

Université 20 Août 1955-Skikda  
Faculté de Technologie  
Département : Génie Électrique  
Ref : **D012118012D**



جامعة 20 أوت 1955 سكيكدة  
كلية التكنولوجيا  
قسم: الهندسة الكهربائية  
المرجع: **D012118012D**

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de :  
**Doctorat en sciences**

Spécialité : **AUTOMATIQUE**

**Robustification de la forme polynomiale de la loi de  
GPC en utilisant les transferts d'ordre entier**

Présentée par :  
**Mohammed AIDOU**

Soutenue publiquement le **19/06/2018**

**Devant le jury composé de :**

Mr. Lamine Mehennaoui	MCA	Président	Université du 20 Août 1955, Skikda
Mr. Abderrazek Lachouri	Professeur	Rapporteur	Université du 20 Août 1955, Skikda
Mr. Moussa Sedraoui	Professeur	Co-encadreur	Université 8 Mai 1945, Guelma
Mr. Abdesselam Babouri	Professeur	Examineur	Université 8 Mai 1945, Guelma
Mr. Madjid Kidouche	Professeur	Examineur	Université M'Hamed Bougara, Boumerdès
Mr. Mohamed Nemissi	MCA	Examineur	Université 8 Mai 1945, Guelma
Mr. Abdelaziz Younsi	Professeur	Invité	Université 8 Mai 1945, Guelma

## **Remerciements**

*En premier lieu, je remercie Dieu, notre Créateur, qui m'a donné la force, la volonté et la patience tout au long de mes études et d'accomplir finalement ma thèse.*

*Je tiens à remercier tout particulièrement le Professeur **LACHOURI Abderrazek** pour m'avoir fait confiance en acceptant d'être le promoteur de cette thèse, et pour avoir validé mon inscription de doctorat au sein de son université, pour sa direction scientifique et ses qualités humaines qui m'ont été d'un apport précieux afin de mener à bien ce projet de doctorat.*

*Un grand Merci au **Pr. SEDRAOUI Moussa** pour m'avoir fait confiance en acceptant d'être le Co-encadreur de ma thèse, pour sa disponibilité dont aucun qualificatif ne saurait décrire l'étendue. Il a consacré de nombreuses heures à l'interprétation et à l'analyse critique des résultats obtenus, ce qui m'a grandement aidé pour leur faire prendre corps dans la rédaction de la thèse et des articles.*

*Je remercie également Messieurs **MEHENNAOUI Lamine**, **BABOURI Abdessalem**, **KIDOUCHE Madjid**, **NEMISSI Mohamed** et **YOUNSI Abdelaziz** pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail en acceptant de l'examiner.*

*Je tiens aussi à remercier grandement le Professeur **Pr. VICENTE Feliu Batlle** le Directeur du Laboratoire d'Automatique et Robotique de l'Université de CASTILLA LA MANCHA CIUDAD REAL SPAIN pour leur sympathie et leur collaboration tout au long de mes stages.*

*Je ne peux en fin manquer de remercier tous les membres du Laboratoire d'Automatique et Informatique Guelma (LAIG),*

*Enfin, je tiens à ne pas oublier dans mes remerciements mes amis et collègues des universités: de Guelma, Skikda et de M'Sila, ainsi que l'ensemble des membres ma famille pour leur soutien tout au long de ces années de doctorat.*

