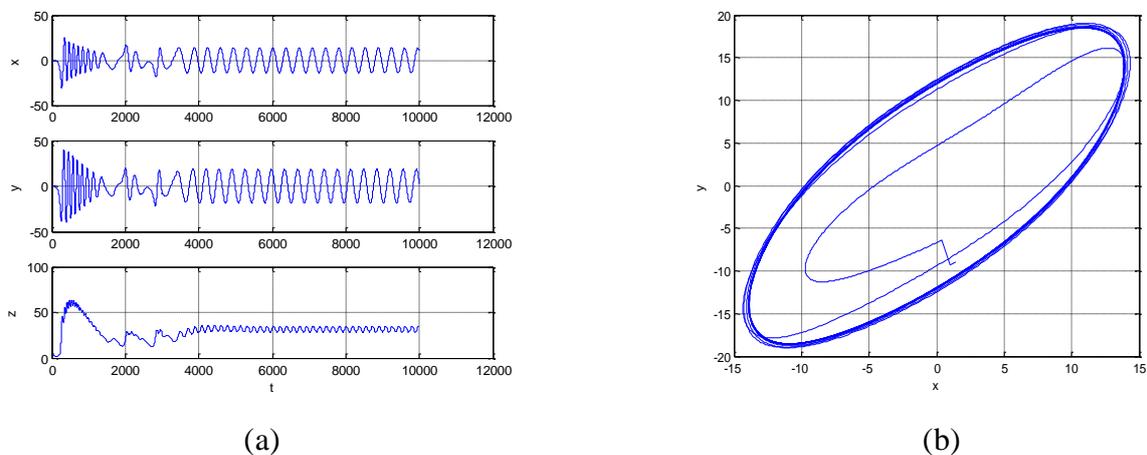


Fig.3.11 Système de Chen d'ordre fractionnaire contrôlé sur une orbite périodique : (a) Variables d'état et (b) Plan de phase (x,y)

### 3.5.2. Contrôle par un régulateur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

La commande PID est la technique la plus utilisée actuellement dans la commande des processus industriels. Sa fonction de transfert est bien connue sous la forme :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_I}{S} + k_D S \quad (3.4)$$

où  $E(s)$  représente l'erreur et  $U(s)$  la commande.

Podlubny [66] avait proposé une généralisation de cette commande, appelée commande  $PI^\lambda D^\mu$

d'ordre fractionnaire définie par sa fonction de transfert donnée sous la forme:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_I}{s^\alpha} + k_D s \quad (3.5)$$

L'équation différentielle correspondant à cette fonction de transfert, est donnée par :

$$u(t) = k_p e(t) + k_I I^\lambda e(t) + k_D D^\mu e(t) \quad (3.6)$$

La technique du contrôle par un  $PI^\lambda D^\mu$  d'ordre fractionnaire utilisé dans ce travail sera bien détaillée dans le chapitre 4.

### 3.5.3. Contrôle par mode glissant

#### 3.5.3.1. Introduction

La méthode de contrôle par mode glissant (SMC) est bien connue comme une technique de contrôle non linéaire robuste [67]. La principale caractéristique de SMC est qu'il peut changer la loi de commande très rapidement pour conduire les états du système à partir de tous les états initiaux sur une surface de glissement définie par l'utilisateur, et de maintenir les états sur la surface tous les temps ultérieur [67].

Cette stratégie de contrôle réalise une performance satisfaisante au regard des incertitudes paramétriques et des perturbations externes. Ces dernières années, elle est intensivement utilisée pour le contrôle et la synchronisation des systèmes chaotique fractionnaire. Dans l'article de M. S. Tavasoei et al [68], le contrôleur proposé est basé sur la théorie du mode de glissement actif pour faire une synchronisation entre deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires de Lu et de Chen identiques et différents (Lu-Lu, Chen-Chen, Lu-Chen) dans la structure maître-esclave. Les simulations sont mises en œuvre en utilisant deux différentes méthodes numériques pour résoudre les équations différentielles fractionnaires. Dans [69], en utilisant la même stratégie de contrôle, une synchronisation identique du système Duffing-Holmes en présence d'incertitudes et de perturbations a été proposée. Dans [70], la synchronisation entre deux systèmes incertains différents d'ordre fractionnaire chaotiques basés sur la commande adaptative floue et le mode de glissement a été traitée. Avec la définition des dérivées et des intégrales fractionnaires, une synthèse de l'approche de Lyapunov floue est proposée pour régler les paramètres libres du contrôleur flou adaptatif par la loi de la commande à retour d'état et la loi

d'adaptation. En outre, les phénomènes de vibration au niveau des efforts de contrôle peuvent être réduits. La procédure de conception en mode glissant assure non seulement la stabilité et la robustesse de la commande proposée, mais également la perturbation externe sur l'erreur de synchronisation peut être atténuée. Dans [71], un nouveau schéma du contrôle est proposé pour la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. L'approche utilise une combinaison d'un contrôleur classique coulissant et un contrôleur actif, où le contrôleur actif permet d'augmenter la force d'attraction de la surface de glissement. En utilisant la théorie de la fonction de Lyapunov, la synchronisation du système esclave avec le système maître est atteinte dans les deux cas identiques et différents. La synchronisation entre les deux systèmes chaotiques fractionnaires de Genesio-Tesi et d'Arneodo-Coullet est présentée comme un exemple démonstratif. Dans [72], la synchronisation du chaos du système Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire est étudiée via deux stratégies de contrôle différentes; contrôle actif et commande par mode glissant. Dans [73], un nouveau système chaotique d'ordre fractionnaire qui présente un comportement intéressant comme deux, trois, et quatre scrolls. La synchronisation entre deux tels systèmes est un problème intéressant. En utilisant la méthodologie du contrôle par mode glissant, une synchronisation de deux systèmes chaotiques d'une structure d'accouplement unidirectionnelle est achevée. Dans [74], un contrôleur par mode glissant adaptatif est proposé pour une nouvelle classe des systèmes chaotique d'ordre fractionnaire avec incertitude et perturbation externe. Des lois adaptatives appropriées sont désigné pour traiter l'incertitude et la perturbation externe. Dans la stratégie du contrôle, une dérivée d'ordre fractionnaire est introduite afin d'obtenir une nouvelle surface de glissement dans l'objectif d'une stabilité asymptotique. Le document [75], concerne le problème du contrôle des systèmes incertains d'ordre fractionnaire par la méthode du mode glissant d'ordre fractionnaire. Les lois de commande appliquées assurent la stabilité asymptotique dans la surface de glissement. L'ajustement des paramètres de ces derniers s'effectue en utilisant l'approche de l'inégalité des matrices linéaires(LMI). L'efficacité de la méthode est prouvée sur le circuit de Chua fractionnaire et l'oscillateur de Van-der-pol fractionnaire. Enfin, dans [76], un contrôleur adaptatif à mode glissant sans vibrations est proposé sans aucune information sur les bornes du terme incertain et la perturbation en se basant sur la théorie de la stabilité de Lyapunov et la technique du contrôle adaptatif. Le système de Lu incertain est utilisé comme un exemple.

### 3.4.3.2. Synthèse de la loi de commande

La commande par mode glissant est une commande à structure variable pouvant changer de structure et commutant entre deux valeurs suivant une logique de commutation bien spécifique  $S(x)$ .

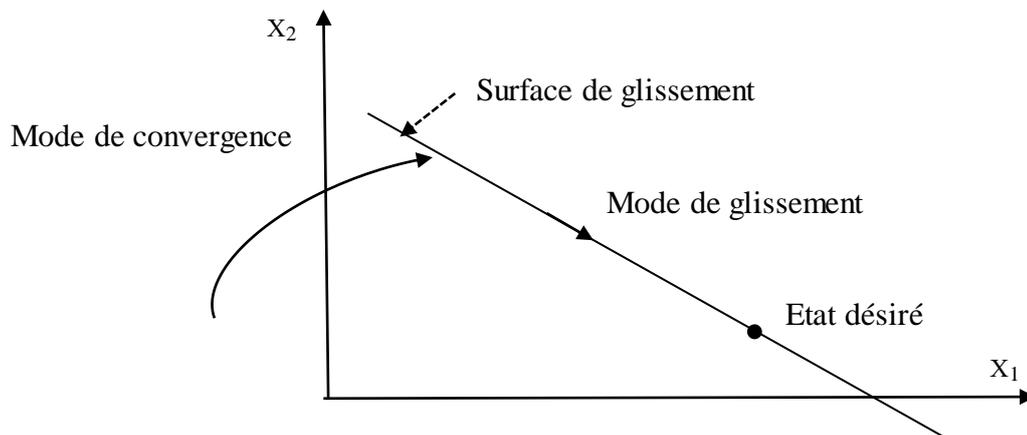


Fig. 3.12 Différents modes de convergence pour la trajectoire d'état

La synthèse de la commande par modes glissants se fait en trois étapes :

- choisir la surface de glissement.
- établir la condition de convergence.
- déterminer la loi de commande qui permet d'atteindre la surface et d'y demeurer.

#### ❖ Choix de la surface de glissement

Une forme générale qui consiste à définir une fonction scalaire des surfaces de glissement dans le plan de phase dans le but d'assurer la convergence d'une variable d'état  $x$  vers sa valeur de consigne a été proposée dans [77].

.Cette fonction est donnée par l'équation :

$$S(x) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e(x) \quad (3.7)$$

$\lambda$ : est un scalaire qui représente la pente de la surface de glissement.

#### ❖ Condition d'existence du mode glissant

Le choix de la fonction de glissement étant fait, la deuxième étape consiste à concevoir une loi de commande qui puisse amener le vecteur d'état à converger vers la surface et y demeurer ( $S=0$ ). Pour pouvoir affirmer qu'un régime glissant peut apparaître sur une surface, une condition suffisante existe en littérature, elle est appelée condition d'attractivité et s'écrit comme

suit :

$$\frac{1}{2} \dot{S}^2 = S \dot{S} < 0 \quad (3.8)$$

### ❖ Calcul de la commande

La commande par modes glissants consiste de ramener toutes les trajectoires du système dans l'espace d'état sur le vecteur de surfaces  $S(x)$ . Elle est composée de deux parties, la première est continue dite commande équivalente, la deuxième est discontinue.

$$u = u_{eq} + u_d \quad (3.9)$$

La commande équivalente sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement. Elle est obtenue grâce aux conditions d'invariance de la surface

$$\begin{cases} S = 0 \\ \dot{S} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Où  $u_{eq}$  est déduite de la relation  $\dot{S} = 0$ .

La commande discontinue assure la convergence de toutes les trajectoires du système vers la surface de glissement  $S(x) = 0$ . Pour la calculer, il suffit de vérifier la condition d'existence des régimes glissant.

## 3.6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a d'abord commencé par une introduction au chaos suivie par des définitions élémentaires des différents outils de caractérisation. Puis on a présenté une variété de méthodes de conception de contrôleur des systèmes chaotiques avec un exemple illustratif qui vérifié la chaoticité dans l'ordre fractionnaire à travers le diagramme de bifurcation. Le contrôleur proposé montre l'efficacité de ce type de commande du chaos. Dans ce qui suit, on s'intéresse d'un coté à la méthode de commande par un régulateur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire afin de contrôler des systèmes chaotiques d'ordre entier perturbés et d'un autre coté à la méthode du mode glissant et mode glissant adaptatif dans l'objet de la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire perturbés.

## Chapitre 4

# Contrôleurs $PI^\lambda D^\mu$ d'Ordre Fractionnaire Appliqués aux Systèmes Chaotiques

### 4.1. Introduction

Au cours des dernières années, l'émergence de méthodes efficaces pour résoudre les équations différentielles d'ordre non entier a rendu les systèmes d'ordre fractionnaire de plus en plus attrayants pour la communauté des systèmes de commande [71]-[78]-[79]. Pour améliorer les performances des systèmes de rétroaction linéaire, Podlubny [66] a proposé une généralisation du contrôleur proportionnel intégral dérivé (PID) classique à la forme  $PI^\lambda D^\mu$  appelé PID d'ordre fractionnaire, qui est récemment devenu très populaire en raison de sa flexibilité supplémentaire pour la conception de la commande. Depuis lors, les contrôleurs PID d'ordre fractionnaire (PIDOF) ont trouvé des applications dans plusieurs systèmes, par exemple dans [80], un contrôleur PIDOF est conçu pour prendre en charge diverses fonctions objectives contradictoires pour un régulateur de tension automatique (AVR). Une autre application d'un contrôleur fractionnaire est donnée dans [81] qui traite la conception d'un contrôleur PIDOF pour les systèmes d'ordre entier et fractionnaire. Dans [82], un PIDOF est conçu pour un système de régulation de turbine hydraulique (HTRS) en tenant compte de l'objectif des performances contradictoires. Les auteurs ont montré la supériorité des contrôleurs d'ordre fractionnaire par rapport aux contrôleurs d'ordre entiers au moyen d'une étude comparative entre les optimums de contrôleurs PID et PIDOF. Dans [83], les auteurs proposent une conception d'un PIDOF pour le contrôle du mouvement d'un navire à l'aide d'un algorithme d'optimisation par essaims de particules (PSO) intégrées au chaos. Dans [84], une conception optimale d'un contrôleur PIDOF pour un système AVR en utilisant un essaim de fourmi chaotique. Dans [85], en fonction de l'approche de contrôle adaptatif fractionnaire à grand gain, les auteurs ont

introduit de nouveaux paramètres de réglage pour l'amélioration de la performance du système contrôlé. Les algorithmes d'auto-ajustement pour les contrôleurs PIDOF ont également été proposés dans plusieurs travaux [80-[87]-82].

Le comportement chaotique des systèmes dynamiques peut être observé dans de nombreuses exemples pratiques de l'ingénierie et des sciences [44]. L'importance de ces applications fait du chaos l'un des sujets les plus populaires pour les chercheurs dans divers domaines scientifiques [50].

Les systèmes chaotiques sont également affectés par l'ordre fractionnaire, dans la modélisation, le contrôle ou les deux. Le travail de [89] est un exemple de stabilisation du système de Chen chaotique fractionnaire par un contrôle de rétroaction linéaire, et [90] présente la stabilisation du système chaotique de Genesio-Tesi à l'aide d'un PIDOF. Dans [91], la stabilisation des points fixes instables des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire est effectuée par un contrôleur proportionnel intégral d'ordre fractionnaire (PIOF). L'analyse de la stabilité de ces systèmes non linéaires à ordre fractionnaire a été étudiée en profondeur [92], où une description mathématique d'un théorème de stabilité de Lyapunov d'ordre fractionnaire a été présentée.

Dans ce chapitre, une nouvelle approche pour la conception d'un contrôleur proportionnel-intégral-dérivé d'ordres fractionnaires robustes ( $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ) est proposée pour stabiliser un système chaotique non linéaire perturbé sur l'un de ses points fixes instables. Le réglage des paramètres du contrôleur est basé sur un diagramme de bifurcation graphique couplé à un algorithme d'optimisation. Le problème de la stabilisation du chaos est étudié pour deux systèmes non linéaires: le système Multi-scroll Chen [93] et le système Genesio-Tesi [94]. L'analyse de la stabilité du système chaotique non linéaire est étudiée pour les actions intégrales et dérivées d'ordre fractionnaire en utilisant le diagramme de bifurcation. Le contrôleur est implémenté au moyen de la méthode numérique fractionnaire de Gründwald-Leitnikov. Les résultats montrent l'efficacité de l'action intégrale d'ordre fractionnaire dans la réalisation de la stabilité souhaitée même dans la présence de perturbation.

## 4.2. Stratégie de contrôle

Le régulateur  $PI^\lambda D^\mu$  est un mécanisme de rétroaction de la boucle de contrôle. Il est largement utilisé dans les systèmes de contrôles industriels. Il calcule une valeur d'erreur et tente de la minimiser en ajustant le processus à l'aide d'une variable manipulée [90]. Supposons un système avec la dynamique classique suivante,

$$\dot{X} = f(X) + u(t) \quad (4.1)$$

où  $X \in \mathfrak{R}^n$  et  $u(t)$  est le signal du contrôle.

La loi de commande du contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  est donnée par la fonction suivante:

$$u(t) = k_p X + k_I I^\lambda + k_D D^\mu X \quad (4.2)$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont l'ordre de d'intégration et de la dérivation respectivement.

Le schéma bloc du contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  proposé appliqué au système Multi-Scroll Chen [93] est montré dans la figure 4.1.

Dans ce travail on utilise les digrammes de bifurcation pour identifier les valeurs des gains  $k_p$ ,  $k_I$  et  $k_D$ . Pour choisir les valeurs correctes de l'ordre fractionnaire et optimiser les gains du contrôleur, on utilise un critère quadratique formulé comme suit :

$$J = \sqrt{\sum (x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 + (z - z_f)^2} \quad (4.3)$$

Où  $x, y, z$  sont les variables d'état et  $F = (x_f, y_f, z_f)$  est le point fixe désiré.

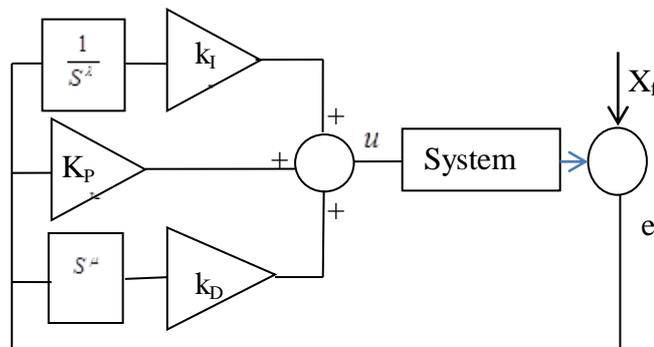


Fig. 4.1 Système de contrôle PIDOF

### 4.3. Procédure de conception

La méthodologie de conception proposée peut être représentée par l'algorithme suivant.

- **Étape 1:** Paramètres du contrôleur PID classique

Désigner d'abord les paramètres  $(k_p, k_I, k_D)$  par  $(k_1, k_2, k_3)$  respectivement.

- Initialiser  $(k_1^0, k_2^0, k_3^0)$ .

- Pour  $i = 1:3$

Tracer les diagrammes de bifurcation des variables d'états  $(x, y, z)$  en fonction de  $k_i$ .

- Trouver l'intervalle  $I_i$  où le système stabilise sur le point fixe souhaité pour  $k_i$

- Chercher la valeur du gain optimale  $k_{i-opt}$  sur l'intervalle en utilisant le critère quadratique défini dans l'équation (4.3).

- Mise à jour des gains  $k_i = k_{i-opt}$ .

Fin.

- **Étape 2:** Paramètres du contrôleur fractionnaire  $PI^{\lambda}D^{\mu}$

- Fixer les gains  $(k_p, k_I, k_D)$  aux valeurs optimales obtenues à l'étape 1.

- Mettre  $\mu = 1$ .

- Recherchez la valeur optimale  $\lambda_{opt}$  sur l'intervalle  $]0, 2[$  en utilisant le critère quadratique  $J$  définis dans (4.3).

- Mettre  $\lambda = \lambda_{opt}$ .

- Recherchez la valeur optimale  $\mu_{opt}$  sur l'intervalle  $]0, 2[$  en utilisant le même critère.

## 4.4. Exemples d'application

Dans cette partie, on a réalisé deux applications de la stratégie de contrôle présentée précédemment, d'abord pour contrôler le système chaotique Multi-scroll de Chen, puis pour contrôler le système chaotique Genesio-Tesi. La méthode numérique de Gründwald-Leitnikov définie dans le chapitre 1 est utilisée pour l'approximation numérique du système de contrôle à l'aide de Matlab / Simulink.

### 4.4.1. Système chaotique multi-scroll de Chen

Le système Multi-Scroll est dérivé du système de Chen dans [93]. Il est décrit par le modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a - z + d \sin y)x + cy \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $x, y, z$  sont les variables d'état,  $a, b, c$  sont les paramètres du système. Comme il est indiqué dans [95] ; quand  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$  et  $d = 8$ , Un attracteur à 6 scrolls est produit comme le montre la figure 4.2.

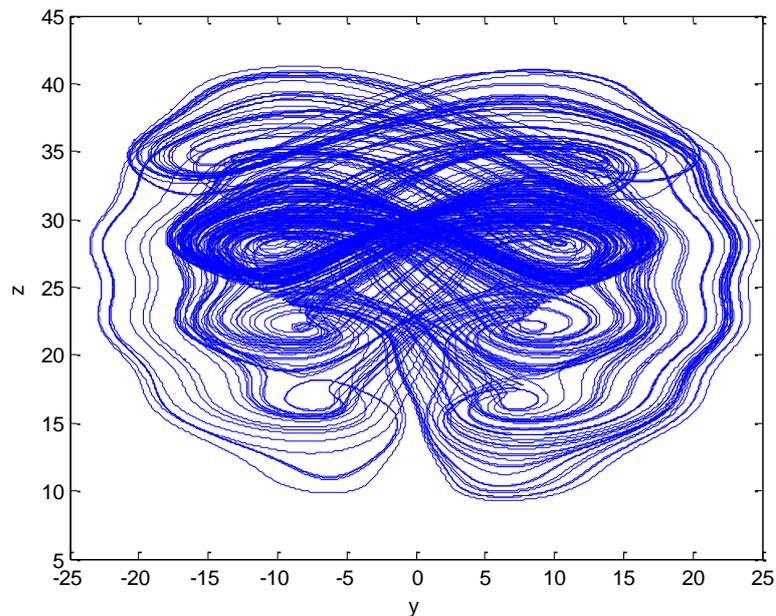


Fig. 4.2 Plan de phase du système Multi-Scroll de Chen

On calcule maintenant les points fixes du système Multi-Scroll de Chen. En résolvant l'équation  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0,0,0)$ , on a,

$$\dot{x} = a(y - x) = 0 \quad (4.5)$$

$$\dot{y} = (c - a - z + d \sin z)x + cy = 0 \quad (4.6)$$

$$\dot{z} = xy - bz = 0 \quad (4.7)$$

A partir de l'équation (4.5) on obtient,

$$x = y \quad (4.8)$$

En remplaçant (4.8) dans (4.7), on trouve,

$$z = x^2/b \quad (4.9)$$

Cela implique que pour chaque valeur de z il y a une valeur conjuguée pour x et y tel que,

$$x = y = \pm\sqrt{bz} \quad (4.10)$$

A partir de des équations (4.8), (4.9) et (4.6) on trouve,

$$f(x) = (2c - a)x - x^3/b + dx \sin x^2/b = 0 \quad (4.11)$$

L'équation (4.11) peut être résolue par la méthode graphique comme il est montré dans la figure 4.3.

$$F_{\pm 1} = (\pm 6.999, \pm 6.999, 16.331)$$

$$F_{\pm 2} = (\pm 7.457, \pm 7.457, 18.536)$$

$$F_{\pm 3} = (\pm 8.102, \pm 8.102, 21.88)$$

$$F_{\pm 4} = (\pm 9.059, \pm 9.059, 27.356)$$

$$F_{\pm 5} = (\pm 8.792, \pm 8.792, 25.771)$$

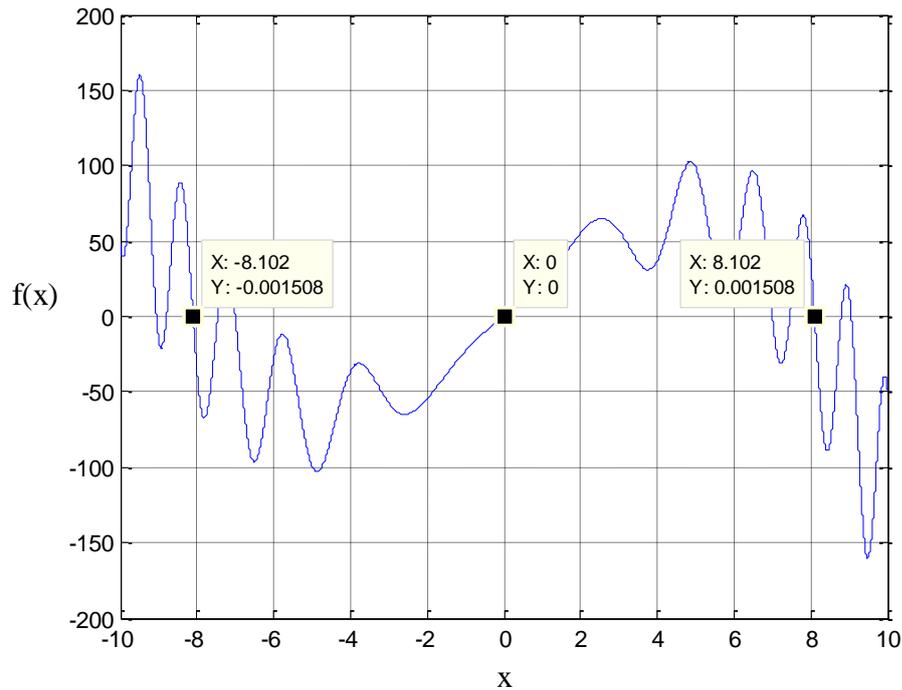


Fig. 4.3 Points fixes du système Multi-Scroll de Chen

Pour contrôler ce système sur son point fixe  $F_{\pm 3} = (\pm 8.102, \pm 8.102, 21.88)$  on va utiliser le contrôleur PID classique et  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  fractionnaire simultanément.

#### 4.4.1.1. Utilisation d'un contrôleur PID classique.

Dans cette partie, les paramètres  $(k_p, k_I, k_D)$  sont identifiés à l'aide du diagramme de bifurcation et du critère quadratique  $J$ . Tout d'abord, on fixe  $(k_I, k_D) = (0.08, 0.02)$  et on trace le diagramme de bifurcation qui présente l'évolution de l'état  $x$  en fonction du gain  $k_p$  représenté sur la figure 4.4. Selon ce diagramme, on détermine que le système se stabilise au point fixe souhaité pour  $k_p \in [0.67, 0.745]$ . Ainsi, la recherche de la valeur optimale  $k_{p-opt}$  à l'aide du critère quadratique est limitée à cet intervalle tel que présenté dans la figure 4.5.

Une fois qu'on a la valeur optimale  $k_{p-opt} = 0.67$ , on la fixe et on garde  $k_D = 0.02$  puis on trace l'évolution de l'état  $x$  en fonction de  $k_I$ . Cette dernière est présentée dans la figure 4.6. Dans ce cas, la convergence est garantie pour  $k_I \in [0.01, 0.08]$ , alors la valeur optimale  $k_{I-opt}$  est tirée de la figure 4.7 qui montre l'évolution du critère quadratique  $J$  par rapport au gain  $k_I$ .

Maintenant, on a les deux valeurs optimales  $(k_{p-opt}, k_{I-opt}) = (0.67, 0.08)$ , on recherche le

troisième paramètre par la même procédure. Pour cela, l'évolution de l'état  $x$  et le critère quadratique  $J$  versus  $k_D$  sont présentés respectivement dans la figure 4.8 et la figure 4.9. Le système atteint le point fixe souhaité pour  $k_D = 0.01$ ,  $k_D = 0.02$  et aussi pour  $k_D \in [0.25, 0.47]$ .

Les valeurs de  $J$  correspondant aux trois paramètres qui garantissent la stabilité du système sur le point fixe souhaité sont présentés dans le tableau 4.1, le tableau 4.2 et le tableau 4.3. Par conséquent, on peut facilement déterminer  $k_{D-opt}$ .

A cette étape, on a les trois paramètres de contrôle optimum  $(k_{P-opt}, k_{I-opt}, k_{D-opt}) = (0.67, 0.08, 0.37)$ , et on peut contrôler le système Multi-Scroll de Chen. Les réponses résultantes du contrôle du système sont présentées sur les figures 4.10 et 4.11. La commande est déclenchée à l'instant  $t=5$ sec.