*ABDOU D. Mohammed*

# Résumés

في هذه الأطروحة، اقترحنا نظام تقويم جديد يهدف إلى تحسين نتائج المصحح التنبؤي المعمم في حالة وجود أخطاء مرفقة بالنموذج الرياضي الخطي الذي يصف ديناميكية النظام الفيزيائي الحقيقي المراد التحكم فيه. حيث تبدأ فكرة التحسين بإدراج و بصفة مستقلة مصحح آخر يتم الحصول عليه بتطبيق النظام التحكمي المدعم أين يتم فيه تطبيق طريقة  $H_{\infty}$  حيث يقوم هذا الأخير بتحسين و توسيع مجال الأمان لإستقرار النظام المغلق و هذا عن طريق إختيار أمثل لمصفوفتي التقييد، حيث تعمل كل منهما على تقييد تطور الحساسية المباشرة و المكلمة، و هذا في المجال التواتري. حيث تدرج هاتين الأخيرتين في قانون الحساسية المزدوج و المقيد، أين يتم إستنباط المصحح الأنسب و الذي يضمن تحسين مساوي المصحح التنبؤي الأولي. كما أن عملية التحسين تتم بإدراج أبعاد يولا أين تتم عملية التهجين بين المصححين السابقين وهذا من اجل الحصول على المصحح التنبؤي المعمم و المدعم الذي يضمن الحصول على محاسن كلا منهما. حيث إن تجسيد هذه الطريقة و إستنباط محاسنها قد تم إظهارها وهذا بتطبيقها على نظامين تمت السيطرة عليهما بنظم أخرى و هذا في عدة مراجع. حيث يتمثل النظام الأول في المحرك الهيدروليكي. أما الثاني فيتمثل في آلة التغذية المزدوجة الغير متزامنة و التي تحاكي تشغيل نظام الرياح. حيث تم تأكيد صحة هذه الفكرة الجديدة المقترحة من خلال السيطرة على النظامين السابقين، كما تمت مقارنة النتائج المحصل عليها من خلال هذا التحسين، في المجال التواتري وكذلك في المجال الزمني، مع تلك التي توفرها وحدة تحكم  $H_{\infty}$  وكذا وحدة التحكم التنبؤية الأولية. هذه المقارنة تؤكد فعالية اقتراحنا من حيث ضمان أفضل حل موازنة بين المتانة و قوة التحكم.

**الكلمات المفتاحية:** التحكم التنبؤي المعمم، التحكم المدعم، المصحح الخطي، المحرك الهيدروليكي، المحرك الغير متزامن (MADA)

## Résumé

Le travail proposé dans ce manuscrit concerne la robustification d'une classe de contrôleurs prédictifs primaires à deux degrés de liberté. Cette robustification proposée a pour but de commander plusieurs systèmes incertains, en particulier : un actionneur hydraulique et une machine asynchrone à doubles alimentations qui simule le fonctionnement du système éolien. La synthèse du contrôleur robustifié par notre proposition doit passer par les trois étapes suivantes : Premièrement, un contrôleur prédictif primaire est synthétisé par la méthode GPC afin d'assurer un bon comportement de poursuite des trajectoires de référence. Cela peut être obtenu par un choix adéquat des paramètres de réglage proposés dans la méthode GPC. Ensuite, un contrôleur robuste est indépendamment synthétisé par la méthode  $H_\infty$  afin de fournir un bon compromis de robustesse entre la stabilité robuste et les performances nominales du système bouclé. Ceci est assuré par le choix adéquat des pondérations dans le critère de sensibilité mixte du problème à résoudre. Ces deux contrôleurs synthétisés ont été finalement hybridés par le transfert de Youla, qui est déterminé par un algorithme d'optimisation utilisant l'approche de l'identification fréquentielle. Le contrôleur résultant a la capacité de conserver le meilleur comportement de poursuite du contrôleur prédictif primaire. Il conserve également une meilleure robustesse du contrôleur robuste qui réalise avec succès le meilleur compromis de robustesse entre la stabilité robuste et les performances nominales du système bouclé. La validité de cette nouvelle idée proposée est confirmée via la commande des deux systèmes cités précédents dont le comportement réel de chacun a été décrit par un modèle incertain entaché par des erreurs de modélisation présentées sous forme d'incertitudes non structurées amenées à la sortie du modèle de synthèse. Les résultats obtenus par cette robustification sont comparés, dans les plans fréquentiel et temporel, à ceux fournis par le contrôleur robuste et le contrôleur prédictif primaire. Cette comparaison confirme l'efficacité de notre proposition en termes de l'assurance du meilleur compromis de robustesse par le contrôleur robustifié.

**Mots-clés :** Commande Prédictive Généralisée Multivariable MGPC ; Commande Robuste ; Compromis de robustesse entre les performances nominales et la stabilité robuste ; Problème de sensibilité mixte.

**Abstract:**

This work proposes a robustification method of primary two degree-of-freedom (2-DOF) controllers which are used to control some uncertain systems such as: hydraulic actuator, wind turbine equipped with a doubly-fed induction generator DFIG, and so one. The proposed robustification method should follow the following three step-procedures. First, the primary 2-DOF controller is designed through the initial form of the multivariable generalized predictive control MGPC law to ensure a good tracking dynamic of reference trajectories. Second, the robust  $H_\infty$  controller is independently designed to ensure good robustness properties of the closed-loop system against model uncertainties, neglecting dynamics and sensor noises. Finally, both above controllers are combined to design the robustified 2-DOF-MGPC controller using the Youla parameterization method. Consequently, the robustified controller should conserve the same good tracking dynamic that is provided by the primary 2-DOF-MGPC controller. It should also ensure the same good robustness properties that are provided by the robust  $H_\infty$  controller. The proposed robustification method is validated from controlling the two previous processes. Their actual behaviors have been modeled by an unstructured-output multiplicative uncertainty model. The given performances are compared, in time and frequency domains, with those given through both robust controller and primary 2-DOF one. This comparison confirms the effectiveness of the proposed method in term of enhancing the trade-off robustness between nominal performances and robust stability of the closed-loop system.

**Key-words:** Multivariable Generalized Predictive Control MGPC; Robust control; Trade-off between nominal performances and robust stability; weighted-mixed sensitivity problem.

# Liste des symboles et abréviations

## Symboles et Abréviations

$GPC$	Commande prédictive généralisée
$U(t)$	Vecteur de commande fournie par le contrôleur
$Y(t)$	Vecteur de sorties (grandeurs à régler)
$MIMO$	Multi Input Multi Output
$G_d(s)$	Matrice de transfert du modèle nominal à commander
$MFD$	Description matricielle fractionnaire
$N_r(z^{-1})$	Matrice polynomiale Co-première à droite
$D_r(z^{-1})$	Matrice polynomiale Co-première à droite
$N_\ell(z^{-1})$	Matrice polynomiale Co-première à gauche
$D_\ell(z^{-1})$	Matrice polynomiale Co-première à gauche
$\zeta(t)$	Vecteur d'erreurs de modélisation
$A(z^{-1})$	Matrices polynomiale diagonale et non singulière
$B(z^{-1})$	Matrices polynomiale
$C(z^{-1})$	Matrices polynomiale diagonale et non singulière
$\Delta(z^{-1})$	Matrice polynomiale intégrateur
$J(\Delta u)$	Critère quadratique à minimiser
$SISO$	Single Input Single Output
$\hat{Y}$	Vecteur du prédicteur optimal
$\underline{\Delta U}$	Vecteur des incréments de commande
$\underline{F}$	Vecteur comportant la prédiction de la réponse libre du système
$IF$	Matrice polynomiale
$IH$	Matrice polynomiale
$\underline{G}$	Matrices réelle
$M_1$	Matrices réelle
$\underline{W}$	Vecteur des références futures
$N_1$	Horizon minimal de prédiction de sortie
$N_2$	Horizon maximal de prédiction de la sortie
$N_u$	Horizon de prédiction de commande
$\lambda$	Matrice réelle diagonale de pondération
$R_{0/1}S_{0/1}T_{0/1}$	Formulation polynomiale de la loi de GPC initiale et robustifié
$K_{0/1}(z^{-1})$	Poste-compensateur du contrôleur prédictif primaire et robustifié
$H_{0/1}(z^{-1})$	Pré-compensateur du contrôleur prédictif primaire et robustifié
$w_f(t)$	Vecteur des consignes filtrées par le pré-compensateur
$e(t)$	Vecteur des erreurs de poursuite.
$d_u$	Perturbations ramenées en entrée du système à commander.
$d_y$	Perturbations ramenées en sortie du système à commander.