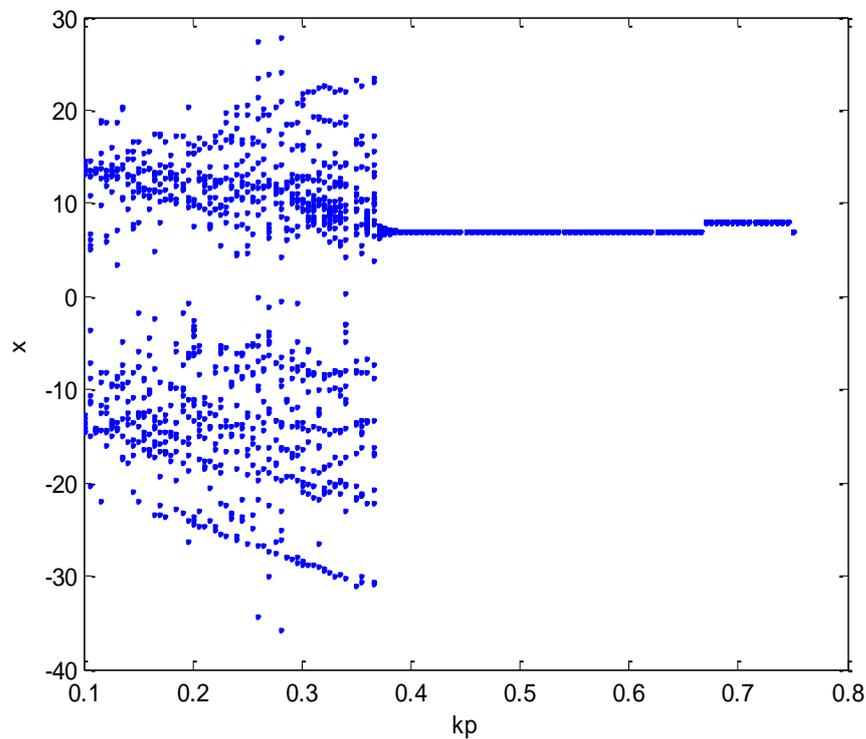


Fig. 4.4 Diagramme de bifurcation  $x = f(k_p)$

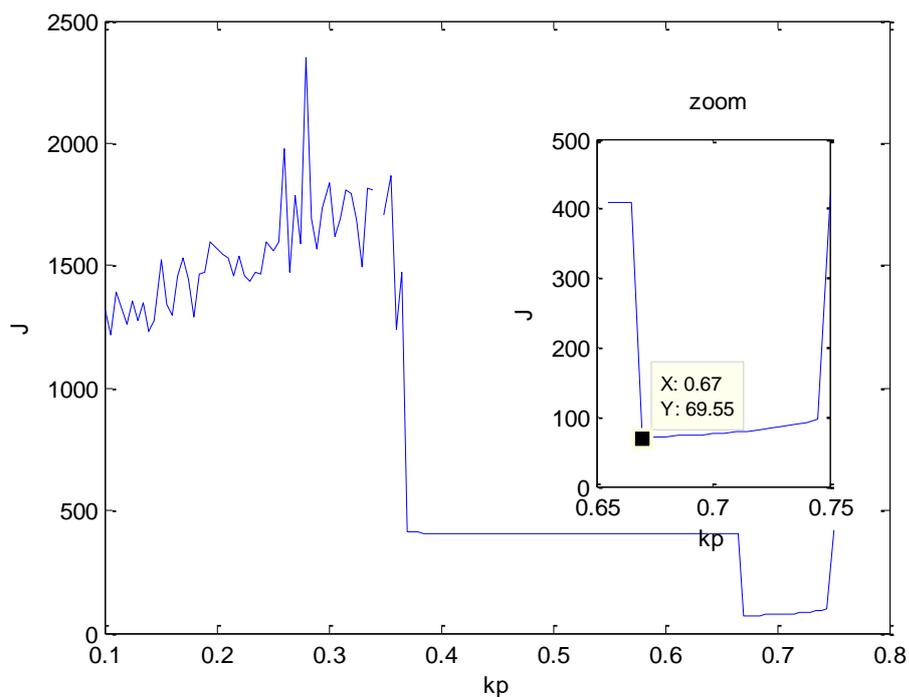


Fig. 4.5 Critère quadratique  $J = f(k_p)$

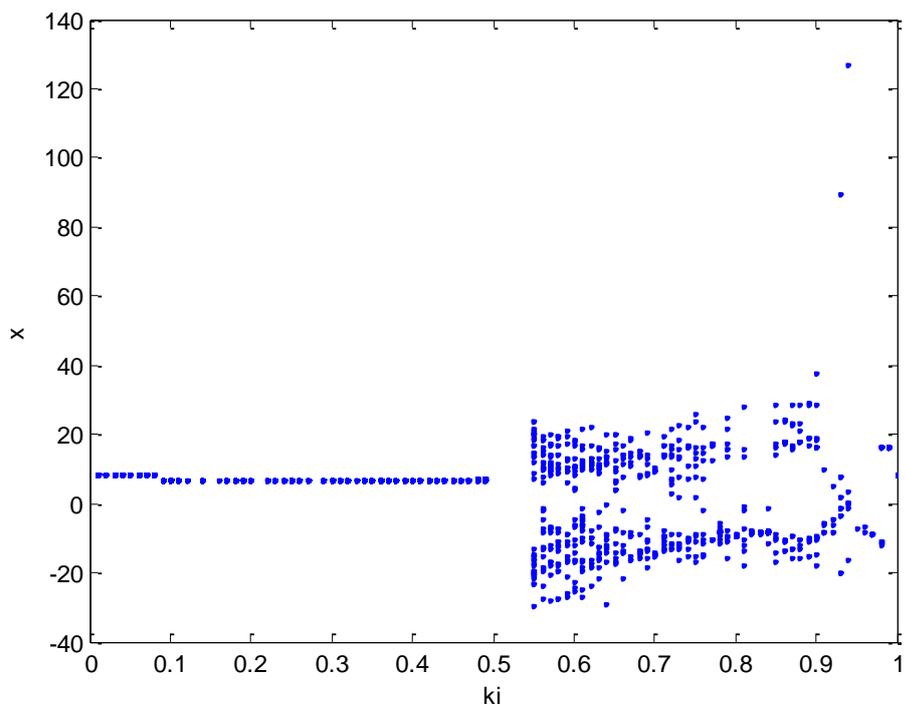


Fig. 4.6 Diagramme de bifurcation  $x = f(k_i)$

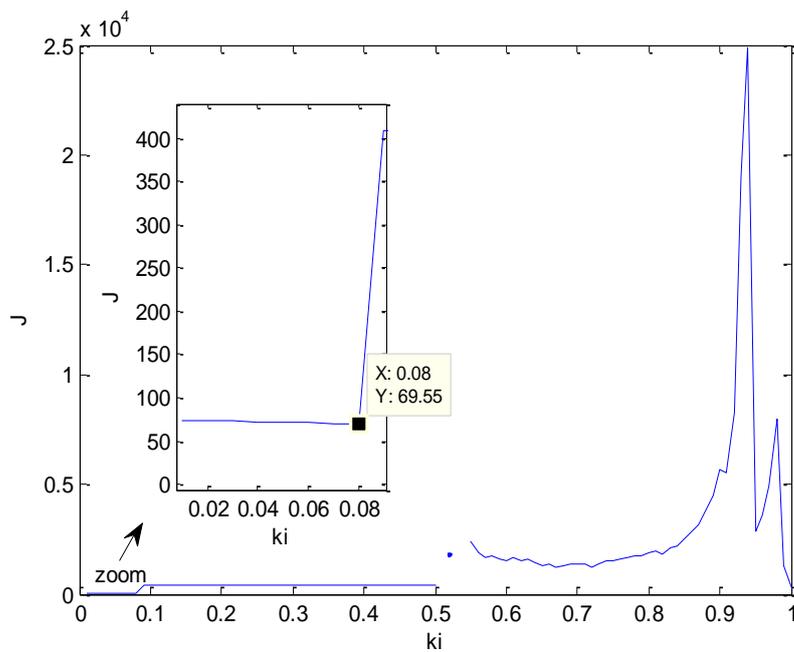


Fig. 4.7 Critère quadratique  $J = f(k_I)$

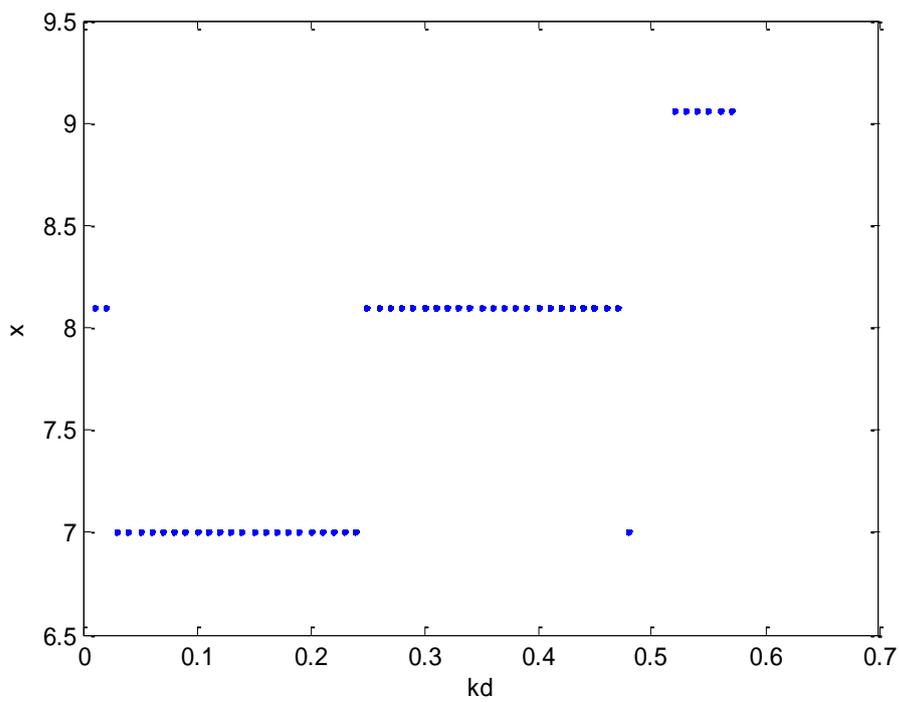
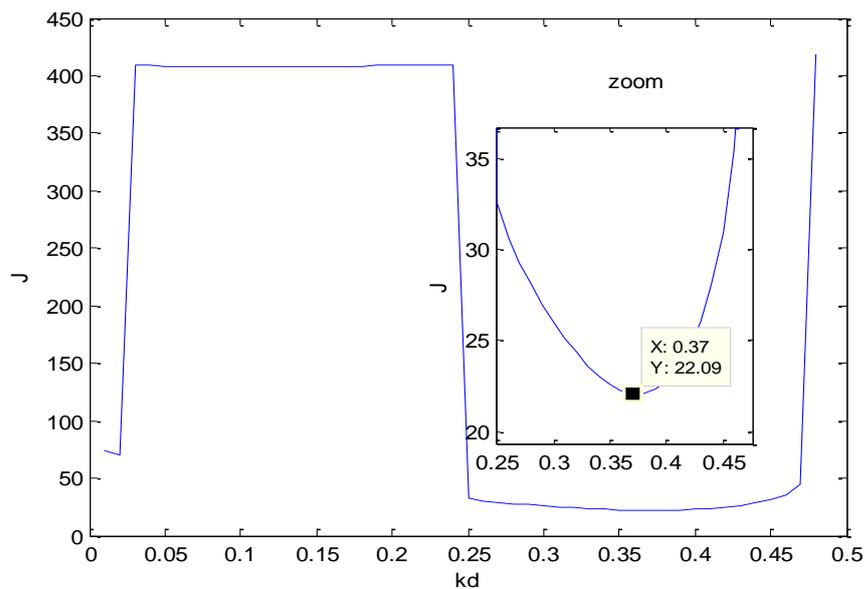


Fig. 4.8 Diagramme de bifurcation  $x = f(k_D)$

Fig. 4.9 Critère quadratique  $J = f(k_D)$ Tableau 4.1  $J = f(k_p)$ 

$k_p$	$J$
<b>0.670</b>	69.55
<b>0.675</b>	70.59
<b>0.680</b>	71.49
<b>0.685</b>	72.37
<b>0.690</b>	73.27
<b>0.695</b>	74.24
<b>0.700</b>	75.30
<b>0.705</b>	76.47
<b>0.710</b>	77.77
<b>0.715</b>	79.26
<b>0.720</b>	80.95
<b>0.725</b>	82.93
<b>0.730</b>	85.28
<b>0.735</b>	88.13
<b>0.740</b>	91.75

Tableau 4.2  $J = f(k_I)$ 

$k_I$	$J$
<b>0.01</b>	74.17
<b>0.02</b>	73.49
<b>0.03</b>	72.83
<b>0.04</b>	72.20
<b>0.05</b>	71.58
<b>0.06</b>	70.95
<b>0.07</b>	70.27
<b>0.08</b>	69.55

Tableau 4.3  $J = f(k_D)$ 

$k_D$	$J$
<b>0.01</b>	73.69
<b>0.02</b>	69.55
<b>0.25</b>	32.62
<b>0.27</b>	29.22
<b>0.29</b>	26.97
<b>0.31</b>	25.12
<b>0.33</b>	23.63
<b>0.35</b>	22.58
<b>0.37</b>	22.09
<b>0.39</b>	22.32
<b>0.41</b>	23.50
<b>0.43</b>	26.04
<b>0.45</b>	30.96
<b>0.47</b>	45.15

#### 4.4.1.2. Utilisation d'un contrôleur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire

A cette étape, on a les trois paramètres optimaux  $(k_{P\_opt}, k_{I\_opt}, k_{D\_opt}) = (0.67, 0.08, 0.37)$ , et on doit obtenir les valeurs optimales  $\lambda_{opt}$  et  $\mu_{opt}$  pour que le système atteigne le point fixe souhaité. Pour cela, on utilise le critère quadratique défini précédemment. En mettant  $\mu = 1$  et en variant  $\lambda$  entre 0.7 et 3, les valeurs  $J$  obtenues sont rassemblées dans le tableau 4.4. Au-delà de 2 ( $\lambda = 2$ ), les valeurs de  $J$  varient autour de 22, mais le système se stabilise légèrement autour du point désiré. A partir des résultats obtenus, la meilleure valeur de  $J$  est pour  $\lambda_{opt} = 1.05$ .

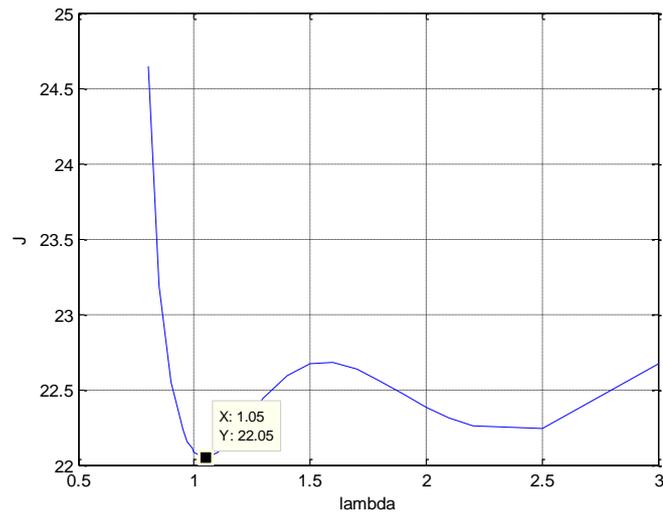


Fig. 4.10 Critère quadratique  $J = f(\lambda)$

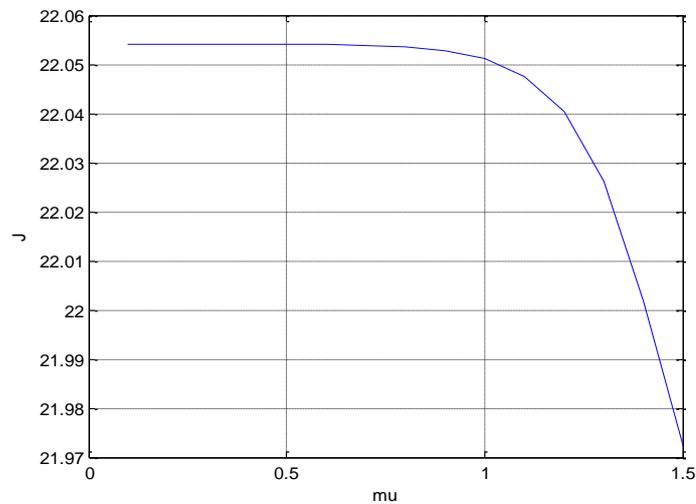


Fig. 4.11 Critère quadratique  $J = f(\mu)$

On met  $\lambda_{opt} = 1.05$ , et on cherche la valeur optimale  $\mu_{opt}$  en calculant le critère  $J$  pour

différentes valeurs de  $\mu$ .

Tableau 4.4  $J = f(\lambda)$

$\lambda$	$J$	$x$	$y$	$z$
<b>0.70</b>	Nan	Divergence		
<b>0.75</b>	30.9131	8.101	8.101	21.881
<b>0.80</b>	24.6470	8.101	8.101	21.881
<b>0.85</b>	23.1903	8.102	8.101	21.881
<b>0.90</b>	22.5495	8.102	8.101	21.881
<b>0.95</b>	22.2310	8.102	8.102	21.881
<b>0.97</b>	22.1573	8.102	8.102	21.881
<b>0.99</b>	22.1060	8.102	8.102	21.881
<b>1.00</b>	22.0874	8.102	8.102	21.881
<b>1.01</b>	22.0731	8.102	8.102	21.881
<b>1.03</b>	22.0557	8.102	8.102	21.881
<b>1.05</b>	22.0511	8.102	8.102	21.881
<b>1.07</b>	22.0571	8.102	8.102	21.881
<b>1.09</b>	22.0720	8.102	8.103	21.881
<b>1.10</b>	22.0821	8.102	8.103	21.881
<b>1.15</b>	22.1536	8.103	8.103	21.881
<b>1.20</b>	22.2459	8.103	8.103	21.881
<b>1.25</b>	22.3446	8.103	8.104	21.881
<b>1.30</b>	22.4390	8.104	8.104	21.881
<b>1.40</b>	22.5889	8.104	8.106	21.881
<b>1.50</b>	22.6680	8.105	8.107	21.881
<b>1.60</b>	22.6774	8.106	8.109	21.881

---

<b>1.70</b>	22.6332	8.108	8.111	21.880
<b>1.80</b>	22.5565	8.109	8.114	21.880
<b>1.90</b>	22.4671	8.111	8.116	21.880
<b>2.00</b>	22.3805	8.113	8.120	21.880
<b>2.10</b>	22.3077	8.115	8.123	21.880
<b>2.20</b>	22.2553	8.117	8.127	21.980
<b>2.50</b>	22.2446	8.127	8.142	21.879
<b>3.00</b>	22.6732	8.149	8.178	21.878

---

Tableau 4.5  $J = f(\mu)$ 

$\mu$	$J$	$x$	$y$	$z$
<b>0.1</b>	22.0540	8.102	8.102	21.881
<b>0.2</b>	22.0540	8.102	8.102	21.881
<b>0.3</b>	22.0540	8.102	8.102	21.881
<b>0.4</b>	22.0540	8.102	8.102	21.881
<b>0.5</b>	22.0540	8.102	8.102	21.881
<b>0.6</b>	22.0540	8.102	8.102	21.881
<b>0.7</b>	22.0539	8.102	8.102	21.881
<b>0.8</b>	22.0535	8.102	8.102	21.881
<b>0.9</b>	22.0528	8.102	8.102	21.881
<b>1</b>	22.0511	8.102	8.102	21.881
<b>1.1</b>	22.0475	8.102	8.102	21.881
<b>1.2</b>	22.0403	8.102	8.102	21.881
<b>1.3</b>	22.0263	8.102	8.102	21.881
<b>1.4</b>	22.0017	8.102	8.102	21.881
<b>1.5</b>	<b>21.9723</b>	<b>8.102</b>	<b>8.102</b>	<b>21.881</b>
<b>1.6</b>	149.783	Variation autour d'un point fixe		
<b>1.7</b>	Nan	Divergence		

On a finalement défini les cinq valeurs optimales. Afin de tester la robustesse du contrôleur fractionnaire, on introduit une perturbation aléatoire à l'entrée comme suit,

$$U = U + A * rand \quad (4.12)$$

Dans ce cas  $A = 0.02$ . Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 4.12 et la figure 4.13.

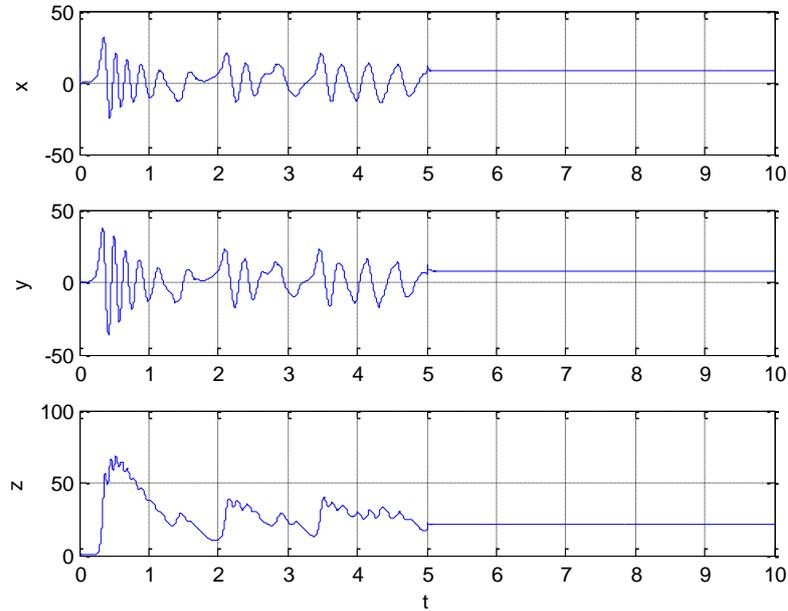


Fig. 4.12 Variables d'état du système Multi-Scroll de Chen perturbé contrôlé

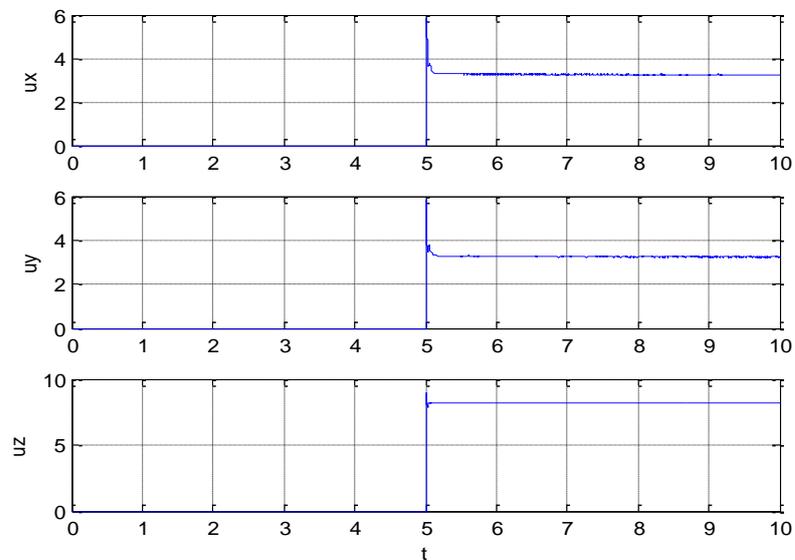


Fig. 4.13 Signal de contrôle  $PI^{\lambda}D^{\mu}$

#### 4.4.2. Système chaotique de Genesio-Tesi

De nombreux chercheurs ont été attirés par le problème du contrôle et de la synchronisation du système non linéaire de Genesio-Tesi[94]. Ils ont proposé différentes stratégies de contrôle et de synchronisation telles que le contrôle adaptatif[90-91-92], l'approche d'optimisation de l'inégalité matricielle linéaire (LMI) [99], le contrôle par mode glissant[100][101], le contrôle de rétroaction à variable unique[102] et le contrôle par back-stepping[103].

Le système de Genesio-Tesi est défini par le modèle mathématique suivant,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -cx - by - az + x^2 \end{cases} \quad (4.13)$$

Quand  $(a,b,c)=(1.2,2.992,6)$ , tel qu'indiqué dans [104], le système Genesio-Tesi présente un comportement chaotique comme le montre la figure 4.14. Dans cette simulation numérique, les conditions initiales sont les mêmes utilisées dans [104] :  $x(0)=-1.0032$ ,  $y(0)=2.3445$  et  $z(0)=-0.087$ . Par une simple analyse, on obtient deux points fixes instables  $F_1=(0,0,0)$  et  $F_2=(6,6,0)$ . Pour stabiliser le système sur le point fixe d'origine  $F_1=(0,0,0)$ , on utilise la même procédure appliquée au système Multi-Scroll de Chen.

##### 4.4.2.1. Utilisation d'un contrôleur PID classique.

Ici, les diagrammes de bifurcation sont tracés pour obtenir les limites d'intervalles pour les paramètres  $(k_p, k_I, k_D)$  qui seront optimisés en utilisant un critère quadratique. On commence par varier l'état  $x$  en fonction de  $k_p$  tel que présenté dans la figure 4.15 avec  $(k_i, k_d)=(0.1,0.2)$ . Le système se stabilise sur le point voulu pour  $k_p \in [0.8, 0.998]$ .

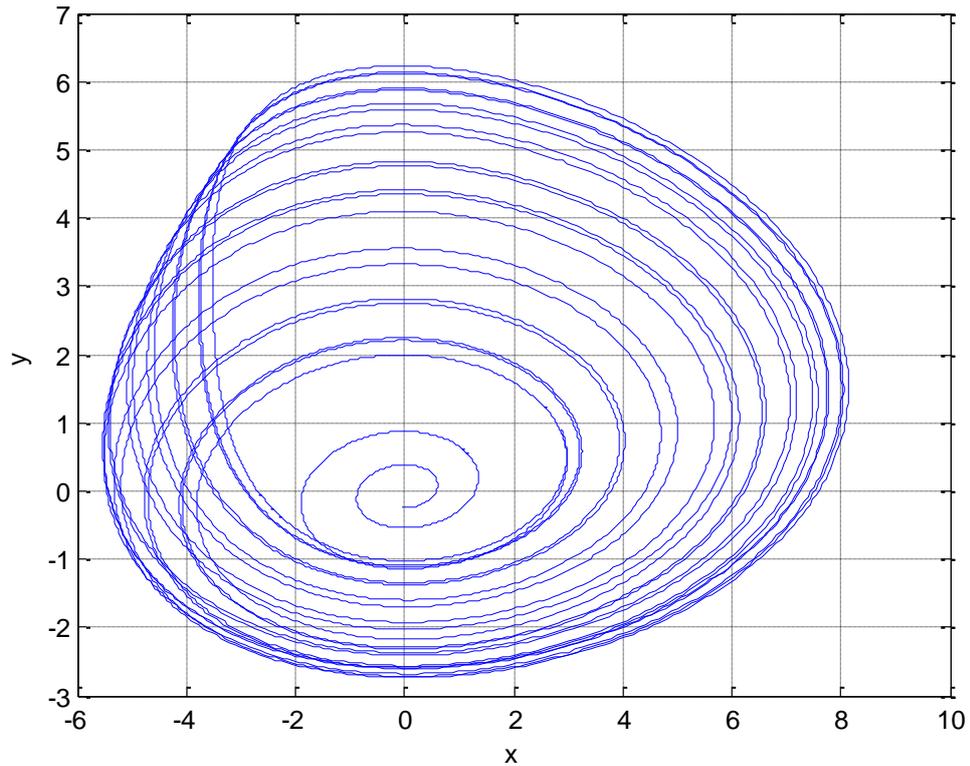


Fig. 4.14 Portrait de phase du système de Genesis-Tesi

Pour  $k_p > 1$  le système diverge. Selon la figure 4.16,  $J$  est optimal pour  $k_{p-opt} = 0.998$ . Pour avoir le deuxième paramètre optimal  $k_{I-opt}$ , on garde  $k_D$  et on met  $k_p = k_{p-opt}$  et on trace le diagramme de bifurcation et le critère quadratique qui sont présentés respectivement dans la figure 4.16 et figure 4.17. La figure 4.16 montre qu'il existe une stabilité sur le point fixe souhaité pour  $k_I \in [0, 0.16]$ , mais le calcul du critère quadratique optimal prouve que  $k_{p-opt} = 0$ . Pour cela, on se limite à la recherche d'un contrôleur  $PD^u$  optimal. La variation de l'état  $x$  et le critère quadratique en fonction du paramètre  $k_D$  sont donnés dans la figure 4.18 et la figure 4.19 respectivement. A partir de cette étude, on extrait le troisième paramètre de contrôleur optimal  $k_{D-opt} = 0.281$ .

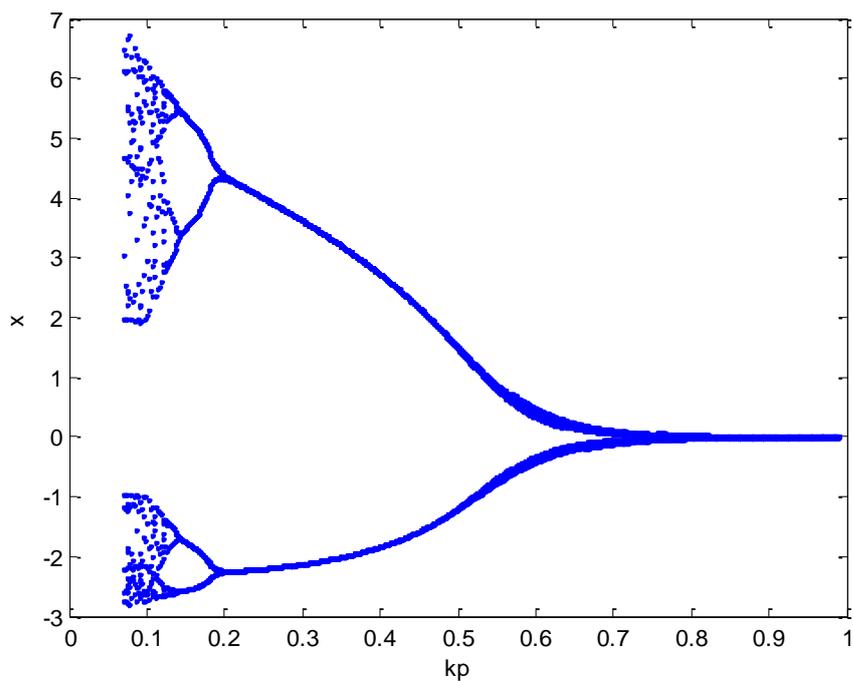


Fig. 4.15 Diagramme de bifurcation  $x = f(k_p)$

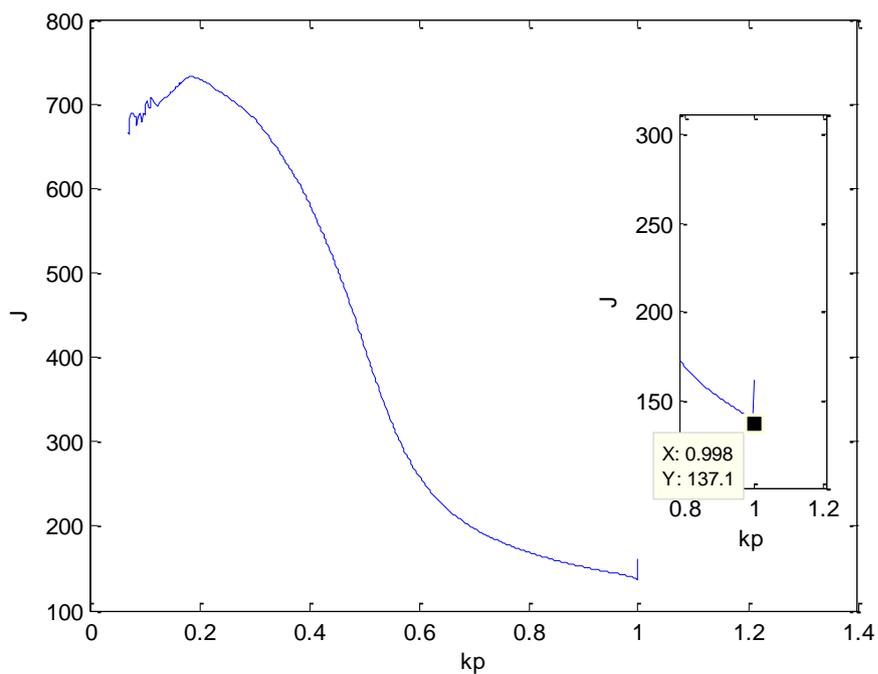
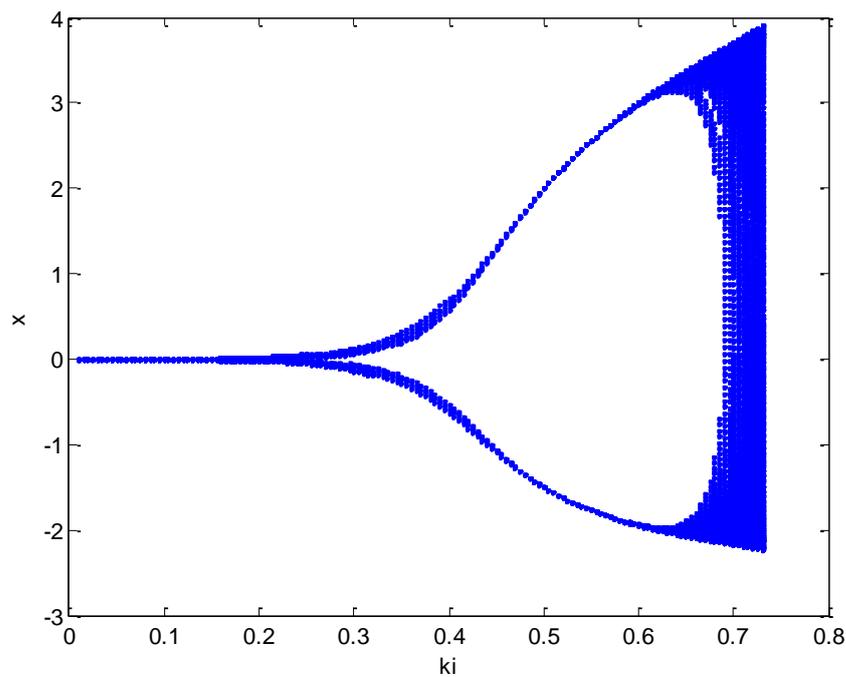
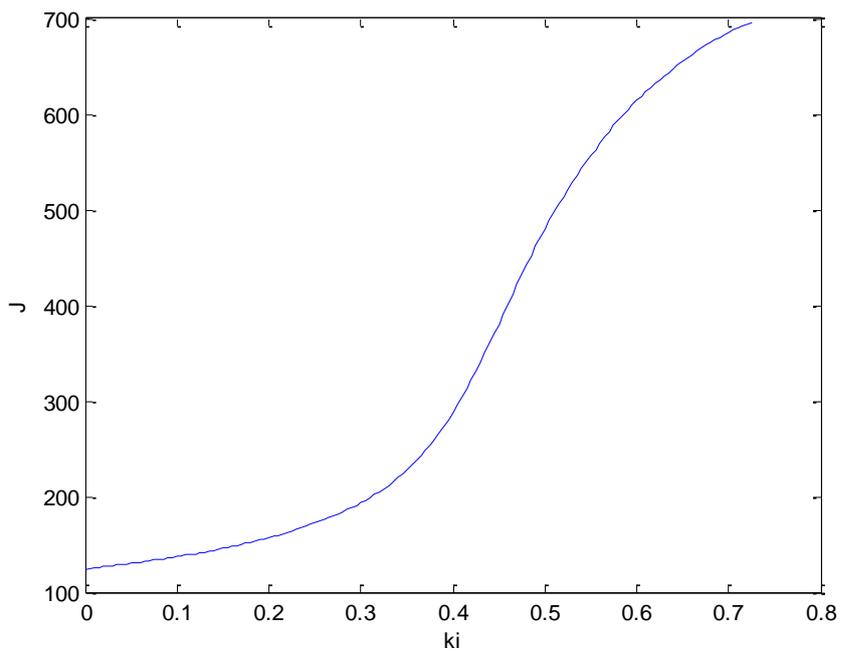
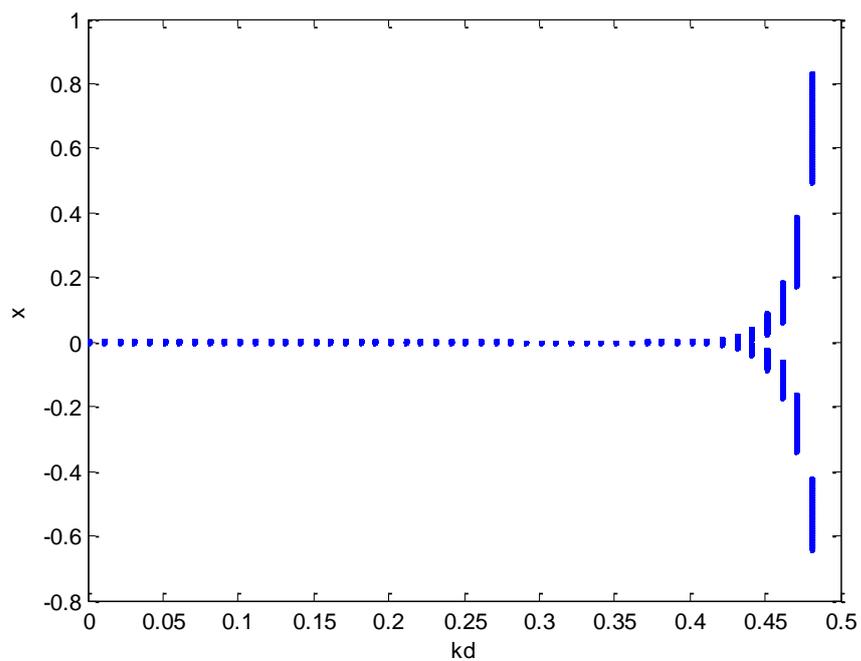
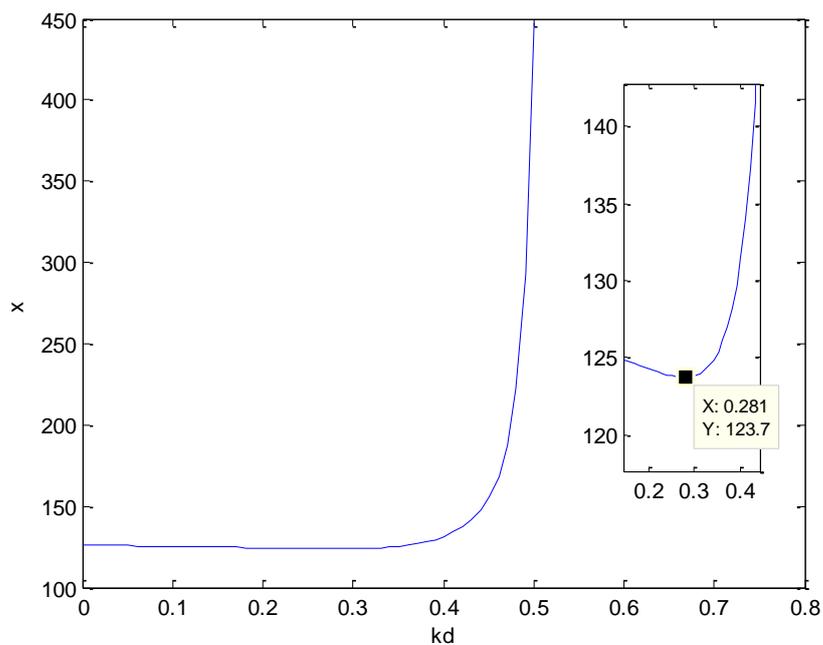


Fig. 4.16 Critère quadratique  $J = f(k_p)$

Fig. 4.17 Diagramme de bifurcation  $x = f(k_i)$ .Fig. 4.18 Critère quadratique  $J = f(k_i)$

Fig. 4.19 Diagramme de bifurcation  $x = f(k_D)$ .Fig. 4.20 Critère quadratique  $J = f(k_D)$

#### 4.4.2.2. Utilisation d'un contrôleur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ fractionnaire

Après avoir identifié les paramètres du contrôleur classique, on cherche l'ordre fractionnaire de l'action dérivée pour créer un contrôleur fractionnaire optimal. Le choix de l'ordre fractionnaire  $\mu$  est basé sur le critère quadratique. On varie  $\mu$  entre 0.1 et 1.1. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 6.

En appliquant le contrôleur optimal sur le système chaotique de Genesio-Tesi, ce contrôleur stabilise le système sur le point fixe  $F_1 = (0,0,0)$  comme le montre la figure 4.22 et la figure 4.23. On a finalement décrit les paramètres optimaux du contrôleur. Maintenant, on essaye de tester la robustesse du contrôleur. Le système est perturbé par un bruit d'entrée ajouté tel que défini dans l'équation (4.12). Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 4.24 et figure 4.25.

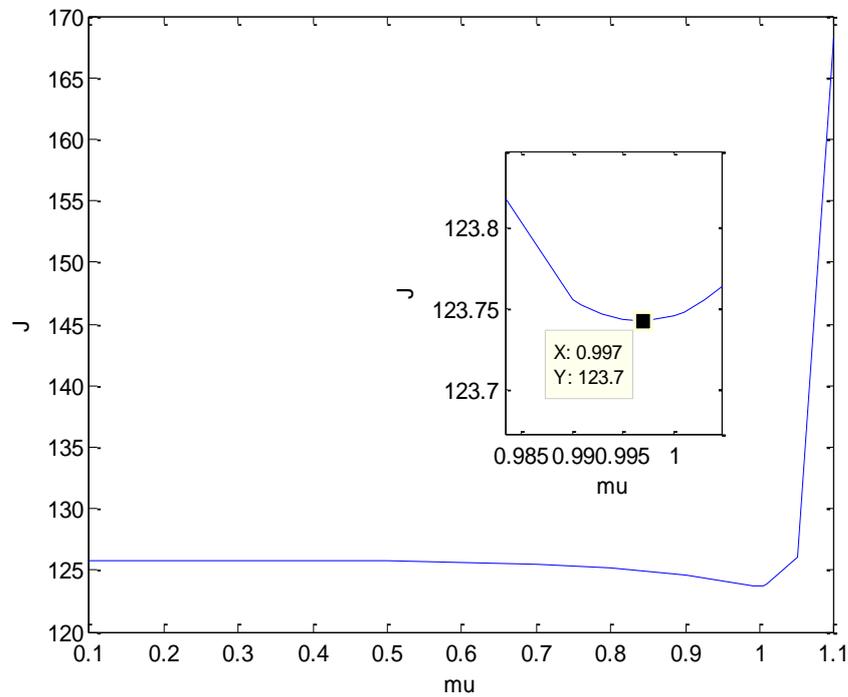


Fig. 4.21 Critère quadratique  $J = f(\mu)$

Tableau 4.6  $J = f(\mu)$ 

---

$\mu$	$J$
<b>0.100</b>	125.8101
<b>0.200</b>	125.8036
<b>0.300</b>	125.7925
<b>0.400</b>	125.7731
<b>0.500</b>	125.7381
<b>0.600</b>	125.6719
<b>0.700</b>	125.5387
<b>0.800</b>	125.2510
<b>0.900</b>	124.6098
<b>0.990</b>	123.7556
<b>0.991</b>	123.7522
<b>0.993</b>	123.7468
<b>0.995</b>	123.7435
<b>0.997</b>	123.7424
<b>0.999</b>	123.7438
<b>1.000</b>	123.7456
<b>1.001</b>	123.7480
<b>1.003</b>	123.7551
<b>1.005</b>	123.7655
<b>1.010</b>	123.8078
<b>1.050</b>	126.0309
<b>1.100</b>	168.1654

---

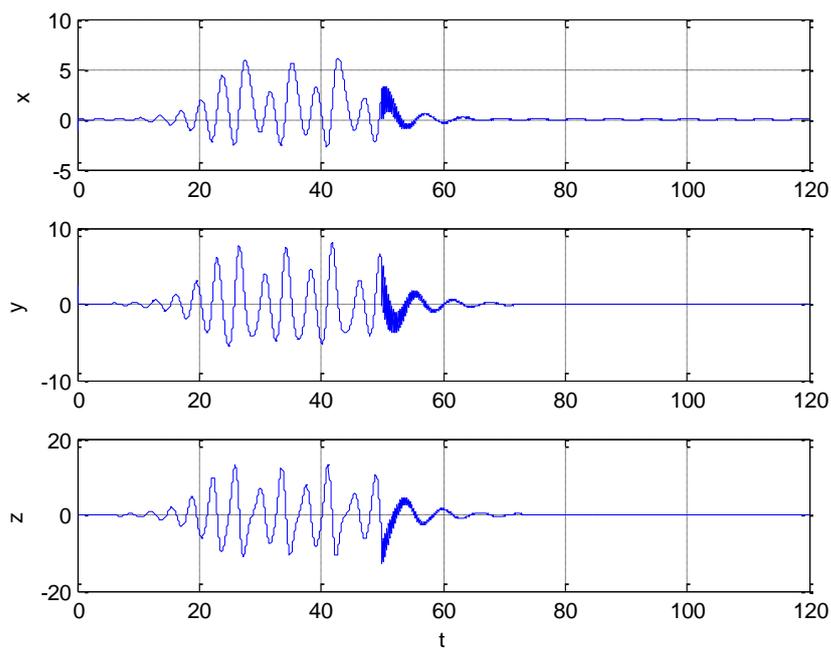
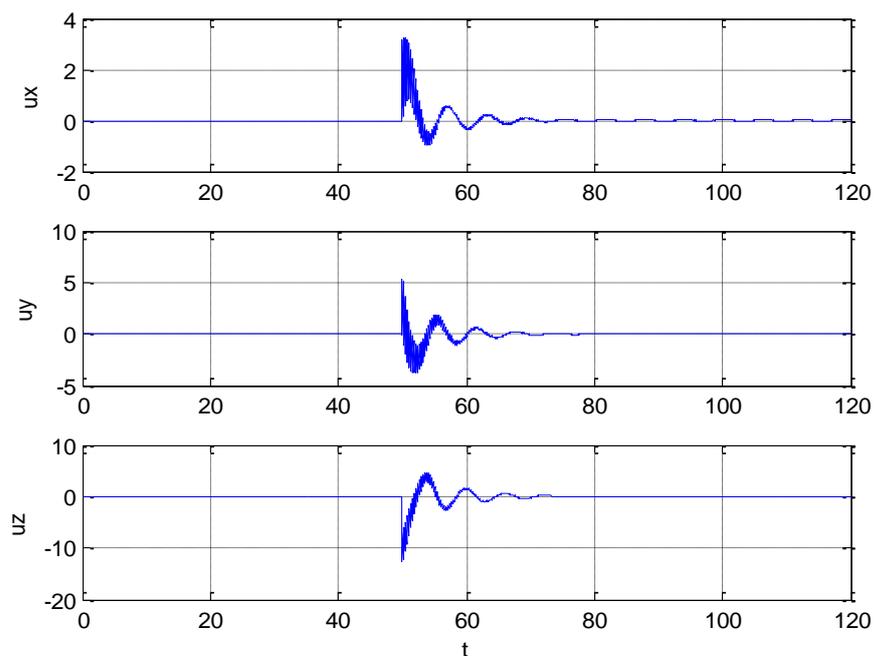


Fig. 4.22 Variables d'état du système de Genesisio-Tesi contrôlé

Fig. 4.23 Signal de contrôle du  $PD^u$

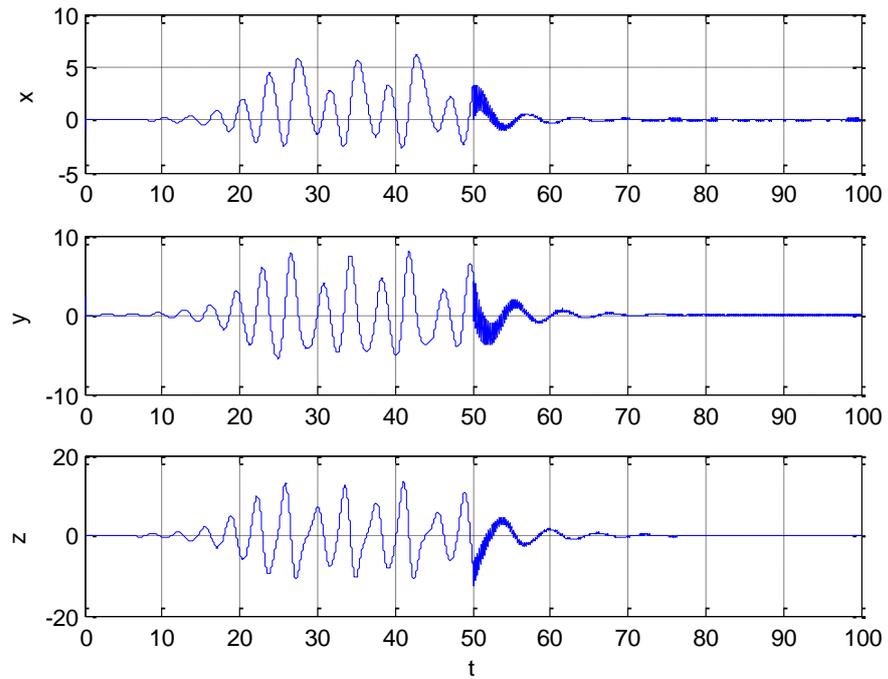
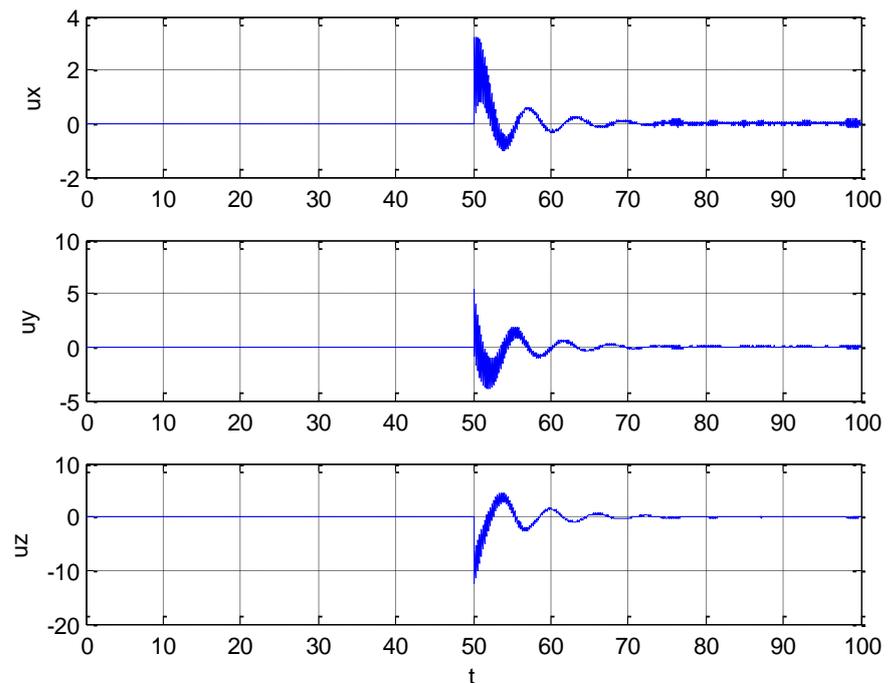


Fig. 4.24 Variables d'état du système de Genesio-Tesi contrôlé perturbé

Fig. 4.25 Signal de contrôle du  $PD^{\mu}$  pour le système perturbé

## 4.5. Conclusion

Un contrôleur PIDOF robuste a été étudié pour stabiliser un système chaotique sur l'un de ses points fixes. Les trois paramètres,  $k_p$ ,  $k_I$  et  $k_D$  ont été initialement définis dans le diagramme de bifurcation, puis optimisés au moyen du critère d'erreur quadratique, qui comprend les ordres fractionnaires. On remarque que les variables d'état du système contrôlé sont stabilisées asymptotiquement sur le point fixe souhaité même en présence d'une perturbation aléatoire.

En utilisant des simulations numériques de l'approche de conception proposée dans le premier exemple du système Multi-scroll de Chen, on constate que le contrôleur  $PI^\lambda D^\mu$  fractionnaire fournit la meilleure performance du système en boucle fermée pour la stabilisation d'un point fixe instable par rapport à des recherches antérieures. Dans l'exemple du système de Genesio-Tesi, le contrôleur proportionnel dérivé fractionnaire présente une amélioration du comportement du système par rapport au contrôleur d'ordre entier.

## Chapitre 5

# Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires avec un régulateur par mode glissant fractionnaire

### 5.1. Introduction

Récemment, le calcul fractionnaire a attiré de nombreux chercheurs dans le domaine des systèmes dynamiques à comportement chaotique, tels que le système de Chen [12], le circuit de Chua [11], le système de Newton–Leipnik[15], le système de Duffing[105], Duffing modifié [14], le système de Lü[106], le modèle logistique et logistique retardé [46-47]. Le système d'Arneodo [107]...

Comme il est connu, après l'apparition des articles d'Ott-Grebogi-York[7] et de Pecora-Carroll[8], la commande et la synchronisation du chaos fait l'objet d'une attention particulière dans diverses disciplines en science et l'ingénierie que ce soit pour les systèmes d'ordre entier ou fractionnaire. Depuis lors, plusieurs recherches ont été établies dans ce sens en utilisant différentes méthodes.

Pour les systèmes chaotiques, il y a trois problèmes à résoudre: suppression, chaotification et synchronisation. La synchronisation ou le contrôle d'un système chaotique est une tâche difficile en raison de la caractéristique principale des systèmes chaotiques est leur sensibilité élevée aux conditions initiales. Mais il y a de plus en plus d'efforts de recherche dans cette thématique en raison de plusieurs applications potentielles, en particulier dans la cryptographie[108].

Pour le cas particulier des systèmes d'ordre fractionnaire avec une dynamique chaotique, de nombreuses méthodes ont été introduites pour réaliser la synchronisation du chaos, comme la commande par PC [109], le contrôle par  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire [110], la méthode d'observation de l'état non linéaire[111], la commande adaptative[112], et le contrôle par mode

glissant.

La méthode de contrôle par mode glissant est bien connue comme une technique de contrôle non linéaire robuste. La principale caractéristique de SMC est qu'elle peut changer la loi de commande rapidement pour conduire les états du système à partir de tous les états initiaux vers une surface de glissement définie par l'utilisateur, et de maintenir les états sur la surface tous les temps ultérieur[111]. Cette stratégie de contrôle réalise une performance satisfaisante au regard des incertitudes paramétriques et des perturbations externes[113].

Ces dernières années, elle est intensivement utilisée pour le contrôle et la synchronisation des systèmes chaotique fractionnaire. Dans l'article [68], le contrôleur proposé est basé sur la théorie du mode glissant actif pour faire une synchronisation entre deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaires de Lu et de Chen identiques et différents. Dans [69], en utilisant la même stratégie de contrôle, une synchronisation identique du système Duffing-Holmes est achevée à la présence de l'incertitude et les perturbations. Dans [114], la synchronisation entre deux systèmes incertains différents d'ordre fractionnaire chaotiques basés sur la commande adaptative floue et le mode de glissement a été traitée. Dans [71], un nouveau schéma de contrôle est proposé pour la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. L'approche utilise une combinaison d'un contrôleur classique glissant et un contrôleur actif, où le contrôleur actif permet d'augmenter la force d'attraction de la surface de glissement. Dans [115], la synchronisation du chaos du système de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire est étudiée via deux stratégies de contrôle différentes; contrôle actif et commande par mode glissant. Dans [74], un contrôleur par mode glissant adaptatif est proposé pour une nouvelle classe des systèmes chaotique d'ordre fractionnaire avec incertitude et perturbation externe. Les lois adaptatives appropriées sont désignées pour traiter l'incertitude et la perturbation externe...