$\eta_y$	Bruits de mesure.
$S_u$	Matrice de sensibilité directe en entrée
$T_u$	Matrice sensibilité complémentaire en entrée
$S_y$	Matrice de sensibilité directe en sortie
$T_y$	Sensibilité complémentaire en entrée
$G_{cl}$	Matrice de transfert d'entrée/sortie du système
$K_H(z^{-1})$	Matrice de transfert décrivant le contrôleur $H_\infty$
$P(z^{-1})$	Matrice de transfert décrivant le modèle généralisé avec le bloc $K_H$
$\Delta_m(z^{-1})$	Matrice de transfert stable décrivant les incertitudes de modélisation
$w(z^{-1})$	Vecteur qui représente les différentes entrées exogènes
$z(z^{-1})$	Vecteur qui représente les différentes sorties exogènes
$\Delta_{N_\ell}$	Incertitudes non structurées sur le facteur premier à gauche $N_\ell$
$\Delta_{D_\ell}$	Incertitudes non structurées sur le facteur premier à gauche $D_\ell$
$\Delta_{N_r}$	Incertitudes non structurées sur le facteur premier à droite $N_r$
$\Delta_{D_r}$	Incertitudes non structurées sur le facteur premier à droite $D_r$
$G_p(z^{-1})$	Système perturbé réel
<i>SVD</i>	Décomposition en valeurs singulières
<i>LFT</i>	Transformation linéaire fractionnaire
$M(z^{-1})$	Matrice de transfert du modèle généralisé avec le bloc $\Delta_m(z^{-1})$
$W_{S_d}(z^{-1})$	Pondération limitant les valeurs singulières maximales de $S_y$
$W_{u_d}(z^{-1})$	Pondération limitant les valeurs singulières maximales de $S_u$
$W_{T_d}(z^{-1})$	Pondération limitant les valeurs singulières maximales de $T_y$
<i>LMI</i>	Inégalités matricielles linéaires
<i>PN</i>	Performances Nominales
<i>SR</i>	Stabilité Robuste
$Q(z^{-1})$	Matrice polynomiale de Youla
$X_r(z^{-1})$	Matrice polynomiale Co-première à droite du post-compensateur
$Y_r(z^{-1})$	Matrice polynomiale Co-première à droite du post-compensateur
$X_\ell(z^{-1})$	Matrice polynomiale Co-première à gauche du post-compensateur
$y_\ell(z^{-1})$	Matrice polynomiale Co-première à gauche du post-compensateur
$Z_\ell(z^{-1})$	Matrice polynomiale Co-première à gauche du pré-compensateur
$Z_r(z^{-1})$	Matrice polynomiale Co-première à droite du pré-compensateur
$\psi_\ell(z^{-1})$	Matrice reliant les entrées/sorties exogènes du contrôleur gauche
$\psi_r(z^{-1})$	Matrice reliant les entrées/sorties exogènes du contrôleur droite
$2 - DOF$	Contrôleur à deux degrés de liberté
$p(t)$	Pression de l'air instrument
$\theta(t)$	Position de la tige du vérin
$V_{ds}$	Composantes du vecteur tension statorique selon l'axe « d »
$V_{qs}$	Composantes du vecteur tension statorique selon l'axe « q »