Dans ce chapitre, Une nouvelle conception de schéma de contrôle de mode glissant d'ordre fractionnaire(CMGOF) est proposée pour la synchronisation d'une classe de systèmes d'ordre fractionnaire non linéaire avec un comportement chaotique. L'approche de conception considérée fournit une loi fractionnaire qui garantit la stabilité asymptotique des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire dans le sens du théorème de stabilité de Lyapunov. Deux exemples de simulation illustratifs; le système chaotique de Genesio-Tesi et le système de Jerk modifié d'ordre fractionnaires montrent l'efficacité et la robustesse de cette solution de contrôle.

## 5.2. Définition du problème de la synchronisation

La classe suivante de système chaotique à ordre fractionnaire non autonome de dimension  $n$  est considérée [107].

$$\begin{cases} x_1^{(q)} = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(q)} = x_n \\ x_n^{(q)} = f(x, t) \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T \in \mathfrak{R}^n$ ,  $f(x, t)$  est la fonction non linéaire de  $x$  et  $0 < q < 1$ .

Soit (5.1) le système maître, le système esclave avec une entrée de la commande  $u(t) \in \mathfrak{R}$  devient,

$$\begin{cases} y_1^{(q)} = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}^{(q)} = y_n \\ y_n^{(q)} = g(x, t) + u \end{cases} \quad (5.2)$$

Où  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ ,  $g(y, t)$  est la fonction non linéaire de  $y$ .

On définit le vecteur d'erreur  $e$ , et à partir de (5.1) et (5.2), l'équation d'erreur est comme suit,

$$\begin{cases} e_1^{(q)} = e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1}^{(q)} = e_n \\ e_n^{(q)} = g(x, t) - f(x, t) + u \end{cases} \quad (5.3)$$

Ainsi, le problème de la synchronisation de deux systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire est équivalent au problème de trouver un contrôle  $u(t)$  en s'assurant que l'erreur  $e$  dans (5.3)

converge vers zéro. Un contrôleur par mode glissant est conçu pour atteindre cet objectif dans la section suivante.

### 5.3. Conception du contrôleur par mode glissant

La principale raison de la popularité croissante du contrôle par mode glissant (CMG) est sa robustesse avantageuse contre les perturbations sous certaines conditions [68]. Dans notre contribution, la surface de glissement de l'ordre fractionnaire proposée est

$$s(t) = k_1 D^{q-1} e_n + k_2 \int_0^t \sum_{i=1}^n c_i e_i(\xi) d\xi \quad (5.4)$$

Où  $k_1, k_2$  sont des coefficients positifs et  $c_i$  sont les paramètres de la surface de glissement à déterminer.

Le contrôle par mode glissant est obtenu en dérivant l'équation (5.4) comme suit,

$$\dot{s}(t) = k_1 D^q e_n + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i = 0 \Rightarrow D^q e_n = -\frac{k_2}{k_1} \sum_{i=1}^n c_i e_i \quad (5.5)$$

De plus, en définissant,

$$c_i^* = -\frac{k_2}{k_1} c_i \quad (5.6)$$

La dynamique du mode glissement est donnée par les équations suivantes

$$\begin{cases} e_1^{(q)} = e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1}^{(q)} = e_n \\ e_n^{(q)} = \sum_{i=1}^n c_i^* e_i \end{cases} \quad (5.7)$$

ou sous la forme matricielle comme,

$$e^{(q)}(t) = Ae(t)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c_1^* & c_2^* & \cdots & c_n^* \end{bmatrix}$$

La sélection des paramètres de la surface de glissement d'ordre fractionnaire  $c_i^* (i = 1, 2, \dots, n)$  obéit au théorème de la stabilité de Matignon [116] qui assure que la surface de glissement (5.4) est asymptotiquement stable tant que la condition de la stabilité  $|\arg(\text{eig}(A))| > q\pi/2$  est vérifiée.

On propose la loi CMG suivante dans le but que les trajectoires d'état du système (5.2) convergent vers la surface de glissement.

$$u(t) = -g(y, t) + f(x, t) - k \text{sign}(s) - k \sum_{i=1}^n c_i e_i \quad (5.8)$$

Où  $k$  est un nombre réel positif.

#### 5.4. Analyse de la stabilité

Le résultat principal de ce travail est exprimé par le théorème suivant,

**Théorème 5.1:** La synchronisation des systèmes (5.1) et (5.2) est parfaitement réalisée par la loi de contrôle par mode glissant (5.8) avec  $k = \frac{k_2}{k_1}$ .

**Preuve :** on va prouver que les systèmes (5.1) et (5.2) sont complètement synchronisés, ce qui signifie que le système dynamique d'erreur (5.3) est asymptotiquement stable.

On prend une fonction candidate de Lyapunov définie positive telle que,

$$V = |s| \quad (5.9)$$

par une simple dérivation on trouve,

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \text{sign}(S)\dot{S} \\
&= \text{sign}(S)\left(k_1 D^\alpha e_n + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i\right) \\
&= \text{sign}(S)\left(k_1 (g(y,t) - f(x,t) + u) + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i\right) \\
&= \text{sign}(S)\left(k_1 \left(-k \sum_{i=1}^n c_i e_i - k \text{sign}(S)\right) + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i\right)
\end{aligned}$$

On pose

$$k = \frac{k_2}{k_1} \quad (5.10)$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \text{sign}(S)\left(k_1 \left(-\frac{k_2}{k_1} \sum_{i=1}^n c_i e_i - \frac{k_2}{k_1} \text{sign}(S)\right) + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i\right) \\
&= \text{sign}(S)\left(-k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i - k_2 \text{sign}(S) + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i\right) \\
&= \text{sign}(S)(-k_2 \text{sign}(S)) \\
&= -k_2
\end{aligned}$$

Et suite au Lemme 2.1, le système (5.2) est stable au sens de Mittag-Leffler et l'erreur converge asymptotiquement vers zéro, ce qui complète la preuve.

## 5.5. Résultats de simulation

Afin d'illustrer l'efficacité du schéma de synchronisation proposé, deux exemples de simulation numériques d'application aux systèmes chaotiques Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire et aux systèmes de Jerk modifiés d'ordre fractionné sont proposés, dans des conditions idéales et perturbées.

### 5.1.1. Synchronisation du système de Genesio-Tesi fractionnaire

Le système de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire est donné par,

$$\begin{cases} x^{(q)} = y \\ y^{(q)} = z \\ z^{(q)} = -cx - by - az + x^2 \end{cases} \quad (5.11)$$

Pour les valeurs des paramètres du système  $(a, b, c) = (1.2, 2.992, 6)$  et en prenant  $q = 0.99$ , le système de Genesio-Tesi présente un comportement chaotique tel qu'illustré dans la figure 5.1 et la figure 5.2 [117].

Les conditions initiales sont les mêmes utilisées dans [104] ;  $x(0) = -1.0032$ ,  $y(0) = 2.3445$  et  $z(0) = -0.087$ .

La figure 5.1 montre le comportement chaotique du système de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire, alors que la figure 5.2 présente une simulation numérique de son attracteur.

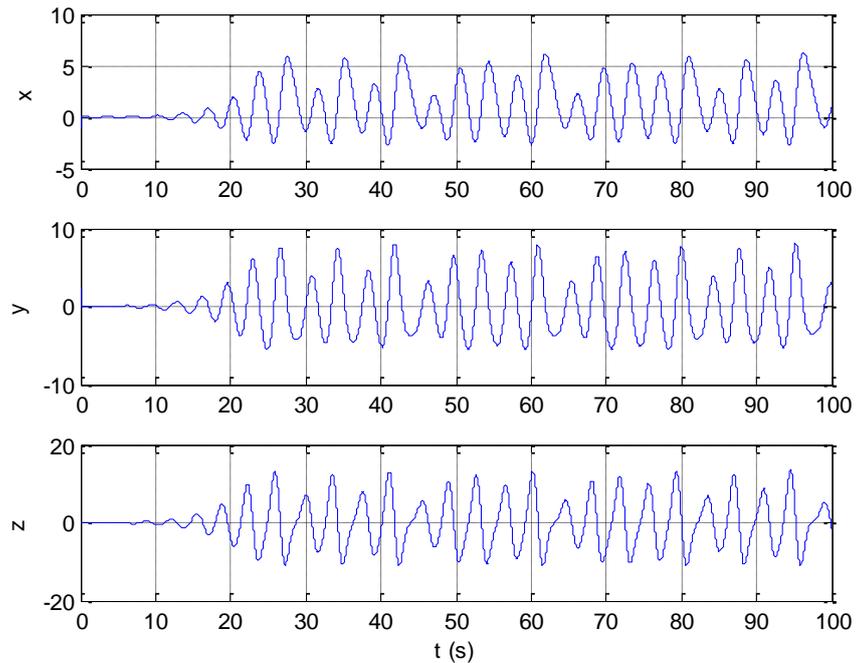


Fig. 5.1 Le comportement chaotique du système fractionnaire de Genesio-Tesi

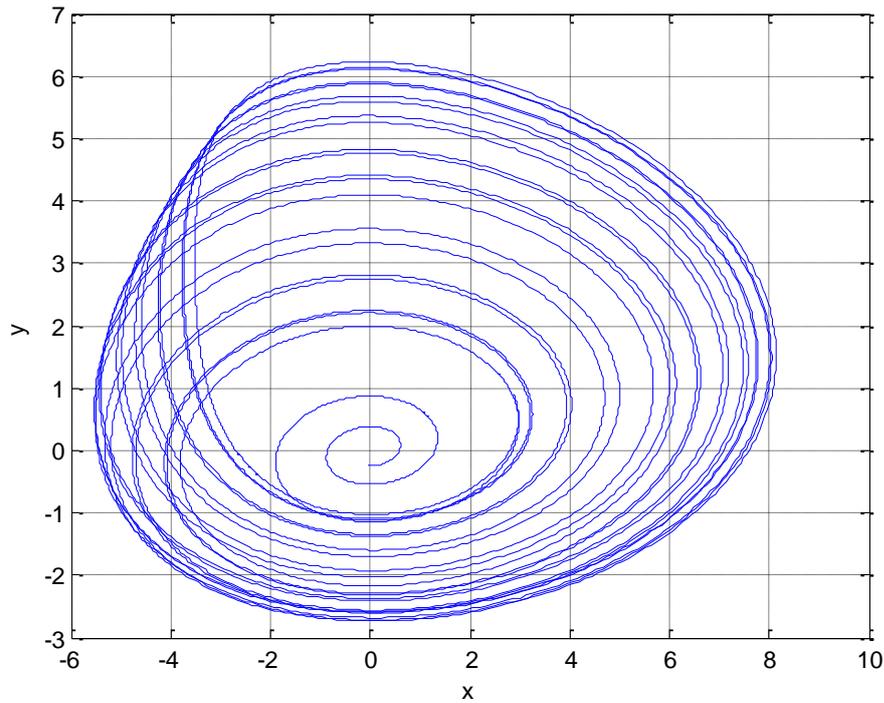


Fig. 5.2 Portrait de phase de l'attracteur de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire

#### 5.1.1.1. Synchronisation dans le cas idéal (sans perturbation)

En prenant les paramètres de la surface de glissement comme [107] :  $(c_1, c_2, c_3) = (6, 1, 5)$ , on applique la loi de contrôle par mode glissant (5.8) avec les paramètres  $k_1 = 1$  et  $k_2 = 0.13$ . Les résultats de simulation obtenus lors de l'application de l'action de contrôle de synchronisation à  $t = 40s$  avec les conditions initiales  $(xm_0, ym_0, zm_0) = (-1.0032, 2.3545, -0.87)$  et  $(xs_0, ys_0, zs_0) = (-2, 1, -0.5)$  pour les systèmes maître et esclave respectivement, sont présentés dans la figure 5.3 à la figure 5.6.

Comme le montrent les figures 5.3 et 5.4, il existe trois étapes de comportement du système contrôlé [118]. Dans les 40 premières secondes, sans contrôleur, le système est chaotique comme on le voit sur la figure 5.1. Dans la deuxième phase connue sous le nom (reaching phase), après  $t = 40s$ , le système chaotique d'ordre fractionnaire est forcé vers la surface de glissement par le contrôleur de mode glissant. Lorsque la trajectoire touche la surface de glissement, le système entre dans la 3ème phase, appelée opération en mode glissant. Les résultats présentés ici montrent la bonne performance des schémas de synchronisation proposés.

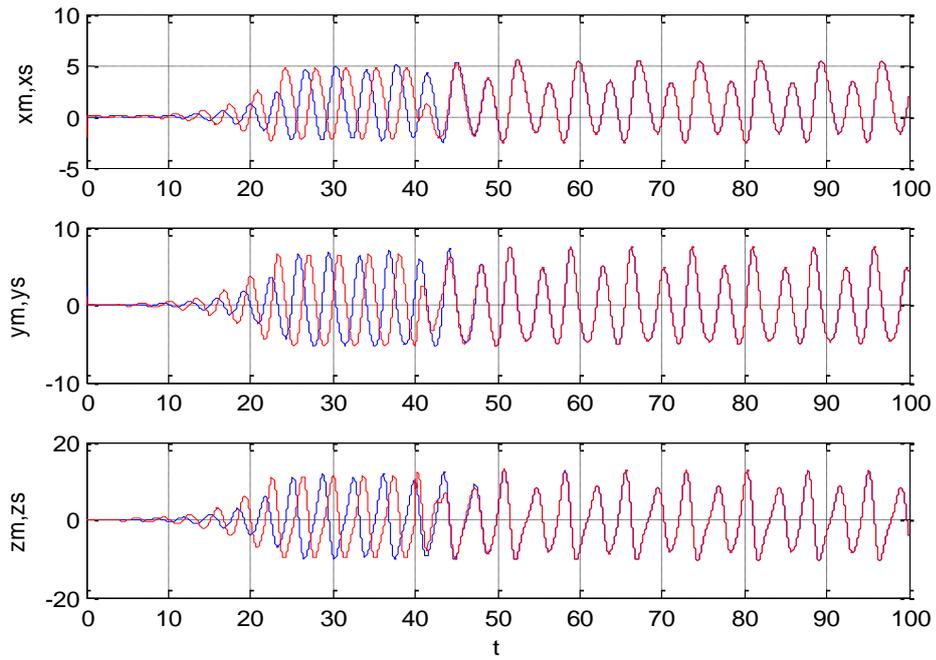


Fig. 5.3 Synchronisation du système de Genesis-Tesi d'ordre fractionnaire

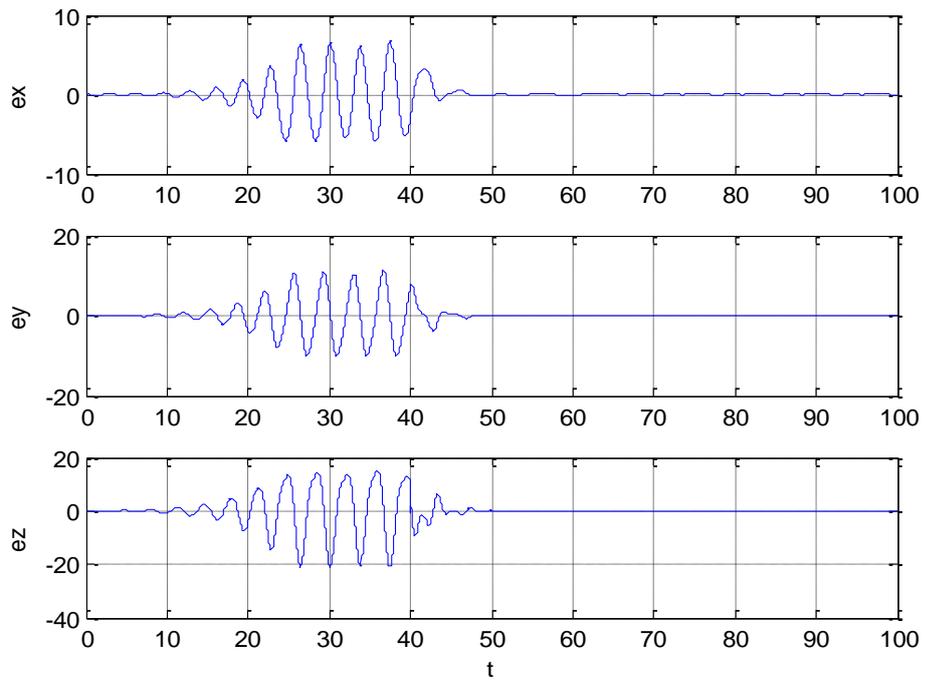


Fig. 5.4 Les erreurs de synchronisation du système de Genesis-Tesi fractionnaire

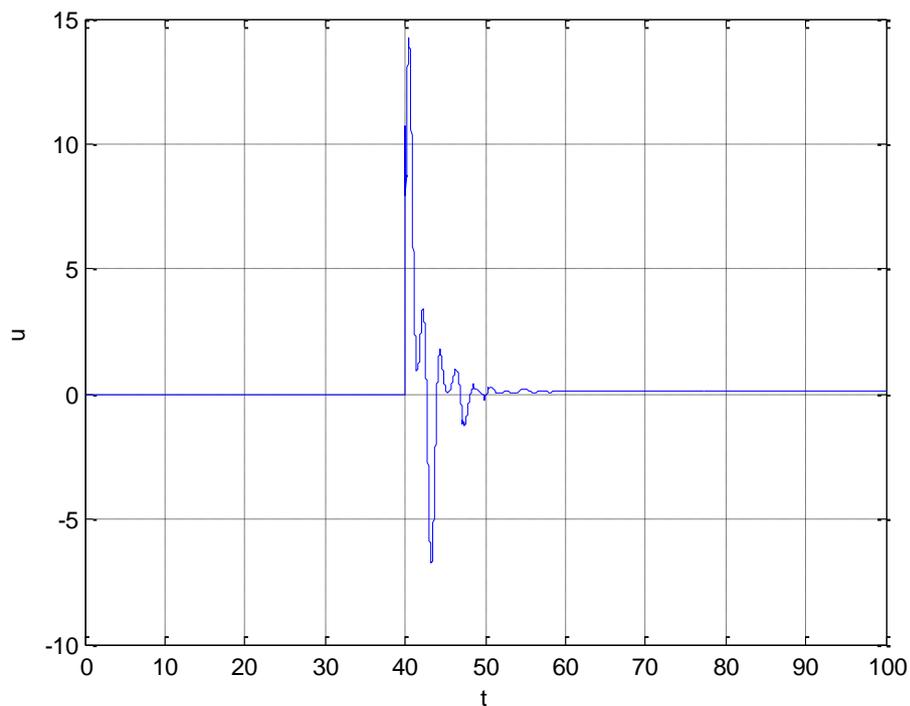


Fig. 5.5 Signal de contrôle pour la synchronisation du système de Genesio-Tesi fractionnaire

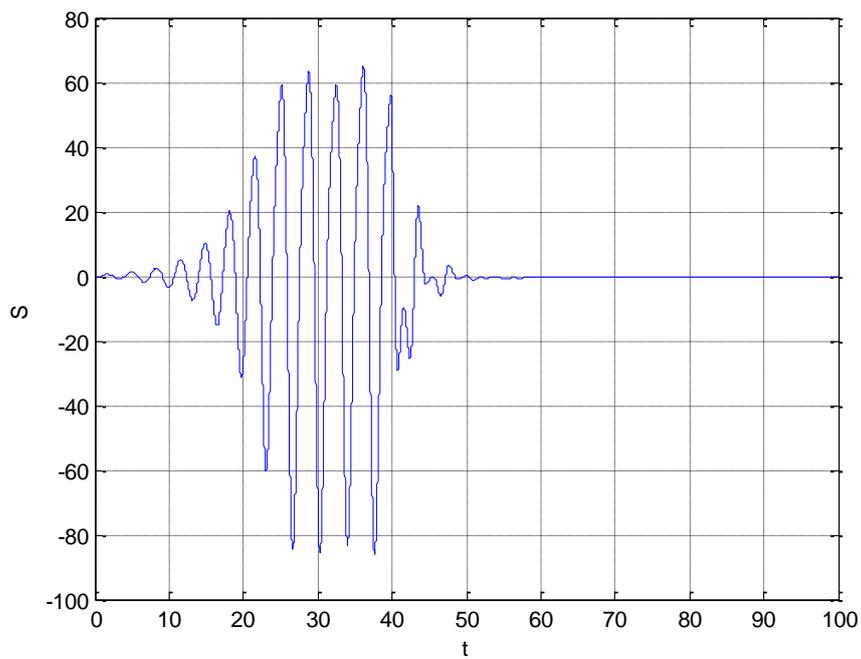


Fig. 5.6 Surface de glissement pour la synchronisation par CMG du système de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire

### 5.1.1.2. Synchronisation du système fractionnaire de Genesio-Tesi perturbé

Maintenant, on applique un signal de perturbation aléatoire  $\xi(t)$  sur le système fractionnaire de Genesio-Tesi pour tester la performance de la loi de contrôle CMG proposée dans de mauvaises conditions d'exploitation. Le modèle mathématique correspondant est donné par l'équation (5.12)

$$\begin{cases} x^{(q)} = y \\ y^{(q)} = z \\ z^{(q)} = -cx - by - az + x^2 + \xi \end{cases} \quad (5.12)$$

où  $\xi(t)$  est un signal aléatoire d'amplitude  $B = 0.1$ .

Les figures 5.7 à 5.10 présentent les résultats de la synchronisation en utilisant la loi (5.8) de CMG avec  $k = \frac{k_2}{k_1} = 0.1$ .

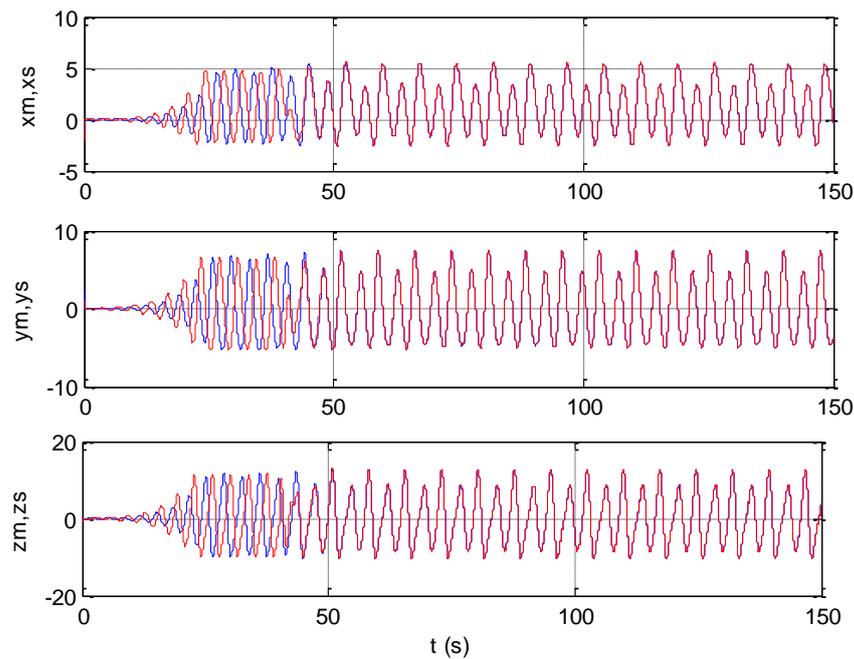


Fig. 5.7 Synchronisation du système de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire en présence de la perturbation

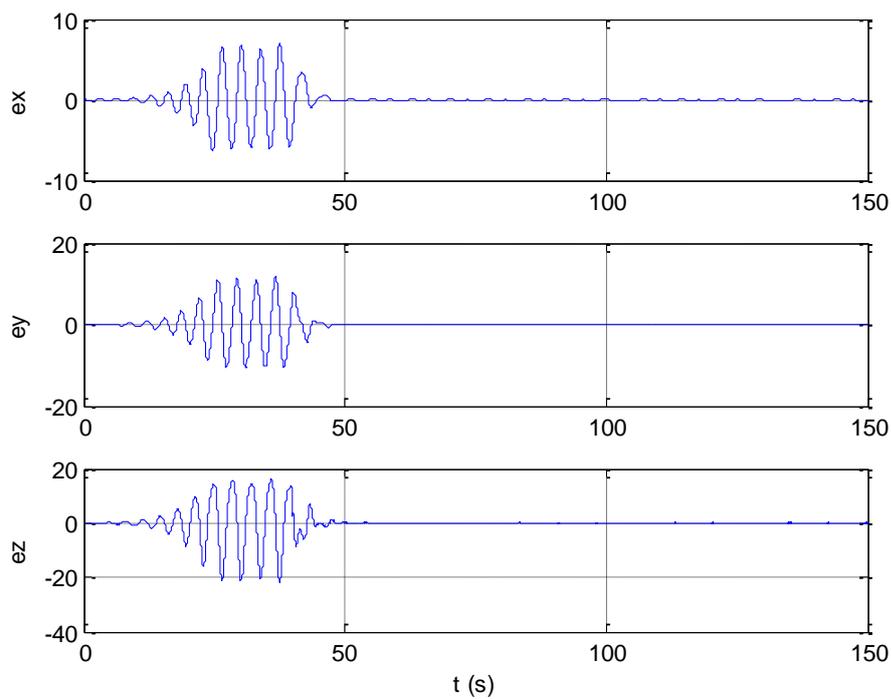


Fig. 5.8 Les erreurs de synchronisation du système de Genesio-Tesi fractionnaire perturbé

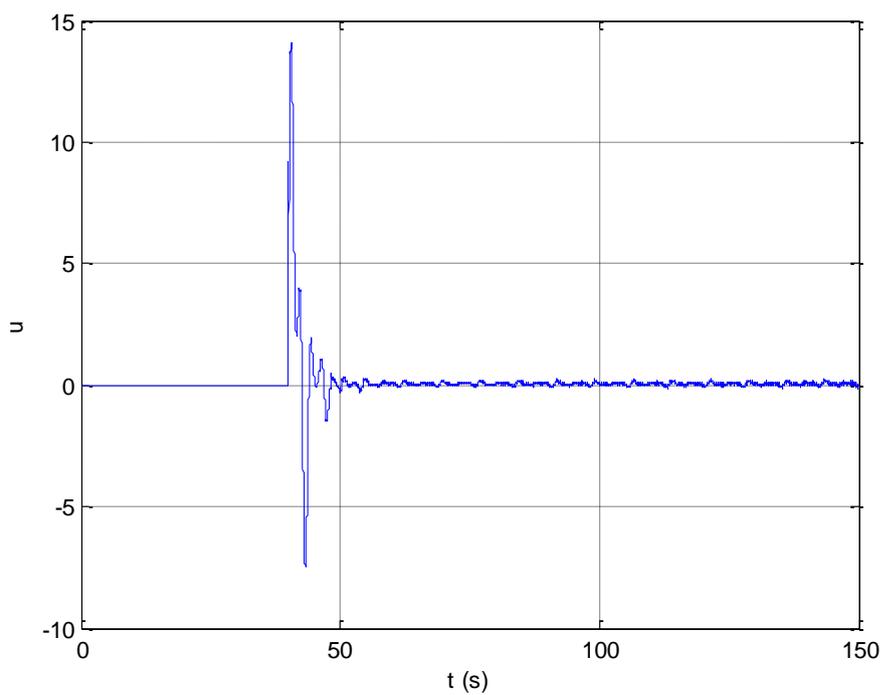


Fig. 5.9 Signal de contrôle pour la synchronisation du système de Genesio-Tesi fractionnaire perturbé

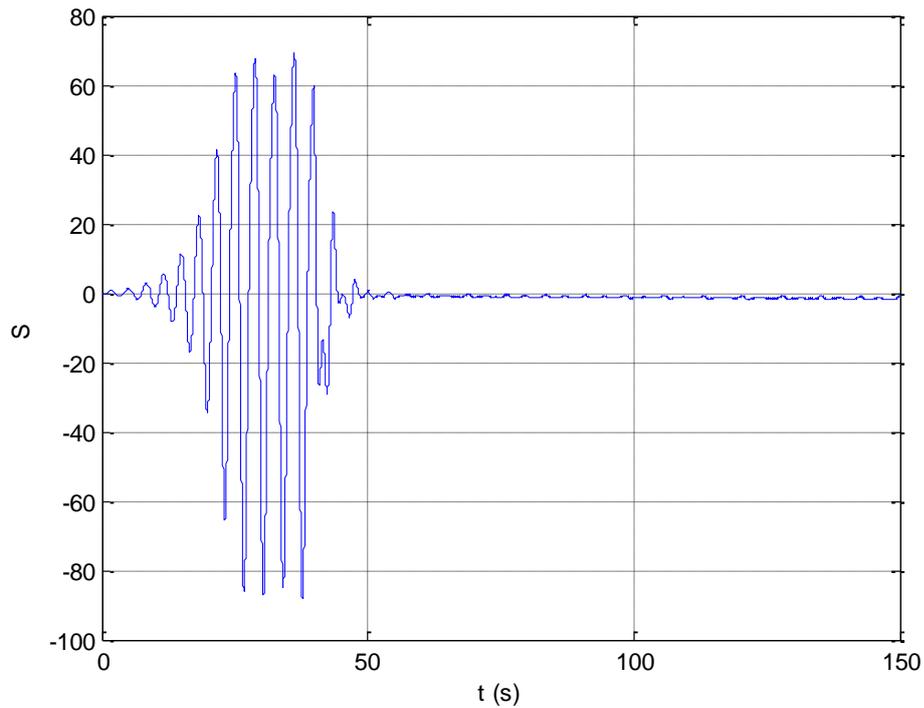


Fig. 5.10 Surface de glissement pour la synchronisation par CMG du système de Genesio-Tesi d'ordre fractionnaire perturbé

Comme le montrent les résultats de la simulation, bien que le système esclave comporte une perturbation additive, le suivi est atteint. Lorsque le CMG proposé est appliqué, l'entrée de contrôle est très lisse, et les fluctuations de la commande de commutation sont assez petites comme indiqué sur la Figure 5.9.

Afin d'indiquer les performances du système de contrôle par rapport au paramètre de contrôle  $k$ , on définit le critère d'erreur quadratique  $J_k$  comme,

$$J_k = \sqrt{\int_{t_c}^{t_f} (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)} \quad (5.13)$$

Où  $t_c$  est le moment de l'application du contrôle et  $t_f$  la durée de la simulation. Les résultats numériques obtenus sont présentés dans le tableau 5.1.

Tableau 5.1: Temps de réponse et critère quadratique en fonction du paramètre de contrôle  $k$ .

$k$	$\tau_r$	$J$	$J_2$
<b>0.36</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$
<b>0.33</b>	37.58	223.92	201.89
<b>0.30</b>	37.37	116.51	136.46
<b>0.27</b>	37.31	147.04	112.57
<b>0.24</b>	37.29	139.47	103.53
<b>0.21</b>	37.46	136.53	99.77
<b>0.18</b>	37.47	135.37	98.73
<b>0.15</b>	37.49	134.69	98.51
<b>0.12</b>	37.49	134.41	98.41
<b>0.09</b>	37.53	134.66	99.16
<b>0.06</b>	37.55	136.08	101.57
<b>0.03</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Les résultats de la simulation ont démontré l'efficacité de la méthode de contrôle CMG proposée pour obtenir la synchronisation des deux systèmes de Genesio-Tesi avec rejet de perturbation.

### 5.1.2. Synchronisation du système de Jerk d'ordre fractionnaire

Le système Jerk à ordre fractionnaire modifié est donné comme suit [119],

$$\begin{cases} x^{(q)} = y \\ y^{(q)} = z \\ z^{(q)} = -\varepsilon_1 x - y - \varepsilon_2 z - f(x(t)) \end{cases} \quad (5.14)$$

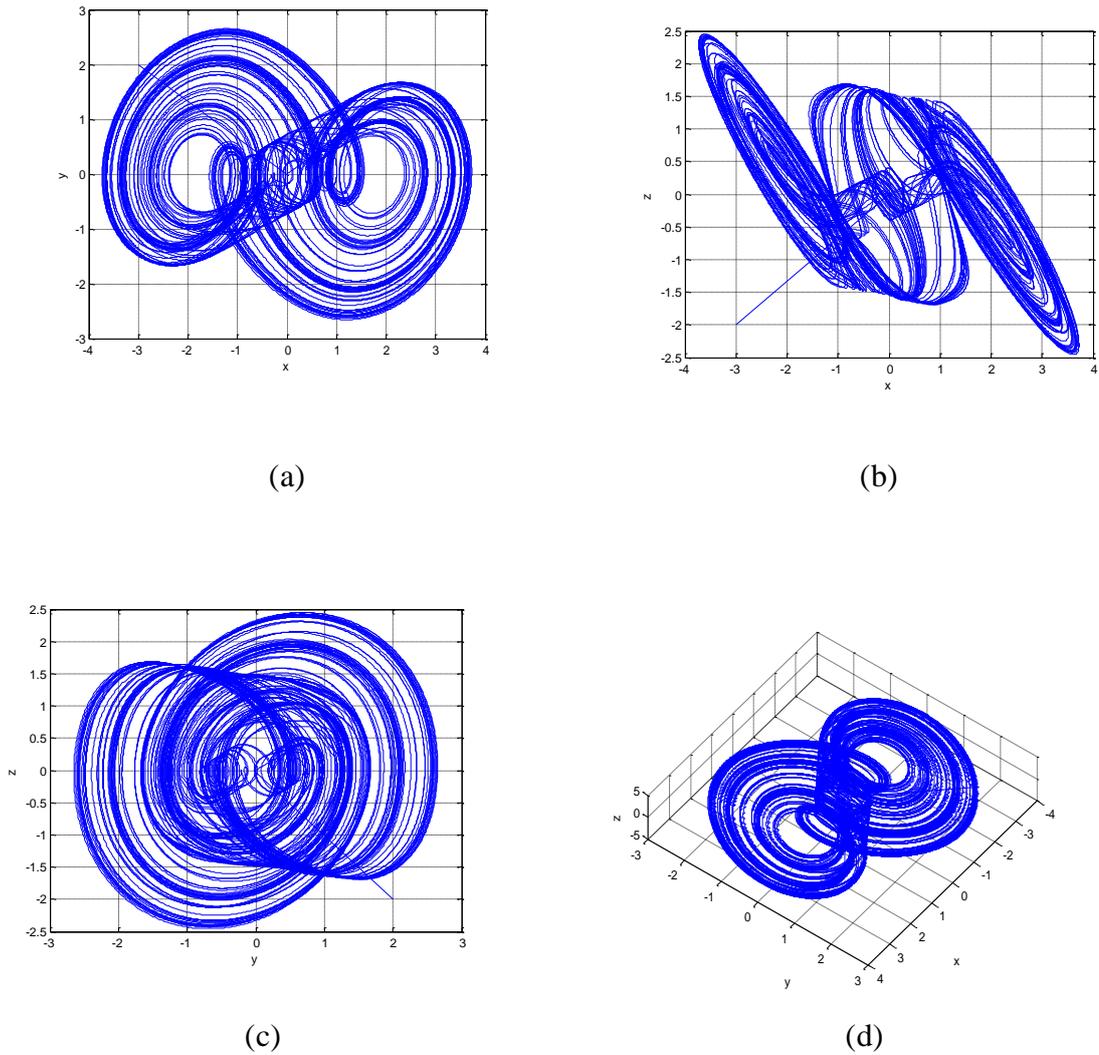


Fig. 5.11 Comportement chaotique du système de Jerk modifié d'ordre fractionnaire : (a) plan  $(x, y)$  (b) plan  $(x, z)$ , (c) plan  $(y, z)$ , (d) l'espace  $(x, y, z)$ .

où les valeurs des paramètres sont données par  $\varepsilon_1 = 1.5$ ,  $\varepsilon_2 = 0.35$  et la fonction  $f(x(t))$  est une fonction linéaire par morceaux définie par,

$$f(x(t)) = \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta_1)(|x(t)+1| - |x(t)-1|) + \theta_1 x(t) \quad (5.15)$$

où  $\theta_0 < -1 < \theta_1 < 0$  et  $\theta_0 = -2.5$ ,  $\theta_1 = -0.5$ .

Lorsque les valeurs initiales sont choisies comme  $(1, 1, 1)^T$  et l'ordre fractionnaire  $q = 0.98$ , le

système de Jerk modifié d'ordre fractionnaire montre un comportement chaotique comme l'illustre la figure 5.11 [119].

#### 5.1.2.1. Synchronisation dans le cas idéal (sans perturbation)

En prenant les paramètres de la surface de glissement comme [107] :  $(c_1, c_2, c_3) = (6, 1, 5)$  on applique la loi de contrôle par mode glissant (5.8) avec les paramètres  $k_1 = 1$  et  $k_2 = 0.001$ . Les résultats de simulation obtenus lors de l'application de l'action de contrôle de synchronisation à  $t = 20s$  avec un temps d'échantillonnage  $h = 0.01$  et les conditions initiales  $(-1.0032, 2.3545, -0.87)$  et  $(-2, 1, -0.5)$  pour le système maître et esclave respectivement sont représentés de la figure 5.12 à la figure 5.15.

Comme le montrent les figures 12 et 13, il existe trois étapes de comportement du système contrôlé [118]. Au cours des 20 premières secondes, sans contrôleur, le système est chaotique comme on peut le voir dans la Figure 5.11. Dans la deuxième phase (connue sous le nom de phase d'atteinte), après  $t = 20s$ , le système chaotique d'ordre fractionnaire est forcé vers la surface de glissement avec le contrôleur par mode glissant. Lorsque la trajectoire touche la surface de glissement, le système entre dans la 3ème phase, appelé fonctionnement en mode glissant. Les résultats présentés ici montrent la bonne performance du schéma de synchronisation proposé.

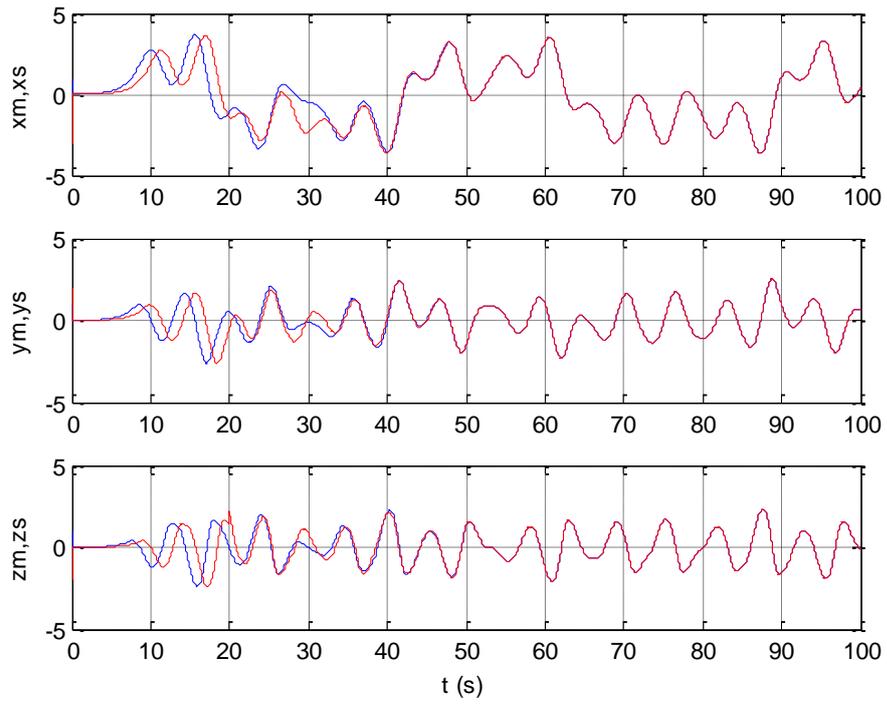


Fig. 5.12 Synchronisation du système de Jerk modifié d'ordre fractionnaire

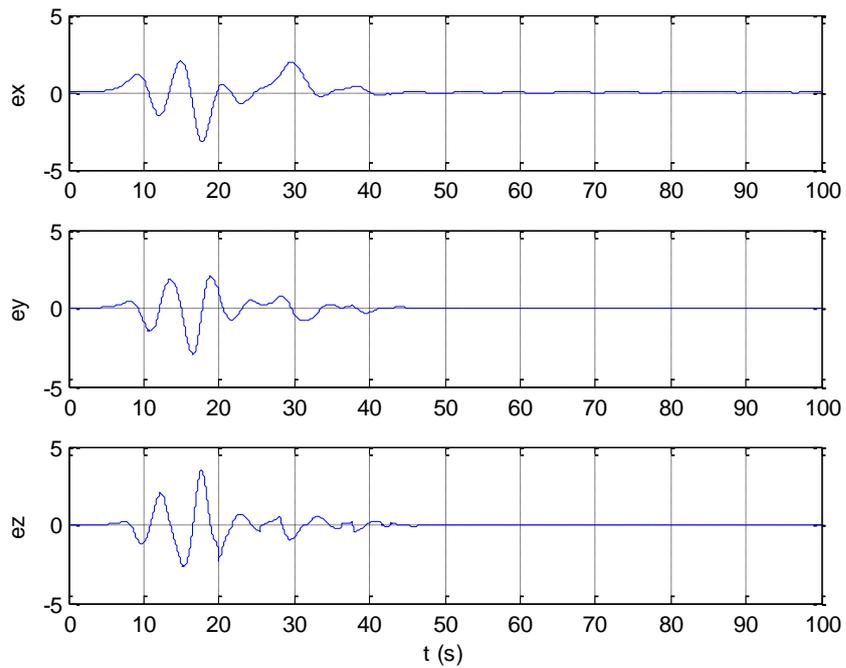
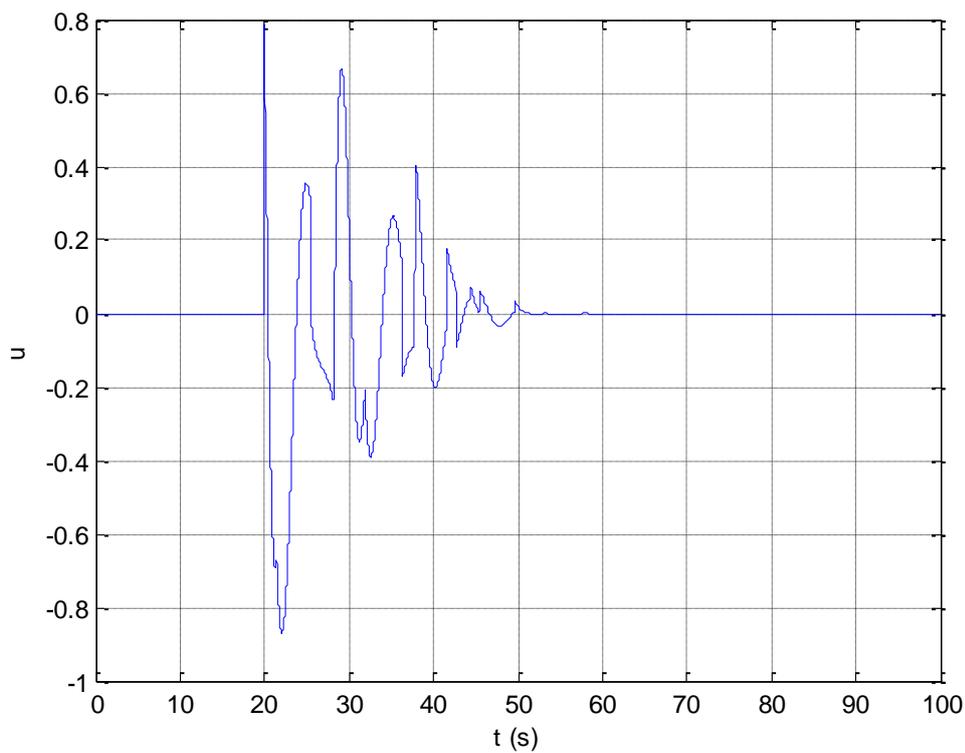


Fig. 5.13 Les erreurs de synchronisation du système Jerk modifié fractionnaire



5.14 Signal de contrôle pour la synchronisation du système Jerk modifié fractionnaire

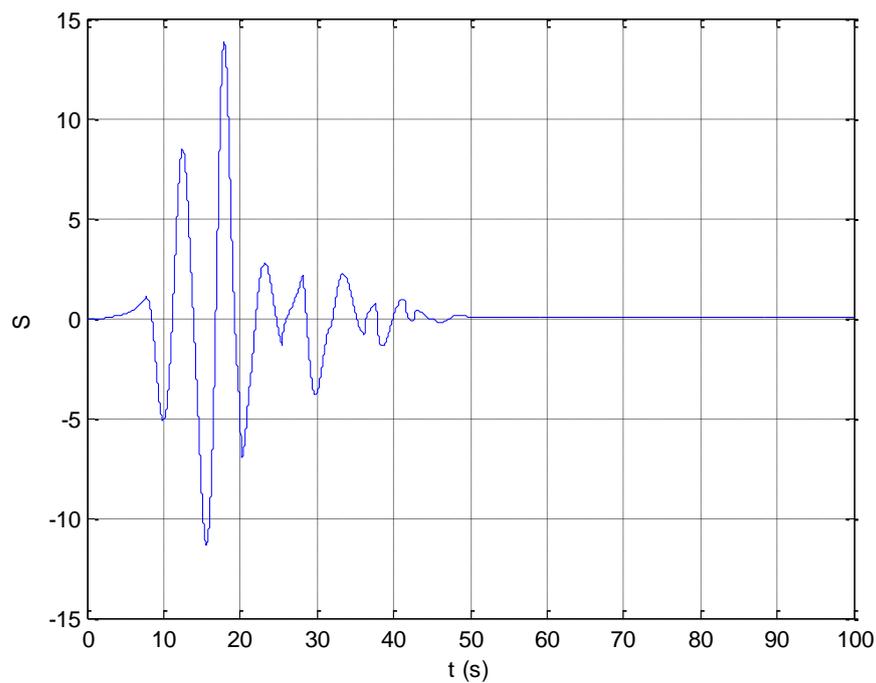


Fig. 5.15 Surface de glissement pour la synchronisation par CMG du système de Jerk modifié d'ordre fractionnaire

### 5.1.2.2. Synchronisation du système de Jerk modifié d'ordre fractionnaire retardé

Ici, on essaye de synchroniser deux systèmes de Jerk modifiés d'ordre fractionnaire (5.14) avec différentes conditions initiales et une perturbation de retard sur le système esclave. Les résultats obtenus pour différentes valeurs du paramètre de contrôle  $k$  sont présentés dans le tableau 5.2, où  $\tau_r$  est le temps de réponse et  $J_k$  est le critère d'erreur quadratique définie par (5.13).

$$\begin{cases} D^{(q)}x(t) = y(t - \tau) \\ D^{(q)}y(t) = z(t - \tau) \\ D^{(q)}z(t) = -\varepsilon_1 x(t - \tau) - y(t - \tau) - \varepsilon_2 z(t - \tau) - f(x(t - \tau)) + u(t) \end{cases}$$

La variation du critère d'erreur quadratique  $J_k$  par rapport aux paramètres du contrôleur  $k_1$  et  $k_2$  est illustrée à la figure 5.16. En choisissant  $k = 0.0001$ , on obtient les résultats de simulation présentés sur les figures 5.17 à 5.20.

Tableau 5.2 Performances dynamiques du système de Jerk modifié via le paramètre de contrôle  $k$

$k$	$\tau_r$	$J$
<b>0.15</b>	$\infty$	$\infty$
<b>0.10</b>	36.90	63.99
<b>0.05</b>	30.08	49.98
<b>0.01</b>	29.81	47.74
<b>0.005</b>	29.59	47.35
<b>0.001</b>	29.88	47.03
<b>0.0005</b>	29.88	46.99
<b>0.0001</b>	28.89	46.96
<b>0.00005</b>	29.89	46.96
<b>0.00001</b>	29.89	46.96

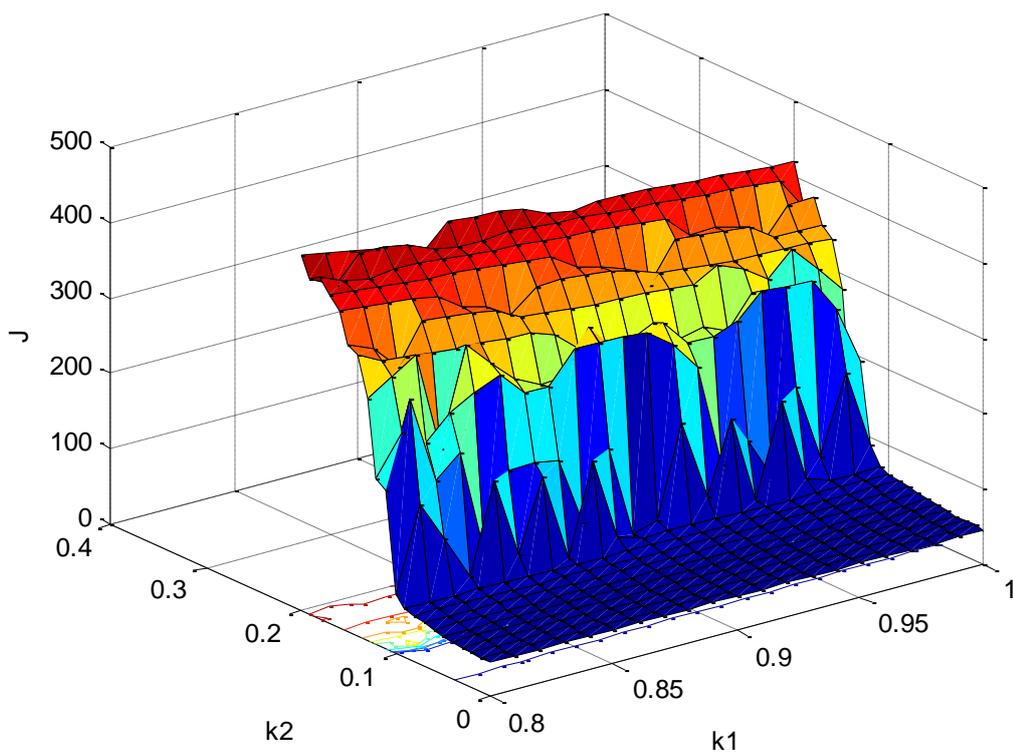


Fig. 5.16 Critère d'erreur quadratique  $J_k$  par rapport aux paramètres du contrôleur  $k_1$  et  $k_2$ .

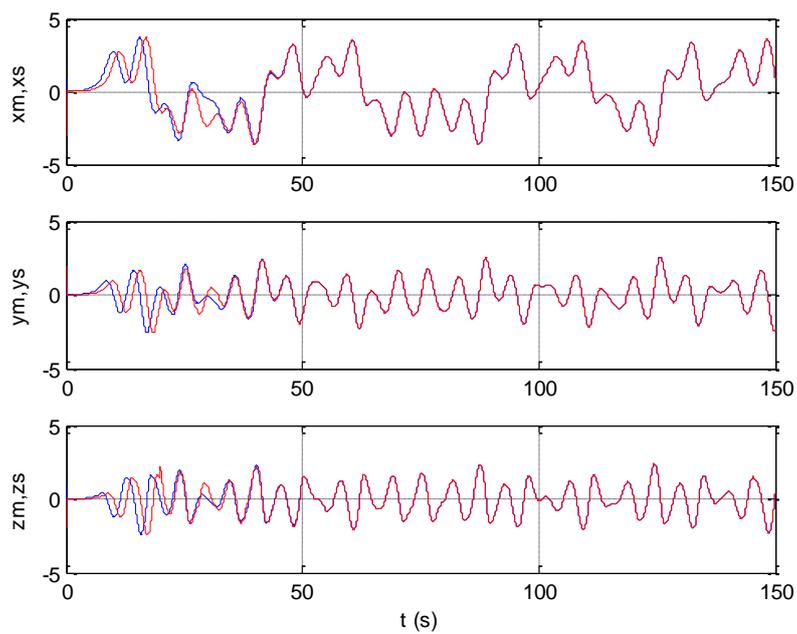


Fig. 5.17 Synchronisation des systèmes de Jerk modifiés d'ordre fractionnaire avec perturbation de retard.

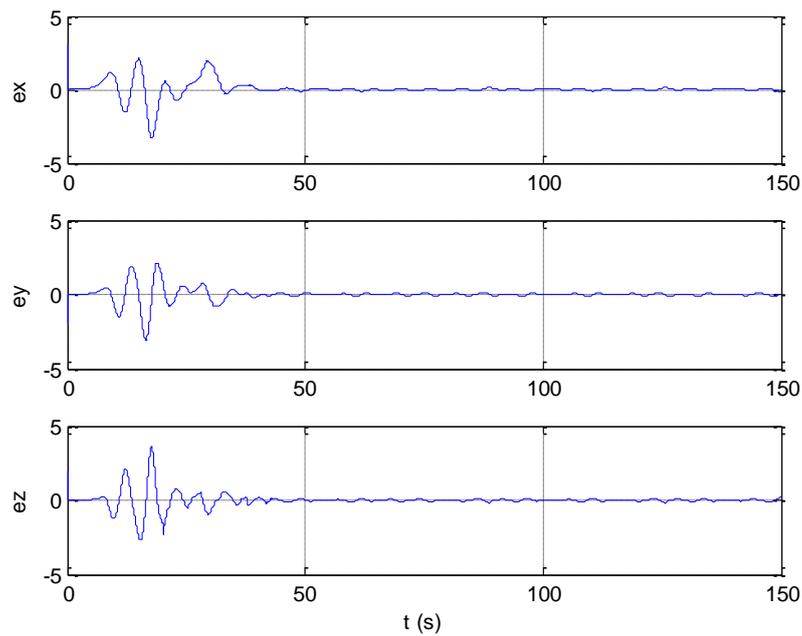


Fig. 5.18. Les erreurs de la synchronisation des systèmes de Jerk modifiés d'ordre fractionnaire avec des perturbations de retard

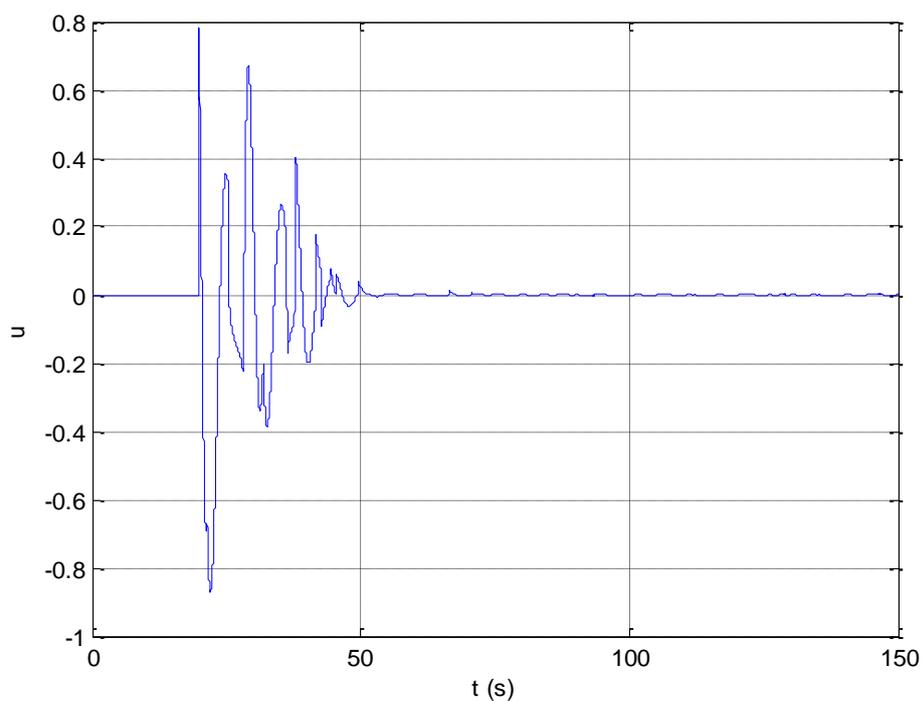


Fig. 5.19 Signal de contrôle pour la synchronisation du système de Jerk modifié Fractionnaire avec des perturbations de retard

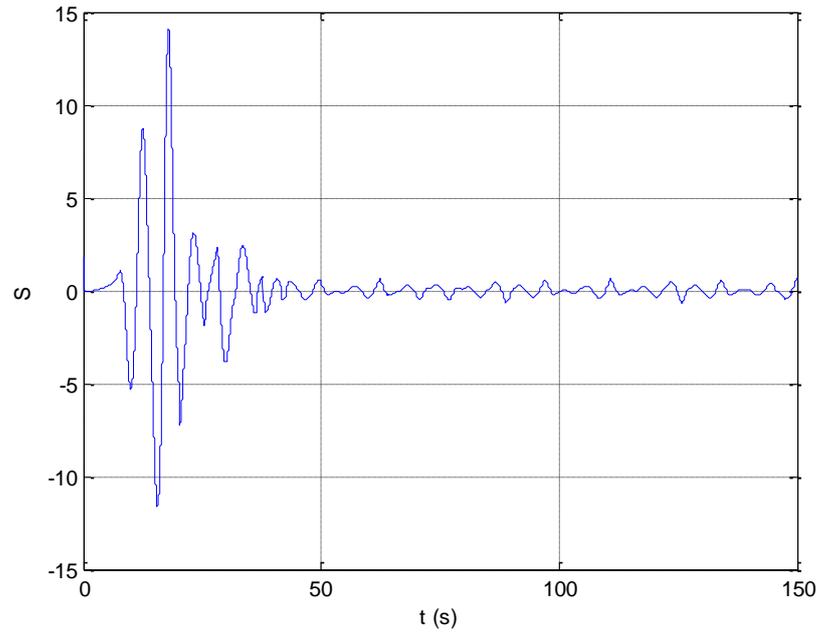


Fig. 5.20 Surface de glissement pour la synchronisation par CMG du système Jerk modifié d'ordre fractionnaire avec des perturbations de retard

Les résultats de la simulation de la figure 17 montrent que, malgré le fait que la valeur du retard n'est pas utilisée dans le contrôleur proposé (5.8), les réponses temporelles du système en boucle fermée avec le contrôleur proposé sont aussi efficaces que dans le cas idéal (sans perturbations de retard). Cela confirme les performances très acceptables du contrôleur proposé. En fait, le rapport de gain de contrôle  $k$  permet d'adapter la commande CMG pour contrer les perturbations et les retards introduits dans le système de réponse, ce qui rend le système de contrôle plus robuste dans des conditions de fonctionnement pratiques.