$V_{dr}$	Composantes du vecteur tension rotorique selon l'axe « d »
$V_{qr}$	Composantes du vecteur tension rotorique selon l'axe « q »
$I_{ds}$	Composantes du vecteur courant statorique selon l'axe « d »
$I_{qs}$	Composantes du vecteur courant statorique selon l'axe « q »
$I_{dr}$	Composantes du vecteur courant rotorique selon l'axe « d »
$I_{qr}$	Composantes du vecteur courant rotorique selon l'axe « q »
$\phi_{ds}$	Composantes du vecteur flux statorique selon l'axe « d »
$\phi_{qs}$	Composantes du vecteur flux statorique selon l'axe « q »
$\phi_{dr}$	Composantes du vecteur flux rotorique selon l'axe « d »
$\phi_{qr}$	Composantes du vecteur flux rotorique selon l'axe « q »
$R_s$	Résistance (d'une phase) de l'enroulement statorique
$R_r$	Résistance (d'une phase) de l'enroulement rotorique
$L_s$	Inductance cyclique du stator
$L_r$	Inductance cyclique du rotor
$\mathcal{M}$	Inductance mutuelle cyclique
$p$	Nombre de paires de pôles de la machine asynchrone
$C_r$	Couple résistant
$f$	Coefficient de frottement visqueux
$J$	Moment d'inertie
$C_e$	Couple électromagnétique
$C_m$	Couple mécanique
<i>MADA</i>	Machine Asynchrone à Double Alimentations
<i>DFIG</i>	Doubly-Fed Induction Generator

# Liste des figures

# Liste des Figures

## LISTE DES FIGURES DU CHAPITRE 1

<b>FIGURE.1.1</b> : DÉFINITIONS DES GRANDEURS RELATIVES À UN SYSTÈME MULTIVARIABLE.....	9
<b>FIGURE.1.2</b> : REPRÉSENTATION D'UN SYSTÈME MULTIVARIABLE DE $m$ ENTRÉES - $n$ SORTIES.....	9
<b>FIGURE.1.3</b> : SCHÉMA FONCTIONNEL REPRÉSENTANT LE MODÈLE DE CARIMA.....	12
<b>FIGURE.1.4</b> : STRUCTURE DE BASE DU CRITÈRE DE PERFORMANCE DE LA MÉTHODE GPC.....	14
<b>FIGURE.1.5</b> : LE PRINCIPE DE BASE DE LA COMMANDE PRÉDICTIVE À BASE DE MODÈLE.....	14
<b>FIGURE.1.6</b> : SYSTÈME BOUCLÉ BASÉ SUR LA STRUCTURE RST.....	22
<b>FIGURE.1.7</b> : SYSTÈME BOUCLÉ BASÉ SUR LE CONTRÔLEUR PRÉDICTIF PRIMAIRE DE 2 DEGRÉS DE LIBERTÉ.....	24
<b>FIGURE.1.8</b> : CONFIGURATION STANDARD DU SYSTÈME BOUCLÉ PAR LE CONTRÔLEUR PRÉDICTIF PRIMAIRE.....	24
<b>FIGURE.1.9</b> : REPRÉSENTATION DU SYSTÈME COUPLÉ DE 3 ENTRÉES -2 SORTIES.....	27
<b>FIGURE.1.10</b> : ÉVOLUTION TEMPORELLE DES RÉPONSES INDICIELLES DU SYSTÈME COMMANDÉ PAR LE GPC POLYNOMIALE.....	28
<b>FIGURE.1.11</b> : L'ÉVOLUTION DE PERFORMANCE NOMINALE DU SYSTÈME BOUCLÉ.....	29
<b>FIGURE.1.12</b> : L'ÉVOLUTION DE LA STABILITÉ ROBUSTE DU SYSTÈME BOUCLÉ.....	29
<b>FIGURE.1.13</b> : ÉVOLUTION TEMPORELLE DES RÉPONSES INDICIELLES DU SYSTÈME EN PRÉSENCE DE PERTURBATIONS ET DE BRUIT DE MESURE.....	30
<b>FIGURE.1.14</b> : SENSIBILITÉ DE LA RÉPONSE INDICIELLE DU SYSTÈME EN PRÉSENCE DE BRUIT DE MESURE ( <b>zoom</b> ).....	31
<b>FIGURE.1.15</b> : LES COMMANDES APPLIQUÉES AU SYSTÈME.....	31