## 5.6. Conclusion

Une nouvelle conception systématique du schéma de contrôle par mode glissant fractionnaire pour la synchronisation d'une classe de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire est proposée. L'approche de conception considérée fournit une loi de commande fractionnaire qui garantit la stabilité asymptotique des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire dans le sens du théorème de stabilité de Lyapunov. Des simulations illustratives résultent de la synchronisation de deux systèmes fractionnaires; le système chaotique d'ordre fractionnaire de Genesio-Tesi et celui de Jerk modifié même en présence des perturbations et des retards

affectant le système esclave, montrent les bonnes performances et l'efficacité de cette solution de contrôle.

# Chapitre 6

## Commande Adaptative par Mode glissant pour la Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

### 6.1. Introduction

Le calcul fractionnaire existerait depuis plus de trois siècles. Par rapport à la théorie classique, les équations différentielles fractionnaires décrivent plus précisément de nombreux systèmes dans des domaines interdisciplinaires, tels que les systèmes viscoélastiques, la polarisation diélectrique, l'oscillation non linéaire des tremblements de terre, la mécanique et les ondes électromagnétiques [19]. Les systèmes d'ordre fractionnaire ont montré des performances et des propriétés très attrayantes et, par conséquent, de nombreuses applications de ces systèmes ont été effectuées dans différents domaines tels que le contrôle automatique [3-4], la robotique[5], le traitement du signal [1][2], et les énergies renouvelables[6].

Au cours de ces dernières décennies, un grand nombre de travaux de recherche sont concentrés sur des systèmes fractionnaires qui présentent un comportement chaotique comme: modèle de Duffing modifié[14], système de Chua [11], circuit dynamique de Chen[120], modèle de Rossler[121], modèle de jerk [119], la caractérisation du système de Lu [106] et la formulation de Newton-Leipnik[15]. La synchronisation ou le contrôle de ces systèmes est une tâche difficile, en raison de leurs caractéristique principale « sensibilité élevée aux conditions initiales », mais ils regroupent de plus en plus d'efforts de recherche à cause de plusieurs applications potentielles, en particulier dans le traitement de l'information[108][122]. Pour cela de nombreuses méthodes ont été introduites pour réaliser la synchronisation du chaos fractionnaire.

La commande de ce type de systèmes par mode glissant a connu un essor considérable durant les dernières décennies [116-117-118], du fait de sa principale propriété de convergence ainsi que la grande robustesse vis-à-vis des incertitudes et des perturbations. Ce

---

type de commande induit en pratique des commutations haute fréquence connue sous le nom *chattering*. Cet inconvénient est important et pourrait endommager les actionneurs et les systèmes. La réduction de ce phénomène peut se faire de deux façon; la première consiste à borner le gain :dans ce cas, de nombreuses approches ont proposé un réglage adéquat des gains des contrôleurs [126], et la deuxième se base sur le mode glissant à ordre supérieur[120-121-122]. Cependant, dans ces deux approches de contrôle, la connaissance des incertitudes est nécessaire d'où l'intérêt d'utilisation du mode de glissement adaptatif dont l'objectif est d'assurer une dynamique d'adaptation du gain de contrôleur afin d'être aussi petit que possible mais suffisant pour contrer les incertitudes et/ou les perturbations[70]- [66].

Dans le présent travail, on s'est concentré sur le problème de la synchronisation pour une classe de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire avec un contrôle adaptatif par mode glissant. À la suite des résultats récents qu'on a présentés précédemment [130], on propose un nouveau contrôleur par mode glissant à ordre fractionnaire avec des gains adaptatifs afin de synchroniser deux systèmes d'ordre fractionnaire Arneodo maître-esclave.

Sur la base du théorème de stabilité de Lyapunov, la preuve de la stabilité de la conception de la technique de contrôle proposée est effectuée. Les exemples de simulation confirment la validité des résultats théoriques.

## 6.2. Synchronisation de deux systèmes chaotiques fractionnaires

La classe de système chaotique d'ordre fractionnaire non autonome de dimension  $n$ [107] décrit dans le chapitre précédent est considérée.

$$\begin{cases} x_1^{(q)} = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(q)} = x_n \\ x_n^{(q)} = f(x, t) \end{cases} \quad (6.1)$$

Où  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T \in \mathfrak{R}^n$ ,  $f(x, t)$  est la fonction non linéaire de  $x$  et  $0 < q < 1$ .

Si (6.1) est le system maitre, alors le système (6.2) avec une entrée de commande  $u(t) \in \mathfrak{R}$  est

l'esclave,

$$\begin{cases} y_1^{(q)} = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}^{(q)} = y_n \\ y_n^{(q)} = g(x, t) + u \end{cases} \quad (6.2)$$

Où  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ ,  $g(y, t)$  est la fonction non linéaire de  $y$ .

Donc, à partir de (6.1) et (6.2) le vecteur d'erreur peut être écrit comme suit,

$$\begin{cases} e_1^{(q)} = e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1}^{(q)} = e_n \\ e_n^{(q)} = g(x, t) - f(x, t) + u \end{cases} \quad (6.3)$$

Afin d'assurer que l'erreur  $e$  donnée par (6.3) converge vers zéro, un contrôleur par mode glissant est conçu suivant le schéma bloc présenté par la figure 6.1.

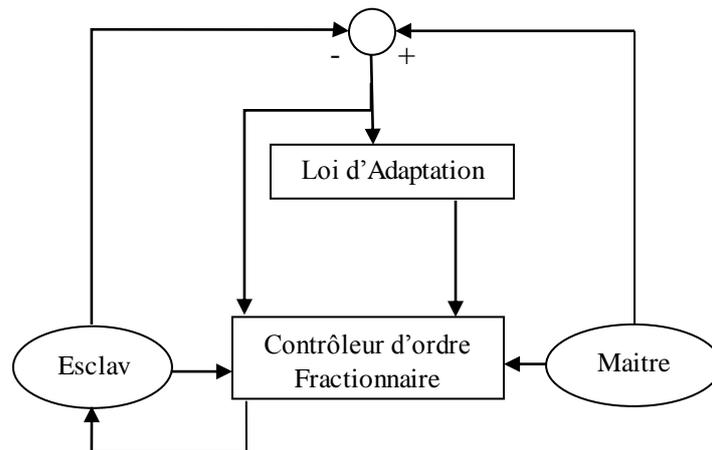


Fig. 6.1 Schéma de la synchronisation

La conception du contrôleur adaptatif par mode glissant se fait de la même manière définie dans le chapitre 5 sauf que la loi de commande contient un gain adaptatif qui varie en

fonction de la surface de glissement.

Dans notre contribution, la surface de glissement de l'ordre fractionnaire proposée est

$$s(t) = k_1 D^{q-1} e_n + k_2 \int_0^t \sum_{i=1}^n c_i e_i(\tau) d\tau \quad (6.4)$$

Où  $k_1, k_2$  sont des coefficients positifs et  $c_i$  sont les paramètres de la surface de glissement déterminés dans la section 5.3 du chapitre 5.

Afin de forcer les trajectoires d'état du système (6.2) à converger vers la surface de glissement, on propose le contrôleur par mode de glissement adaptatif suivant,

$$u = -g(y, t) + f(x, t) - k \left( \sum_{i=1}^n c_i e_i - \xi(t) \text{sign}(S) \right) \quad (6.5)$$

Où  $k$  est un nombre réel positive et  $\xi(t)$  est défini positive.

### 6.3. Analyse de la stabilité

Le résultat principal de ce travail est exprimé par le Théorème suivant,

**Théorème 6.1:** La synchronisation des systèmes (6.1) et (6.2) est parfaitement réalisée par la loi de contrôle par mode glissant (6.5) avec  $k = \frac{k_2}{k_1}$  et  $\xi(t) = k_0 |S|$ .

**Preuve :** on va prouver que les systèmes (6.1) et (6.2) sont complètement synchronisés, ce qui signifie que le système dynamique d'erreur (6.3) est asymptotiquement stable.

On prend une fonction candidate de Lyapunov définie positive telle que,

$$V = |S| \quad (6.6)$$

par une simple dérivation on trouve,

$$\dot{V} = \text{sign}(S) \dot{S}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{sign}(S) \left( k_1 D^\alpha e_n + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) \\
&= \text{sign}(S) \left( k_1 (g(y,t) - f(x,t) + u) + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) \\
&= \text{sign}(S) \left( k_1 \left( g(y,t) - f(x,t) - g(y,t) + f(x,t) - k \left( \sum_{i=1}^n c_i e_i - \xi(t) \text{sign}(S) \right) \right) + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) \\
&= \text{sign}(S) \left( k_1 \left( \sum_{i=1}^n c_i e_i - \xi(t) \text{sign}(S) \right) + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i \right)
\end{aligned}$$

on pose

$$k = \frac{k_2}{k_1} \quad (6.7)$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \text{sign}(S) \left( k_1 \left( -k_2/k_1 \sum_{i=1}^n c_i e_i - (k_2/k_1) \xi(t) \text{sign}(S) \right) + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) \\
&= \text{sign}(S) \left( -k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i - k_2 \text{sign}(S) + k_2 \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) \\
&= \text{sign}(S) (-k_2 \xi(t) \text{sign}(S)) \\
&= -k_2 \xi(t)
\end{aligned}$$

Pour  $\xi(t) = k_0 |S|$ , la condition de la stabilité est vérifiée.

Et suite au Lemme 2.1, le système (6.2) est stable au sens de Mittag-Leffler et l'erreur converge asymptotiquement vers zéro, ce qui complète la preuve.

#### 6.4. Résultat de simulation

Afin d'évaluer les performances du schéma de synchronisation proposé, on procédé à des tests en simulation. Un exemple d'application est présenté pour montrer l'efficacité et la faisabilité de la méthode. Cet essais concerne le système chaotique d'ordre fractionnaire d'Arneodo sans et avec deux différentes types de perturbation.

Le système fractionnaire d'Arneodo est défini par le modèle mathématique suivant [107],

$$\begin{cases} x^{(q)} = y \\ y^{(q)} = z \\ z^{(q)} = a x - b y - r z - x^3 \end{cases} \quad (6.8)$$

Pour  $a = 5.5, b = 3.5, r = 0.4$  et  $q = 0.9$  Le système d'Arneodo fractionnaire présente un comportement chaotique tel qu'il est montré dans la figure 6.2. Les variables d'états des systèmes maître et esclave avec les deux conditions initiales  $(0.2, 0.2, 0.2), (0.8, 1, 0.5)$  sont présentés respectivement dans les figures 6.2 et 6.3.

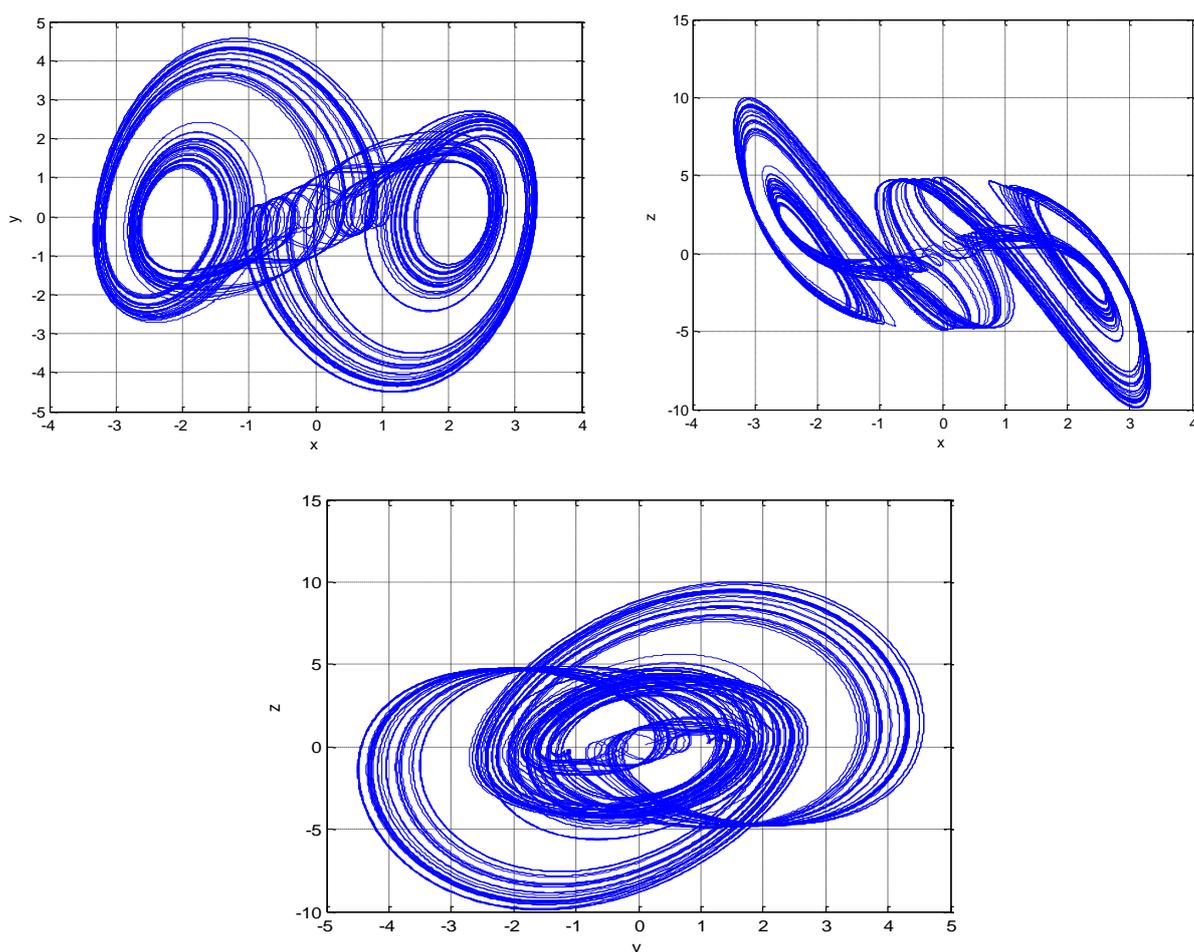


Fig.6.2 Attracteur d'Arneodo d'ordre fractionnaire

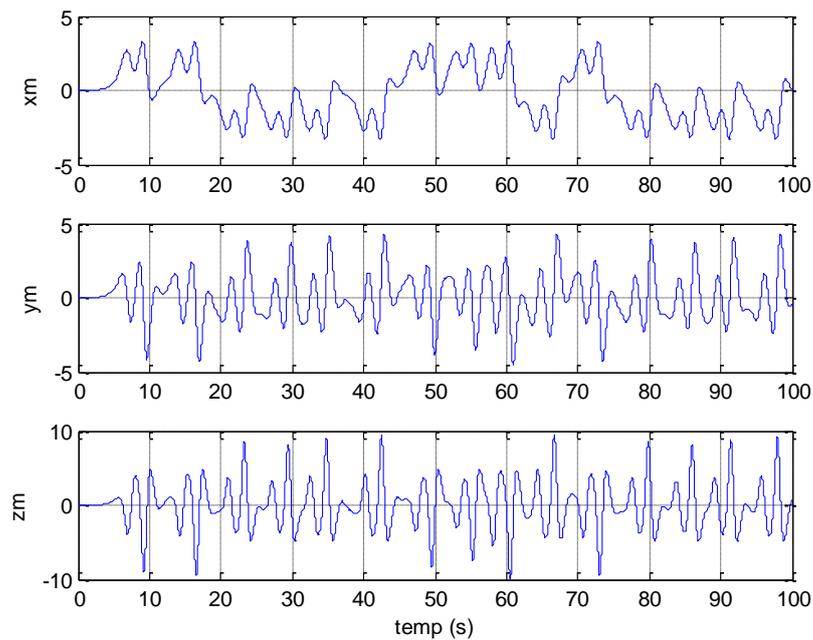


Fig. 6.3 Comportement chaotique du système d'Arneodo fractionnaire Maitre

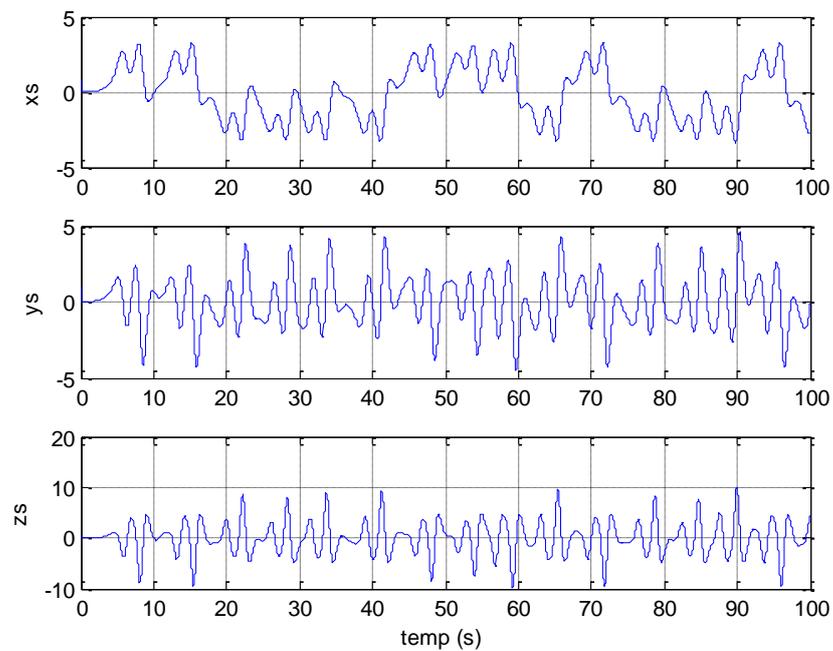


Fig. 6.4 Comportement chaotique du système d'Arneodo fractionnaire Esclave

### 6.4.1. Synchronisation du système d'Arneodo dans le cas idéal

On prend les paramètres de la surface de glissement  $(c_1, c_2, c_3) = (6, 1, 5)$  [107]. Après le déclenchement du contrôle adaptatif par mode glissant (6.5) à  $t = 20s$  et avec les paramètres  $(k_0, k_1, k_2) = (1.2, 0.99, 0.001)$  et un pas d'échantillonnage  $h = 0.005$ , le système chaotique d'ordre fractionnaire (6.2) est forcé vers la surface de glissement par le contrôleur en mode glissant.

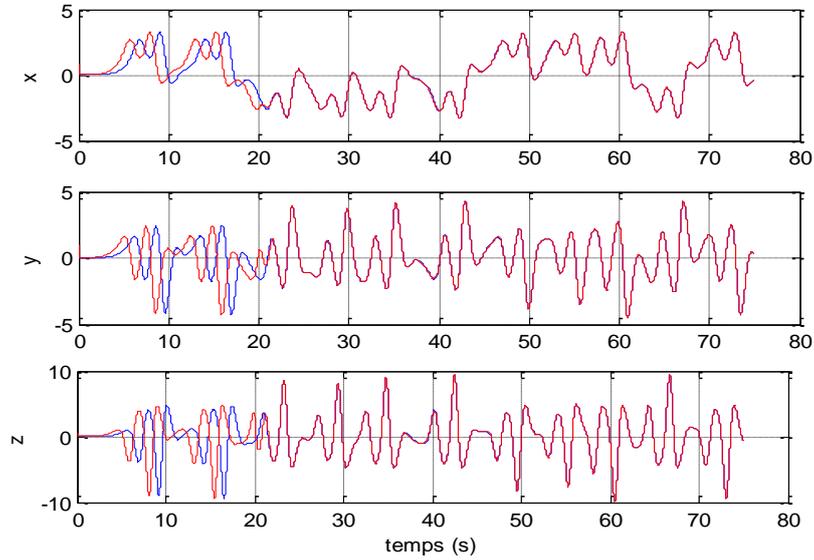


Fig. 6.5 Synchronisation du système d'Arneodo d'ordre fractionnaire

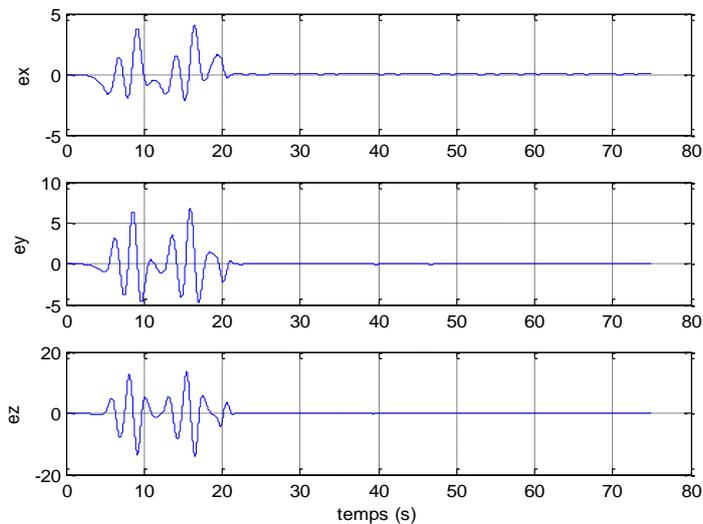


Fig. 6.6 Erreurs de la synchronisation du système d'Arneodo fractionnaire

Lorsque la trajectoire touche la surface de glissement, le système entre dans la phase

d'opération et après un temps fini il commence à poursuivre le système maître. Les résultats de simulation présentés de la figure 6.5 à la figure 6.9 montrent la bonne performance du schéma de la synchronisation proposés.

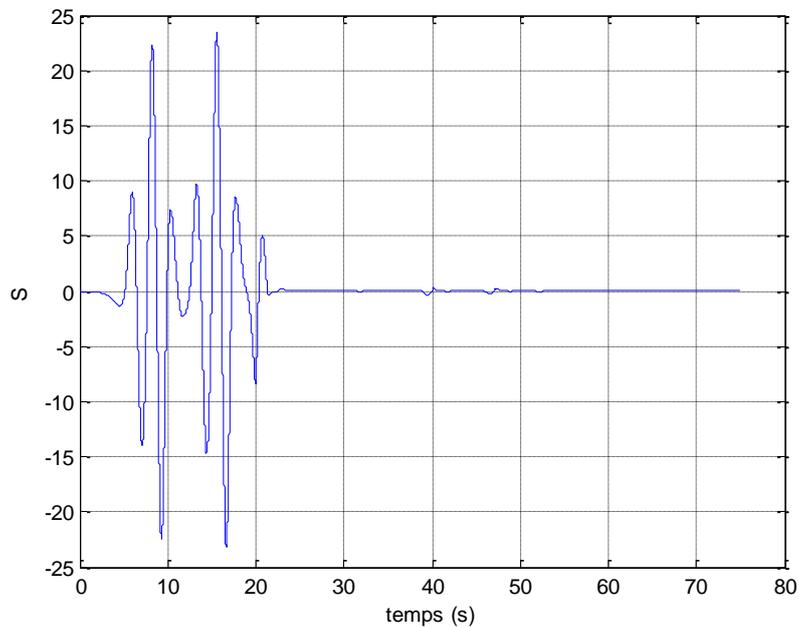


Fig. 6.7 Surface de glissement pour la synchronisation par CMGA du système d'Arneodo d'ordre fractionnaire

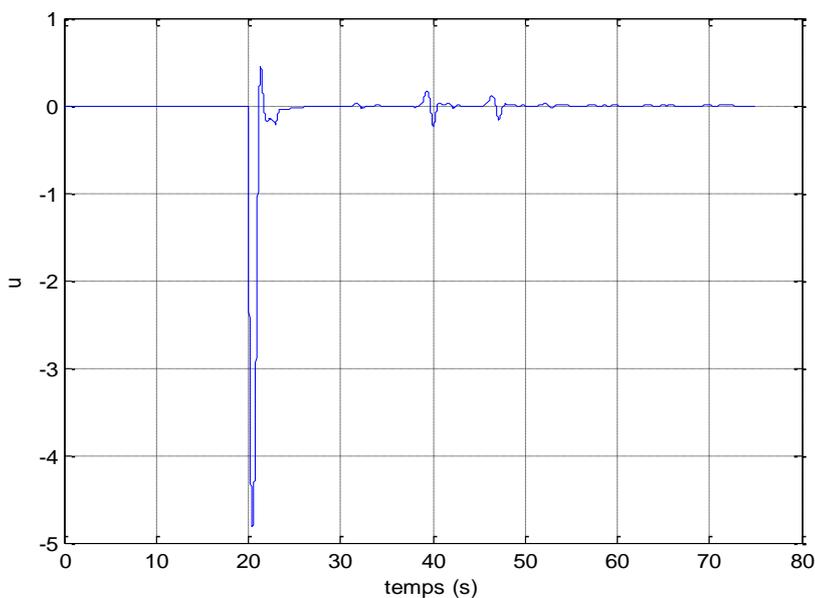
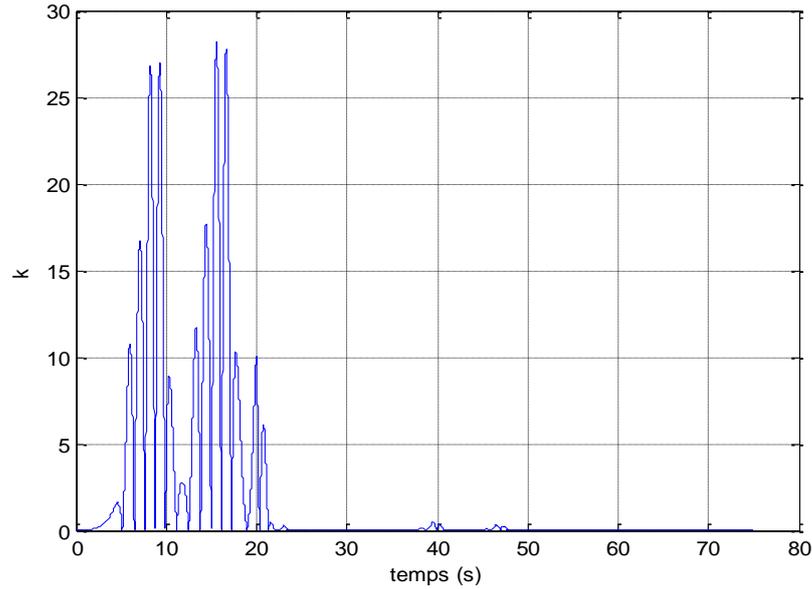


Fig. 6.8 Signal de contrôle pour la synchronisation du système d'Arneodo d'ordre fractionnaire

Fig.6.9 Le gain adaptatif  $k^* = k\xi(t)$ 

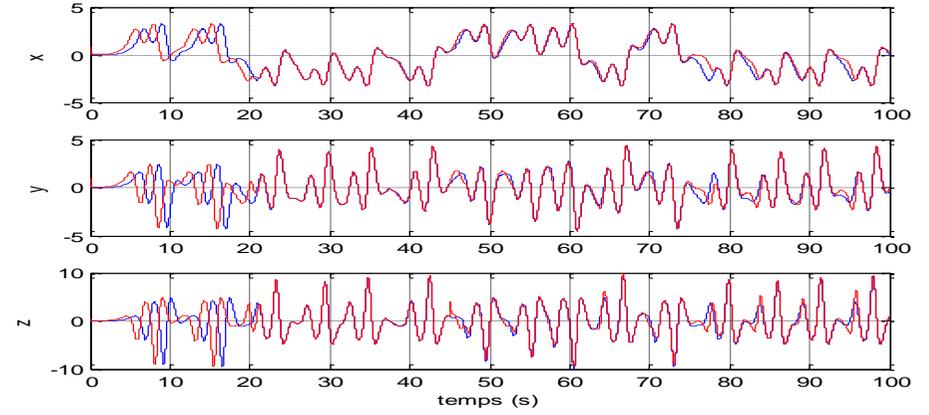
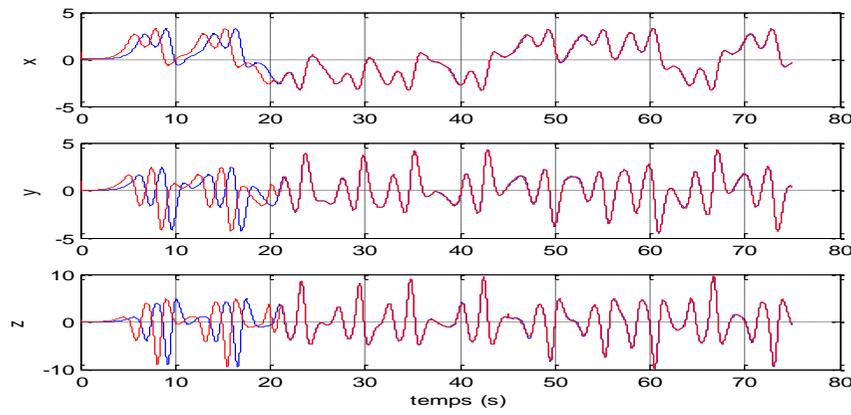
#### 6.4.2. Synchronisation du système fractionnaire d'Arneodo perturbé

En ajoutant une perturbation  $\delta(t)$  au système fractionnaire d'Arneodo esclave, on obtient la modèle mathématique suivant,

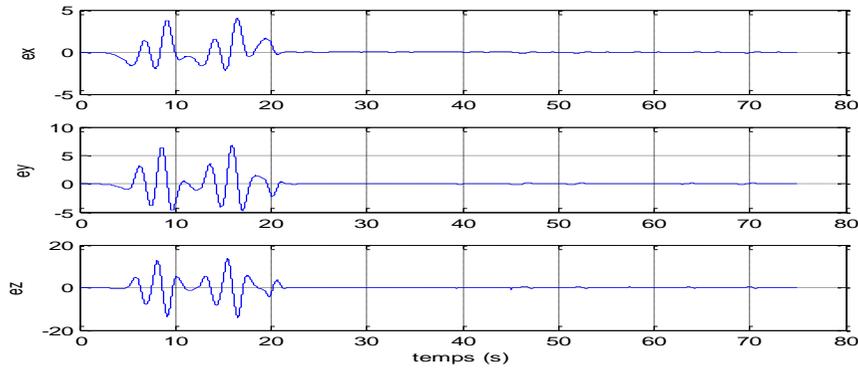
$$\begin{cases} x^{(q)} = y \\ y^{(q)} = z \\ z^{(q)} = a x - b y - r z - x^3 + \delta \end{cases} \quad (6.9)$$

Afin de tester la robustesse des performances du schéma de synchronisation CMGA proposé, on ajoute au système quatre variantes de perturbation : perturbation par échelon  $\delta(t) = B$ , perturbation aléatoire  $\delta(t) = B.rand$ , perturbation sinusoïdale  $\delta(t) = B.\sin(\omega t)$  et perturbation multiple  $\delta(t) = B.rand.\sin(\omega t)^2$ . D'après les résultats de simulation, on remarque que malgré tous ces types de perturbation il y a toujours une poursuite dans l'intervalle perturbé et même après le retrait de la perturbation comme il est montré dans les figures 6.10 à 6.13.

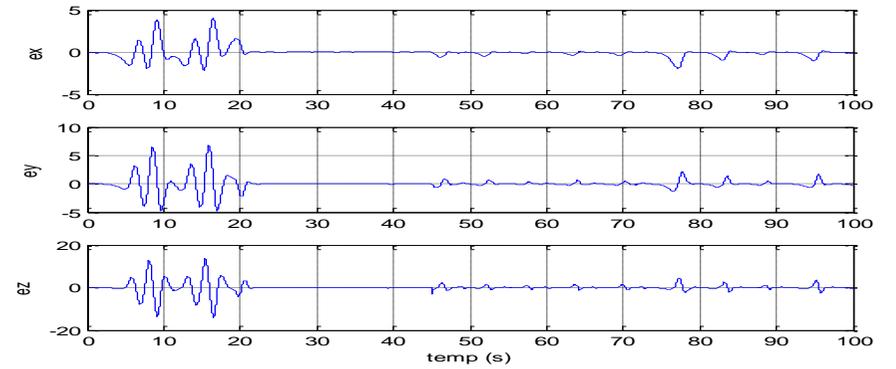
Pour  $\delta(t) = B$  la perturbation est appliquée à  $t = 45s$ . La synchronisation reste maintenue jusqu'à  $B = 0.04$  d'où le signal du système esclave commence à se détacher du système maître malgré qu'il suit sa trajectoire.



(a.1)(b.1)

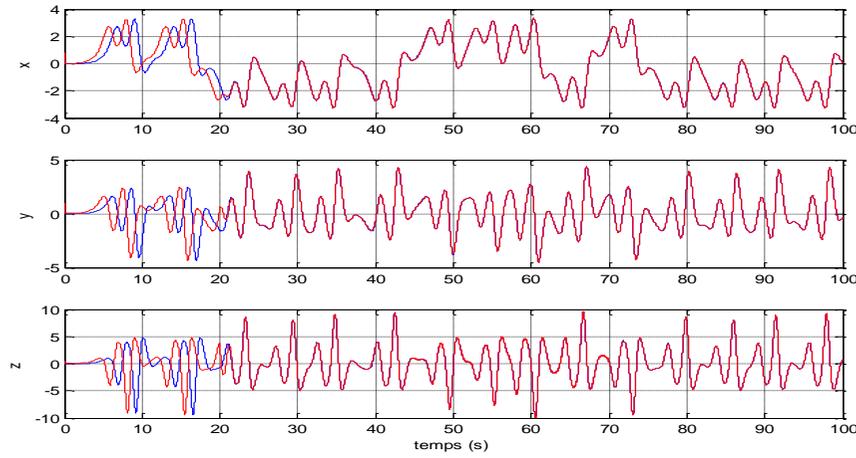


(a.2)

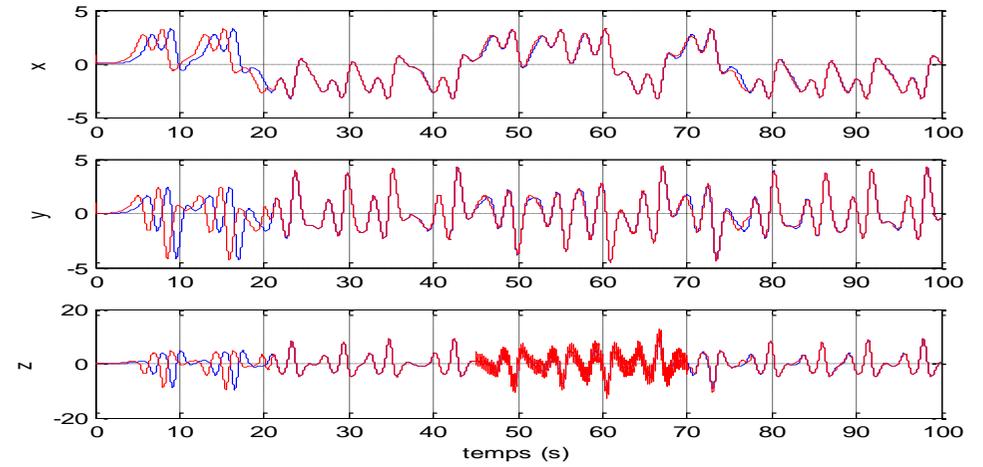


(b.2)

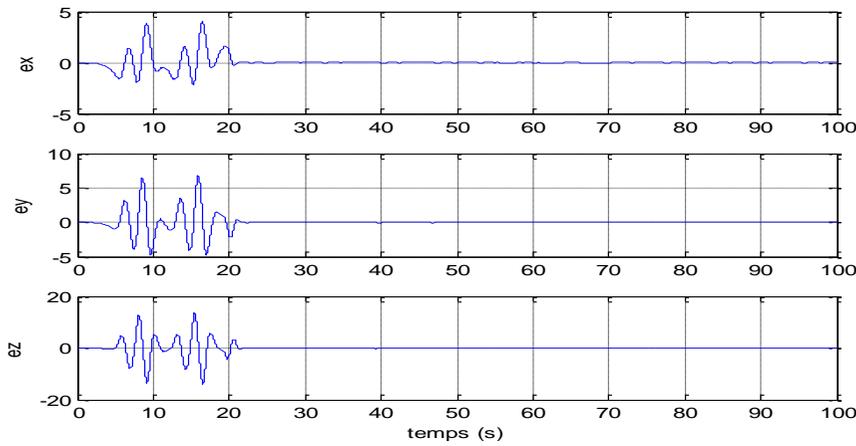
Fig. 6.10 (1) Synchronisation et (2) erreur de synchronisation du système d'Arneodo perturbé par un échelon ; (a):  $B = 0.01$  et (b) :  $B = 0.04$



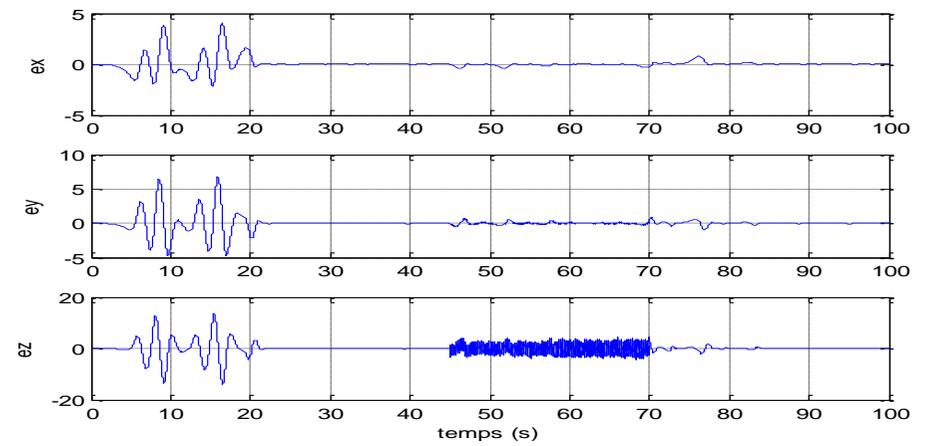
(a.1)



(b.1)

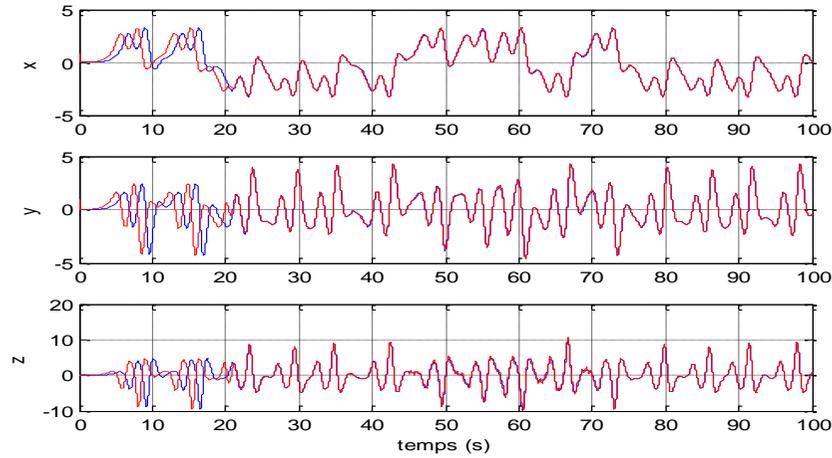


(a.2)

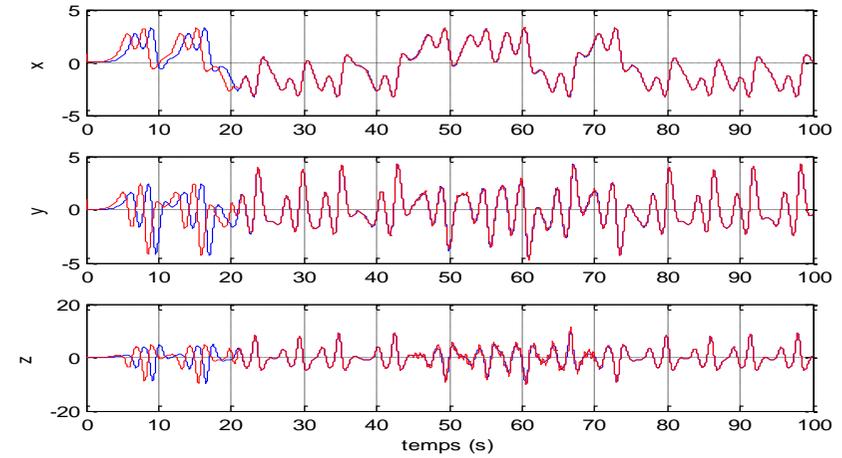


(b.2)

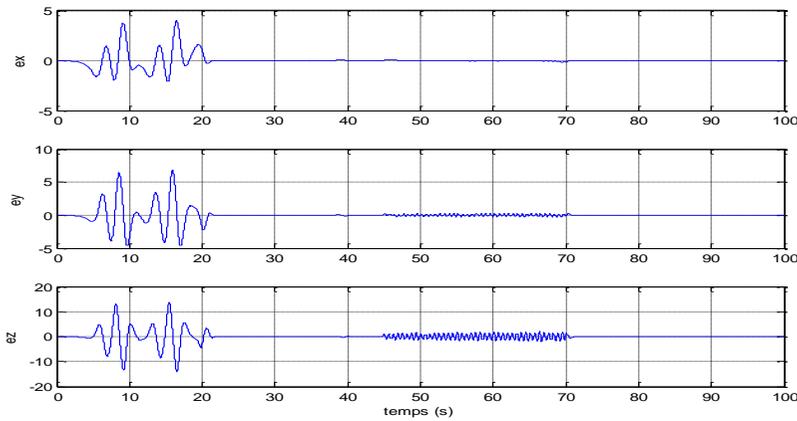
Fig. 6.11 (1) Synchronisation et (2) erreur de synchronisation du système d'Arneodo perturbé par un aléatoire ; (a):  $B = 0.01$  et (b) :  $B = 0.05$



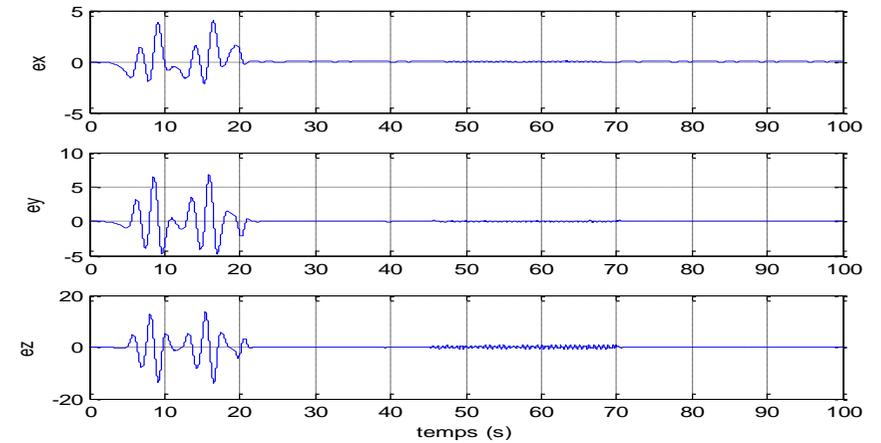
(a.1)



(b.1)

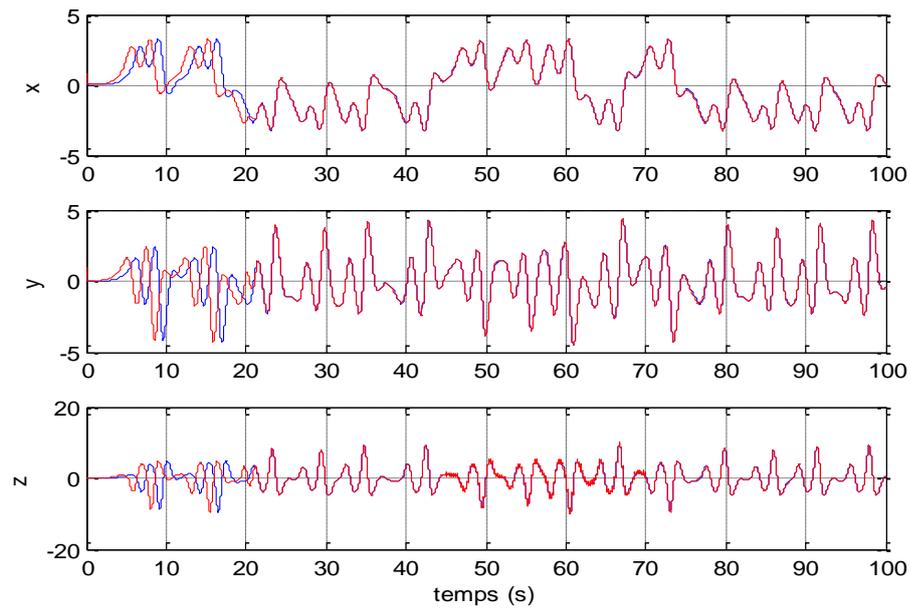


(a.2)

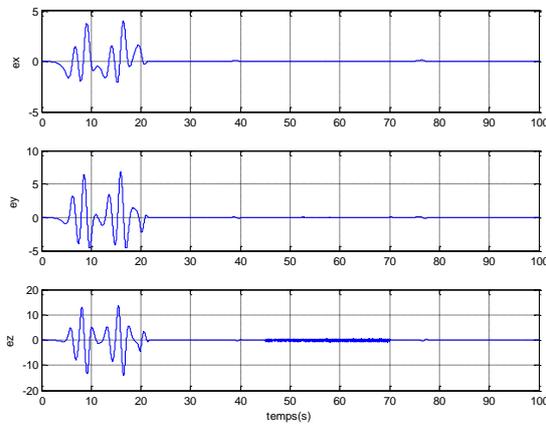


(b.2)

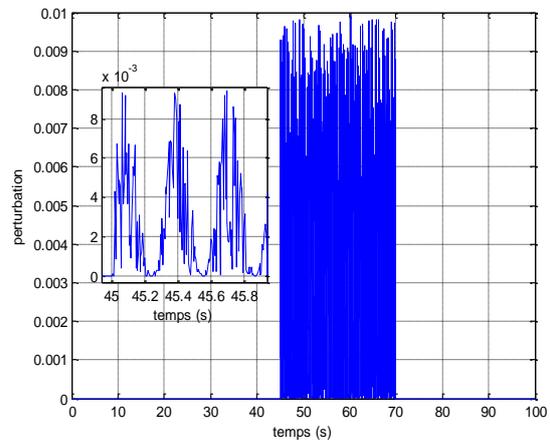
Fig. 6.12 (1) Synchronisation et (2) erreur de synchronisation du système d'Arneodo perturbé par un sinussoïde où  $\omega = 10$ ; (a):  $B = 0.01$  et (b) :  $B = 0.02$



(a)



(b)



(c)

Fig. 6.13 Synchronisation du système d'Arneodo en présence d'une perturbation multiple  $\delta(t) = 0.01 \cdot \text{rand} \cdot \sin(10t)^2$  ; (a) synchronisation du système maître et esclave, (b) les erreurs de la synchronisation, (c) la perturbation appliquée

D'après les résultats de simulation, bien que le système esclave comporte différents types de perturbation, la synchronisation est toujours obtenue. En présence d'un bruit additif son influence est

relativement liée à la grandeur de l'amplitude de la perturbation appliquée.

### **6.5. Conclusion**

Un nouveau schéma de contrôle adaptatif par mode glissant fractionnaire est proposé pour la synchronisation d'une classe de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. L'approche de conception considérée fournit un ensemble de loi fractionnaire qui garantit la stabilité asymptotique des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire dans le sens du théorème de stabilité de Lyapunov. Les résultats de simulations illustratives de la synchronisation du système d'Arneodo chaotique d'ordre fractionnaires en présence de différents types de perturbations montrent les bonnes performances et l'efficacité de cette solution de contrôle.

# Chapitre 7

## Conclusion Générale

Cette étude s'inscrit dans une démarche d'application des outils d'analyse, de caractérisation et de contrôle du chaos dans des systèmes d'équations différentielles d'ordre entier et fractionnaire. Cette contribution tend ainsi à élargir la théorie de la commande en développant de nouvelles techniques tout en montrant leur robustesse contre les bruits et les perturbations en les appliquant à une classe des systèmes chaotiques. L'analyse de la stabilité de tous les schémas de commande proposés est étudiée par l'approche de Lyapunov.

Le premier chapitre permet de se familiariser avec l'outil fractionnaire. On a fourni quelques notions de base de ce calcul et les méthodes d'approximation les plus courantes dans le domaine fréquentiel ainsi que dans le domaine temporel.

Après un court historique du chaos, on a fourni les moyens d'appréhender et de reconnaître un comportement chaotique, quantitativement et qualitativement et introduit les différentes méthodes du contrôle du chaos et les outils majeures utilisées dans la suite de cette thèse. Ce fut l'objet du troisième chapitre. Un exemple illustratif qui montre le contrôle par retour d'état des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire est aussi proposé.

La contribution majeure de nos travaux porte sur deux grands aspects. Il s'agit en premier lieu d'éliminer le chaos qui existe dans différents systèmes chaotiques d'ordre entier en utilisant un  $PI^\lambda D^\mu$  en présence des perturbations. Cela est développé de façon approfondie dans le quatrième chapitre.

Le deuxième point a porté sur la synchronisation robuste d'une classe de système chaotique d'ordre fractionnaire. Pour cela deux approches basées sur la commande par mode glissant sont proposées afin d'améliorer les performances des systèmes de contrôle. De plus, la proposition d'une stratégie de commande par mode glissant adaptatif qui présente une partie complémentaire du développement précédent permet d'améliorer les performances de la commande. Ce fut l'objet des cinquième et sixième chapitres respectivement.

Nous avons présenté plusieurs contributions à la commande d'ordre fractionnaire des systèmes chaotiques d'ordre entier ainsi qu'à la synchronisation d'ordre fractionnaire pour des

---

systèmes dynamiques non linéaires à comportement chaotique d'ordre non-entier.

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a permis de réaliser plusieurs publications notamment :

- pour ce qui concerne de la commande par retour d'état des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, une conférence internationales[89].
- Concernant la technique de commande par  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire, deux publication ; la première dans une revue internationale indexée [110] et le deuxième dans un journal internationale[90]et une conférences internationales[131].
- Concernant la nouvelle loi de commande proposée pour control par mode glissant, une publication dans une revue indexée[132]et une conférence internationale [130].
- Et finalement, la synchronisation par mode glissant adaptatif, une conférence internationale [133].

### **Perspectives**

Dans des situations réelles, les systèmes chaotiques peuvent ne pas être définis par des équations mathématiques. De plus, ils peuvent avoir des incertitudes sur un ou plusieurs de leurs paramètres. Pour ces raisons, on propose comme perspectives :

- Développer de nouveaux schémas de commande adaptative robuste d'ordre fractionnaire qui peuvent régir ce problème (Perturbations paramétriques).
- Généraliser les résultats obtenus au cas des systèmes à degré de liberté élevé.
- Etudier des schémas de commande adaptative indirecte avec identification des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire...

## Bibliographie

- [1] B. B. Mandelbrot et J. W. Van Ness, « Fractional Brownian motions, fractional noises and applications », *SIAM Rev.*, vol. 10, n° 4, p. 422–437, 1968.
- [2] A. Ouslaoup, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*. Paris, 1995.
- [3] S. Ladaci et Y. Bensafia, « Indirect fractional order pole assignment based adaptive control », *Eng. Sci. Technol. Int. J.*, vol. 19, n° 1, p. 518–530, mars 2016.
- [4] S. Ladaci, A. Charef, et J. Loiseau, « Robust fractional adaptive control based on the strictly positive realness condition », *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 19, n° 1, p. 69–76, 2009.
- [5] F. B. Duarte et J. T. Machado, « Chaotic phenomena and fractional-order dynamics in the trajectory control of redundant manipulators », *Nonlinear Dyn.*, vol. 29, n° 1, p. 315–342, 2002.
- [6] A. Neçaiibia, S. Ladaci, et A. Charef, « Fractional order extremum seeking approach for maximum power point tracking of photovoltaic panels | SpringerLink », *Front. Energy*, vol. 9, p. 43–53, 2015.
- [7] E. Ott, C. Grebogi, et J. A. Yorke, « Paper 1 Controlling chaos », *Control. Chaos Theor. Pract. Methods Non-Linear Dyn.*, p. 77, 1996.
- [8] L. M. Pecora et T. L. Carroll, « Synchronization in Chaotic Systems », *Phys Rev Lett*, vol. 64, n° 8, p. 821–825, 1990.
- [9] G. Chen et D. Lai, « Feedback control of Lyapunov exponents for discrete-time dynamical systems », *Int J Bifurc Chaos*, vol. 6, p. 1341–1349, 1996.
- [10] Q. Yang et C. Zeng, « Chaos in fractional conjugate Lorenz system and its scaling attractors », *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 15, n° 12, p. 4041–4051, déc. 2010.
- [11] T. Hartley, C. F. Lorenzo, et H. K. Qammer, « Chaos in a fractional order Chua's system - IEEE Xplore Document », *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 42, p. 485–490, 1995.
- [12] C. Li et G. Chen, « Chaos in the fractional order Chen system and its control », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 22, n° 3, p. 549–554, nov. 2004.
- [13] X. Wu et Y. Yang, « Chaos in the Fractional-Order Qi System and Its Synchronization Using Active Control », 2010, p. 109–112.
- [14] Z.-M. Ge et C.-Y. Ou, « Chaos in a fractional order modified Duffing system », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 34, n° 2, p. 262–291, oct. 2007.
- [15] L.-J. Sheu *et al.*, « Chaos in the Newton–Leipnik system with fractional order », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 36, n° 1, p. 98–103, avr. 2008.
- [16] V. Daftardar-Gejji et S. Bhalekar, « Chaos in fractional ordered Liu system », *Comput. Math. Appl.*, vol. 59, n° 3, p. 1117–1127, févr. 2010.
- [17] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Academic Press. San Diego- New York - London, 1999.
- [18] H. H. Sun et A. Charef, « Fractal system—A time domain approach », *Ann. Biomed. Eng.*, vol. 18, n° 6, p. 597–621, 1990.
- [19] J. T. Machado, V. Kiryakova, et F. Mainardi, « Recent history of fractional calculus », *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 16, n° 3, p. 1140–1153, mars 2011.
- [20] K. B. Oldham et J. Spanier, *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Mathematics in science and engineering., vol. 111. Richard Bellman, 2006.
- [21] S. G. Samko, A. A. Kilbas, et O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [22] U. K. Chakraborty, *Advances in Differential Evolution*, Berlin: Springer. 2008.

- 
- [23] I. Petras, I. Podlubny, P. O’Leary, L. Dorcak, et B. Vinagre, *Analogue Realization of Fractional Order Controllers*, FBERG, Technical University of Kosice. Kosice, 2002.
- [24] A. Charef, H. H. Sun, Y. Y. Tsao, et B. Onaral, « Fractal system as presented by singularity function », *IEEE Trans Autom Control*, vol. 37, n° 9, p. 1465–1470, 1992.
- [25] A. Charef, « Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional PI $\lambda$ D $\mu$  controller », *IEE Proc. - Control Theory Appl.*, vol. 153, n° 6, p. 714-720, nov. 2006.
- [26] Y. Chen et B. M. Vinagre, « A new IIR-type digital fractional order differentiator », *Signal Process.*, vol. 83, n° 11, p. 2359-2365, nov. 2003.
- [27] S. Momani et K. Al-Khaled, « Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition method », *Appl. Math. Comput.*, vol. 162, n° 3, p. 1351-1365, mars 2005.
- [28] B. M. Vinagre, Y. Q. Chen, et I. Petráš, « Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator », *J. Frankl. Inst.*, vol. 340, n° 5, p. 349-362, août 2003.
- [29] Y. Ferdi, « Computation of Fractional Order Derivative and Integral via Power Series Expansion and Signal Modelling », *Nonlinear Dyn.*, vol. 46, n° 1-2, p. 1-15, oct. 2006.
- [30] K. Diethelm, « Efficient Solution of Multi-Term Fractional Differential Equations Using P(EC) m E Methods », *Computing*, vol. 71, n° 4, p. 305-319, nov. 2003.
- [31] Y. Li, Y.-Q. Chen, et I. Podlubny, « MittagLeffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems », *Automatica*, vol. 45, p. 1965-1969.
- [32] A. D. Dalmedico, P. Arnoux, et J.-L. Chabert, *Chaos et déterminisme*. Éd. du Seuil, 1992.
- [33] E. . . Lorenz, « Deterministic Nonperiodic Flow », *J. Atmospheric Sci.*, vol. 20, p. 130-141, 1963.
- [34] I. Aneur, « Synchronisation, Chaotification et Hyperchaotification des Systèmes Non-linéaires : Méthodes et Applications », Université des frères mentouri constantine 1, 2011.
- [35] R. Caponetto, Éd., *Fractional order systems: modeling and control applications*. Singapore ; Hackensack, NJ: World Scientific, 2010.
- [36] H. Poincaré, *Science et méthode*. Paris, 1908.
- [37] R. . Devaney, « An Introduction to Chaotic Dynamical Systems », Addison-Wesley, New York, 1987.
- [38] T. . Li et J. . Yorke, « Period three implies chaos », *Am. Math. Mon.*, vol. 82, p. 481—485.
- [39] Houmor, « Analyse du Chaos dans un Système d’Équations Différentielles Fractionnaires », p. 144.
- [40] C. Grebogi, L. Poon, T. Sauer, J. A. Yorke, et D. Auerbach, « Shadowability of chaotic dynamical systems », *Handb. Dyn. Syst.*, vol. 2, p. 313–344, 2002.
- [41] F. Alain, « Contribution à la prédiction et au contrôle des comportements aperiodiques dans les convertisseurs électromécanique. Application de la théorie du chaos », Université de Reims France, 2005.
- [42] E. Ott, *E. Ott. Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press. 2012.
- [43] K. Rabah, « Behavior Studies of Nonlinear Fractional-Order Dynamical Systems Using Bifurcation Diagram », in *Advanced Synchronization Control and Bifurcation of Chaotic Fractional-Order Systems*, A. Boulkroune & S. Ladaci (eds.), IGI Global publisher USA, 2018, p. 166-189.
- [44] Y. Liu, « Circuit implementation and finite-time synchronization of the 4D Rabinovich hyperchaotic system », *Nonlinear Dyn.*, vol. 67, n° 1, p. 89-96, janv. 2012.
- [45] Y. Liu et Q. Yang, « Dynamics of a new Lorenz-like chaotic system », *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 11, n° 4, p. 2563-2572, août 2010.
- [46] A. . Harb et N. Abdel-Jabbar, « Controlling Hopf bifurcation and chaos in a small power
-

- system », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 18, n° 5, p. 1055-1063, déc. 2003.
- [47] W. L. Ditto, « Applications of chaos in biology and medicine », *Chaos Chang Nat Sci Med*, n° 376, p. 175-202, 1996.
- [48] J. Ma, C.-N. Wang, J. Tang, et Y.-F. Xia, « Suppression of the Spiral Wave and Turbulence in the Excitability-Modulated Media », *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 48, n° 1, p. 150-157, janv. 2009.
- [49] P. Lamba et J. . Houdson, « experiments on bifurcations to chaos in a forced chemical reactor », *Chem Eng Sci*, vol. 42, n° 1, p. 1-8, 1987.
- [50] D. Chen, Y. Liu, X. Ma, et R. Zhang, « Control of a class of fractional-order chaotic systems via sliding mode », *Nonlinear Dyn.*, vol. 67, n° 1, p. 893-901, janv. 2012.
- [51] D. Wang et J. Yu, « Chaos in the fractional order logistic delay system », *J Electron Sci Technol China*, vol. 6, n° 3, p. 225-229, 2008.
- [52] Y. Suansook et K. Paithoonwattanakij, « Chaos in Fractional Order Logistic Model », 2009, p. 297-301.
- [53] D. Cafagna et G. Grassi, « Bifurcation and chaos in the fractional Chua and Chen systems with very low order », in *Circuits and Systems, 2009. ISCAS 2009. IEEE International Symposium on*, 2009, p. 2846-2849.
- [54] L.-J. Sheu, H.-K. Chen, J.-H. Chen, et L.-M. Tam, « Chaos in a new system with fractional order », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 31, n° 5, p. 1203-1212, mars 2007.
- [55] L. Shan, Z. Liu, J. Li, et Z. Wang, « A new fractional-order chaotic system and its synchronization control », in *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, 2009, p. 5918-5922.
- [56] M. S. Tavazoei et M. Haeri, « Chaos generation via a switching fractional multi-model system », *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 11, n° 1, p. 332-340, févr. 2010.
- [57] K. Sun, X. Wang, et J. . Sprott, « Bifurcation and chaos in fractional-order simplified Lorenz system », *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 20, n° 4, p. 1209-1219, 2010.
- [58] H. Li, X. Liao, S. Ullah, et L. Xiao, « Analytical proof on the existence of chaos in a generalized Duffing-type oscillator with fractional-order deflection », *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 13, n° 6, p. 2724-2733, déc. 2012.
- [59] H. Y. Jia, Z. Q. Chen, et G. Y. Qi, « Chaotic Characteristics Analysis and Circuit Implementation for a Fractional-Order System », *IEEE Trans. Circuits Syst. Regul. Pap.*, vol. 61, n° 3, p. 845-853, mars 2014.
- [60] I. N'Doye, H. Voos, et M. Darouach, « Chaos in a Fractional-Order Cancer System.pdf », in *2014 European Control Conference*, 2014.
- [61] S. H. HosseinNia, R. L. Magin, et B. M. Vinagre, « Chaos in fractional and integer order NSG systems », *Signal Process.*, vol. 107, p. 302-311, 2015.
- [62] M. A. Rahimi, H. Salarieh, et A. Alasty, « Stabilizing periodic orbits of fractional order chaotic systems via linear feedback theory », *Appl. Math. Model.*, vol. 36, n° 3, p. 863-877, mars 2012.
- [63] K. Zhang, H. Wang, et H. Fang, « Feedback control and hybrid projective synchronization of a fractional-order Newton-Leipnik system », *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 17, n° 1, p. 317-328, janv. 2012.
- [64] S. Zhou, H. Li, et Z. Zhu, « Chaos control and synchronization in a fractional neuron network system », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 36, n° 4, p. 973-984, mai 2008.
- [65] Xing-yuan Wang, Yi-jie He, et Ming-jun Wang, « Chaos control of a fractional order modified coupled dynamo system », *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, vol. 71, p. 6126-6134, 2009.
- [66] I. Podlubny, « Fractional order systems and PI $\lambda$ D $\mu$  controllers », *Trans Autom. Control*, vol.

- 44, n° 1, p. 208-214, 1999.
- [67] V. Utkin, « Variable structure systems with sliding modes », *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 22, n° 2, p. 212–222, 1977.
- [68] M. S. Tavazoei et M. Haeri, « Synchronization of chaotic fractional-order systems via active sliding mode controller », *Phys. Stat. Mech. Its Appl.*, vol. 387, n° 1, p. 57–70, janv. 2008.
- [69] S. H. Hosseinnia, R. Ghaderi, A. Ranjbar N., M. Mahmoudian, et S. Momani, « Sliding mode synchronization of an uncertain fractional order chaotic system », *Comput. Math. Appl.*, vol. 59, n° 5, p. 1637–1643, mars 2010.
- [70] T.-C. Lin, T.-Y. Lee, et V. E. Balas, « Adaptive fuzzy sliding mode control for synchronization of uncertain fractional order chaotic systems », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 44, n° 10, p. 791–801, 2011.
- [71] D. M. Senejohnny et H. Delavari, « Active sliding observer scheme based fractional chaos synchronization », *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 17, n° 11, p. 4373–4383, nov. 2012.
- [72] M. R. Faieghi et H. Delavari, « Chaos in fractional-order Genesio–Tesi system and its synchronization », *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 17, n° 2, p. 731–741, févr. 2012.
- [73] A. Razminia et D. Baleanu, « Complete synchronization of commensurate fractional order chaotic systems using sliding mode control », *Mechatronics*, vol. 23, n° 7, p. 873–879, oct. 2013.
- [74] C. Yin, S. Dadras, S. Zhong, et Y. Chen, « Control of a novel class of fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control approach », *Appl. Math. Model.*, vol. 37, n° 4, p. 2469–2483, févr. 2013.
- [75] S. Dadras et H. R. Momeni, « Passivity-based fractional-order integral sliding-mode control design for uncertain fractional-order nonlinear systems », *Mechatronics*, vol. 23, n° 7, p. 880–887, oct. 2013.
- [76] X. Zhang, X. Liu, et Q. Zhu, « Adaptive chatter free sliding mode control for a class of uncertain chaotic systems », *Appl. Math. Comput.*, vol. 232, p. 431–435, avr. 2014.
- [77] J.-J. E. Slotine et W. Li, *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1991.
- [78] José A. Tenreiro Machado, « Analysis and design of fractional-order digital control systems », *Syst. Anal. Model. Simul.*, vol. 27, p. 107–122, janv. 1997.
- [79] J. T. Machado et A. Galhano, « Approximating fractional derivatives in the perspective of system control », *Nonlinear Dyn.*, vol. 56, n° 4, p. 401–407, 2009.
- [80] I. Pan et S. Das, « Chaotic multi-objective optimization based design of fractional order  $PI\lambda D\mu$  controller in AVR system », *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 43, n° 1, p. 393–407, 2012.
- [81] M. K. Bouafoura et N. B. Braiek, «  $PI\lambda D\mu$  controller design for integer and fractional plants using piecewise orthogonal functions », *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 15, n° 5, p. 1267–1278, mai 2010.
- [82] Z. Chen, X. Yuan, B. Ji, P. Wang, et H. Tian, « Design of a fractional order PID controller for hydraulic turbine regulating system using chaotic non-dominated sorting genetic algorithm II », *Energy Convers. Manag.*, vol. 84, p. 390–404, août 2014.
- [83] M. R. Faieghi, M. Naderi, et A. A. Jalali, « Design of fractional-order PID for ship roll motion control using chaos embedded PSO algorithm », in *Control, Instrumentation and Automation (ICCIA), 2011 2nd International Conference on*, 2011, p. 606–610.
- [84] Y. Tang, M. Cui, C. Hua, L. Li, et Y. Yang, « Optimum design of fractional order  $PI\lambda D\mu$  controller for AVR system using chaotic ant swarm », *Expert Syst. Appl.*, vol. 39, n° 8, p. 6887–6896, juin 2012.
- [85] A. Charef, M. Assabaa, S. Ladaci, et J. J. Loiseau, « Fractional order adaptive controller for

- stabilised systems via high-gain feedback », *IET Control Theory Appl.*, vol. 7, n° 6, p. 822 – 828, avr. 2013.
- [86] S. Ladaci et A. Charef, « An adaptive fractional  $PI\lambda D\mu$  controller », *Sixth Int. Symposium on Tools and Methods of Competitive Engineering, TMCE*, Ljubljana, Slovenia, p. 1533-1540, Avril 18-22.
- [87] H. Delavari, R. Ghaderi, A. Ranjbar N, S.H. HosseinNia, et S. Momani, « Adaptive Fractional PID Controller for Robot Manipulator ». Proceedings of FDA'10. The 4th IFAC Workshop Fractional Differentiation and its Applications, 2010.
- [88] A. Neçaibia, et S. Ladaci, « Self-tuning fractional order  $PI\lambda D\mu$  controller based on extremum seeking approach », *Int. J. Autom. Control Inderscience Enterp.*, vol. 8, n° 2, p. 99-121, juill. 2014.
- [89] K. Rabah, S. Ladaci, et mohamed Lashab, « Stabilization of Fractional Chen Chaotic System by Linear Feedback Control », présenté à 3<sup>rd</sup> IEEE International Conference on Control, Engineering & Information Technology, CEIT'2015, Tlemcen, Algeria, 2015.
- [90] K. Rabah, S. Ladaci, et M. Lashab, « Stabilization of a Genesio-Tesi Chaotic System Using a Fractional Order  $PI\lambda D\mu$  », *Int. J. Sci. Tech. Autom. Control Comput. Eng. IJ-STA 10*, vol. 1, p. 2085–2090, avr. 2016.
- [91] M. . Tavazoei et M. Haeri, « stabilization of unstable fixed points of chaotic fractional order systems by a state fractional pi controller », *European Journal of Control*, p. 247-257, 2008.
- [92] D. Chen, R. Zhang, X. Liu, et X. Ma, « Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks », *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 19, n° 12, p. 4105-4121, déc. 2014.
- [93] X. Liu, X. S. Shen, et H. Zhang, « Multi-Scroll chaotic and hyperchaotic attractors generated from Chen system », *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 22, n° 02, p. 1250033, févr. 2012.
- [94] R. Genesio et A. Tesi, « Harmonic Balance Methods for the Analysis of Chaotic Dynamics in Nonlinear Systems », *Automatica*, vol. 28, n° 3, p. 531-548, 1992.
- [95] S. Hadeif et A. Boukabou, « Control of multi-scroll Chen system », *J. Frankl. Inst.*, vol. 351, n° 5, p. 2728-2741, mai 2014.
- [96] J. H. Park, « Adaptive controller design for modified projective synchronization of genesio-tesi chaotic system with uncertain parameters », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 34, p. 1154-1159, 2007.
- [97] A. Fayazi et H. N. Rafsanjani, « Synchronization in the Genio-Tesi and Couillet system using a fractional-order adaptive controller », présenté à 9th IEEE International Conference on Control and Automation, Santiago, Chile, 2011, p. 889-894.
- [98] J. H. Park, S. M. Lee, et O. M. Kwon, « Adaptive synchronization of Genesio–Tesi chaotic system via a novel feedback control », *Phys. Lett. A*, vol. 371, n° 4, p. 263-270, nov. 2007.
- [99] J. H. Park et O. M. Kwon, « LMI optimization approach to stabilization of genesio-tesi chaotic system via dynamic controller », *Appl. Math. Comput.*, vol. 196, p. 200-206, 2008.
- [100] S. Dadras et H. R. Momeni, « Control uncertain Genesio–Tesi chaotic system: Adaptive sliding mode approach », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 42, n° 5, p. 3140-3146, déc. 2009.
- [101] M. Ghamati et S. Balochian, « Design of adaptive sliding mode control for synchronization Genesio–Tesi chaotic system », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 75, p. 111-117, juin 2015.
- [102] G. Wang, « Stabilization and synchronization of Genesio–Tesi system via single variable feedback controller », *Phys. Lett. A*, vol. 374, n° 28, p. 2831-2834, juin 2010.
- [103] R. Gholipour, A. Khosravi, et H. Mojallali, « Intelligent back stepping control for genesio-tesi chaotic system using a chaotic particle swarm optimization algorithm », *Int J Comput. Electr. Eng.*, vol. 4, n° 5, p. 618-625, 2012.
- [104] S. H. Hosseinnia, R. Ghaderi, A. Ranjbar, F. Abdous, et S. Momani, Éd., *Control of Chaos via*

- Fractional-Order State Feedback Controller*, D. Baleanu et al. (eds.), New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications, 2010.
- [105] J. Cao, C. Ma, H. Xie, et Z. Jiang, « Nonlinear Dynamics of Duffing System With Fractional Order Damping », *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, vol. 5, n° 4, p. 041012, 2010.
- [106] J. G. Lu, « Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization », *Phys. Lett. A*, vol. 354, n° 4, p. 305-311, juin 2006.
- [107] W. Jiang et T. Ma, « Synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control », in *Vehicular Electronics and Safety (ICVES), 2013 IEEE International Conference on*, 2013, p. 229–233.
- [108] B. Mondal et T. Mandal, « A light weight secure image encryption scheme based on chaos map », *J. King Saud Univ. - Comput. Inf. Sci.*, mars 2016.
- [109] J. Yuan, B. Shi, et Y. Wang, « Control and synchronization of fractional unified chaotic systems with a single sliding mode controller », in *Control Conference (CCC), 2014 33rd Chinese*, 2014, p. 1800–1805.
- [110] K. Rabah, S. Ladaci, et M. Lashab, « Bifurcation-based fractional-order PID $\mu$  controller design approach for nonlinear chaotic systems », *Front. Inf. Technol. Electron. Eng.*, vol. 19, n° 2, p. 180-191, avr. 2018.
- [111] A. A. Ahmed, R. B. Ahmad, A. Yahya, H. H. Tahir, et J. Quinlan, « Variable Structure System with Sliding Mode Controller », *Procedia Eng.*, vol. 53, p. 441-452, 2013.
- [112] K. Khettab, S. Ladaci, et Y. Bensafia, « Fuzzy adaptive control of a fractional order chaotic system with unknown control gain sign using a fractional order Nussbaum gain », *IEEECAA J. Autom. Sin.*, p. 1-8, 2017.
- [113] B. Bourouba et S. Ladaci, « Stabilization of class of fractional-order chaotic system via new sliding mode control », *6th Int. Conf. Syst. Control ICSC'17 University Batna 2 Batna Algeria 2017*, mai 2017.
- [114] T.-C. Lin, T.-Y. Lee, et V. E. Balas, « Adaptive fuzzy sliding mode control for synchronization of uncertain fractional order chaotic systems », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 44, n° 10, p. 791-801, oct. 2011.
- [115] M. R. Faieghi et H. Delavari, « Chaos in fractional-order Genesio-Tesi system and its synchronization », *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 17, n° 2, p. 731-741, févr. 2012.
- [116] D. Matignon, « Stability results for fractional differential equations with applications to control processing », in *Computational engineering in systems applications*, 1996, vol. 2, p. 963–968.
- [117] S. Ladaci, K. Rabah, et M. Lashab, « Robust synchronization of fractional-order Arneodo chaotic systems using a fractional sliding mode control strategy », in *Advanced Synchronization Control and Bifurcation of Chaotic Fractional-Order Systems*, A. Boukroune & S. Ladaci (eds.), IGI Global publisher USA, 2018, p. 1-22.
- [118] Y. Ningning et L. Chongxin, « A novel fractional-order hyperchaotic system stabilization via fractional sliding-mode control », *Nonlinear Dyn.*, vol. 74, n° 3, p. 721-732, 2013.
- [119] S. Shuyi, C. Mou, et Y. Chen, « Adaptive sliding mode synchronization for a class of fractional-order chaotic systems with disturbance », *Nonlinear Dyn.*, vol. 83, n° 4, p. 1855-1866, 2016.
- [120] L. Jun Guo et C. Guanrong, « A note on the fractional-order Chen system », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 27, p. 685-688, 2006.
- [121] C. Li et C. Guanrong, « Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations », *Phys. Stat. Mech. Its Appl.*, vol. 341, p. 55-61, 2004.
- [122] K. Ljupco et L. Shiguo, *Chaos-based Cryptography*, Springer. .
- [123] H. Chen, W. Chen, B. Zhang, et H. Cao, « Robust synchronization of incommensurate

- fractional-order chaotic systems via second-order sliding mode technique », *J. Appl. Math.*, vol. 2013, 2013.
- [124] M. P. Aghababa, « Comments on “Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems” [Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 17 (2012) 356–366] », *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 17, n° 3, p. 1485-1488, mars 2012.
- [125] Z. Ding et Y. Shen, « Projective synchronization of nonidentical fractional-order neural networks based on sliding mode controller », *Neural Netw.*, vol. 76, p. 97-105, avr. 2016.
- [126] J. J. Slotine et S. S. Sastry, « Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators - IEEE Xplore Document », *Int J Control*, vol. 38, n° 2, p. 465-492, 1983.
- [127] A. Levant, « Universal single-input-single-output (SISO) sliding-mode controllers with finite-time convergence », *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 46, n° 9, p. 1447-1451, sept. 2001.
- [128] A. Levant, « Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control », *Int. J. Control*, vol. 58, n° 6, p. 1247-1263, déc. 1993.
- [129] W. M. Ahmad, R. El-Khazali, et Y. Al-Assaf, « Stabilization of generalized fractional order chaotic systems using state feedback control », *Chaos Solitons Fractals*, vol. 22, n° 1, p. 141-150, oct. 2004.
- [130] K. Rabah et S. Ladaci, « Fractional Adaptive Sliding Mode Control Laws for Fractional Order Chaotic Systems Synchronization », présenté à 17th IEEE international Conference on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering STA'2016, Sousse, Tunisia, p. 293-302, 2016.
- [131] K. Rabah, S. Ladaci, et M. Lashab, « State Feedback with Fractional  $PI\lambda D\mu$  Control Structure for fractional Lü Chaos Stabilization », présenté à 8th IEEE International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC 2016), Algiers, Algeria, 2016.
- [132] K. Rabah, S. Ladaci, et M. Lashab, « A novel fractional sliding mode control configuration for synchronizing disturbed fractional order », *Pramana - J. Phys.*, vol. 89, n° 3, p. 1-13, 2017.
- [133] K. Rabah et S. Ladaci, « A novel fractional order adaptive sliding mode controller design for chaotic Arneodo systems synchronization », présenté à 6th International Conference on Systems and Control (ICSC'17), p. 465-469, Batna, Algeria, 2017.

## Résumé

Le but de cette thèse consiste à prouver les performances des schémas de commande basés sur les éléments du calcul fractionnaire afin de les appliquer aux différentes classes de systèmes non linéaires à comportement chaotique. Dans ce contexte, des idées nouvelles sont proposées pour améliorer différents systèmes de contrôle.

La contribution de ce travail comporte la proposition de trois schémas de commande d'ordre fractionnaire destiné aux systèmes d'ordre entier et fractionnaire notamment :

- Concevoir un contrôleur  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  d'ordre fractionnaire où la configuration de ses paramètres se base sur les diagrammes de bifurcation et l'erreur quadratique.
- une nouvelle conception systématique du schéma de contrôle par mode glissant fractionnaire pour la synchronisation d'une classe de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire en se basant sur le théorème de la stabilité de Lyapunov.
- Proposition d'une nouvelle loi de commande adaptative en utilisant le control par mode glissant fractionnaire pour la synchronisation de la même classe des systèmes chaotiques.

Les résultats théoriques sont validés par des exemples de simulation. Pour la première contribution, la comparaison avec le schéma de commande d'ordre entier classique montre une nette amélioration des performances.

## Mots Clés :

Calcul fractionnaire, systèmes chaotiques, système de commande d'ordre fractionnaire, commande par PID d'ordre fractionnaire, commande par mode glissant fractionnaire, commande par mode glissant adaptatif fractionnaire.

### ملخص:

الهدف من هذه الرسالة هو إثبات حسن أداء نظام الرقابة المعتمد علي الحساب الجزئي المطبق على فئات مختلفة من النظم غير الخطية ذات السلوك الشبه فوضوي. وفي هذا السياق، نقترح أفكارا جديدة لتحسين أنظمة التحكم المختلفة.

تشمل مساهمة العمل ثلاث مخططات أنظمة سيطرة معتمدة على الحساب الجزئي مقترحة بهدف مراقبة الأنظمة الكلاسيكية و ذات الدرجة الجزئية و هي:

- تصميم نظام تحكم من نوع (تناسب، تكامل، اشتقاق) جزئي حيث يستند ضبط إعداداته إلي مخططات التشعب والخطأ التريبيعي.
- وضع منهجية جديدة لتصميم مخطط سيطرة معتمد علي وضع الانزلاق لمزامنة فئة من النظم شبه الفوضوية علي أساس نظرية الاستقرار لليابونوف.
- اقتراح قانون تكيف جديد لوضع الانزلاق لمزامنة نفس الفئة من النظم شبه الفوضوية.

يتم التحقق من صحة النتائج النظرية بأمثلة المحاكاة للمساهمة الأولى، مقارنة مع المخطط الكلاسيكي و أظهرت النتائج تحسنا ملحوظا في الأداء.

### كلمات البحث :

حساب التفاضل والتكامل الجزئي، النظم شبه الفوضوية، المزامنة، أنظمة يحكم ذات الدرجة الجزئية، نظام تحكم من نوع (تناسب، تكامل، اشتقاق) جزئي، مراقبة النظم عن طريق وضع الانزلاق، مراقبة النظم عن طريق وضع انزلاق المتكيف الجزئي.

## Summary

The aim of this thesis is to prove the performance of the control schemes based on fractional calculus elements in order to apply them to different classes of nonlinear systems with chaotic behavior. In this context, new ideas are proposed to improve various control systems.

The contribution of this work involves the proposal of three fractional order schemes for integer and fractional order systems, in particular:

- Design a  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller of fractional order where the configuration of its parameters is based on the bifurcation diagrams and the quadratic error.
- A new systematic design of the fractional sliding control scheme for the synchronization of a class of fractional order chaotic systems based on the Lyapunov stability theorem.
- Proposition of a new adaptive control law using fractional sliding control for the synchronization of the same class of chaotic systems.

The theoretical results are validated by simulation examples. For the first contribution, comparison with the classical integer order scheme shows a remarkable improvement in performance.

### **Keywords:**

Fractional calculus, chaotic systems, fractional order control system, synchronization, fractional order PID controller, fractional sliding mode control, fractional adaptive sliding mode control.