## LISTE DES FIGURES DU CHAPITRE 2

<b>FIGURE.2.1</b> : CONFIGURATION STANDARD D'UN SYSTÈME BOUCLÉ.....	34
<b>FIGURE.2.2</b> : INCERTITUDES ADDITIVES DIRECTES.....	38
<b>FIGURE.2.3</b> : INCERTITUDES ADDITIVES INVERSÉ.....	38
<b>FIGURE.2.4</b> : INCERTITUDES MULTIPLICATIVE EN SORTIE DIRECTE.....	39
<b>FIGURE.2.5</b> : INCERTITUDES MULTIPLICATIVE EN SORTIE INVERSE.....	39
<b>FIGURE.2.6</b> : INCERTITUDES MULTIPLICATIVE EN ENTRÉE DIRECTE.....	40
<b>FIGURE.2.7</b> : INCERTITUDES MULTIPLICATIVE EN ENTRÉE INVERSE.....	40
<b>FIGURE.2.8</b> : INCERTITUDES SUR LES FACTEURS CO-PREMIERS GAUCHES.....	40
<b>FIGURE.2.9</b> : INCERTITUDES SUR LES FACTEURS CO-PREMIERS DROITS.....	41
<b>FIGURE.2.10</b> : CONFIGURATION STANDARD DE LFT SUPÉRIEURES.....	42
<b>FIGURE.2.11</b> : CONFIGURATION STANDARD DE LFT INFÉRIEURES.....	43
<b>FIGURE.2.12</b> : STRUCTURE D'UN SYSTÈME BOUCLÉ POUR L'ANALYSE DE LA ROBUSTESSE DE STABILITÉ.....	44
<b>FIGURE.2.13</b> : STRUCTURE GÉNÉRALE D'ÉTUDE DE LA ROBUSTESSE DE STABILITÉ.....	44
<b>FIGURE.2.14</b> : CONFIGURATION STANDARD D'UN SYSTÈME BOUCLÉ.....	47
<b>FIGURE.2.15</b> : CONFIGURATION $(P - K_H)$ DU SYSTÈME BOUCLÉ.....	50
<b>FIGURE.2.16</b> : COMPARAISON DES STABILITÉS ROBUSTES FOURNIES PAR LES DEUX CONTRÔLEURS.....	59

<b>FIGURE.2.17</b> : COMPARAISON DES PERFORMANCES NOMINALES FOURNIES PAR LES DEUX CONTRÔLEURS.....	60
<b>FIGURE.2.18</b> : COMPARAISON DES SORTIES GLOBALES FOURNIES PAR LES DEUX CONTRÔLEURS .....	61
<b>FIGURE.2.19</b> : COMPARAISON DES RÉPONSES TEMPORELLES ET FRÉQUENTIELLES FOURNIES PAR LES DEUX CONTRÔLEURS .....	63

### LISTE DES FIGURES DU CHAPITRE 3

<b>FIGURE.3.1</b> : CONTRÔLEUR GPC ROBUSTIFIÉ À 2-DOF REFORMULÉ SELON LA FORME STANDARD .....	66
<b>FIGURE.3.2</b> : BOUCLE FERMÉE CLASSIQUE .....	67
<b>FIGURE.3.3</b> : SYSTÈME BOUCLÉ PAR LE CONTRÔLEUR (2-DOF) ROBUSTIFIÉ.....	69
<b>FIGURE.3.4</b> : SYSTÈME BOUCLÉ BASÉ SUR LA FACTORISATION À DROITE DU TRANSFERT DE POSTE-COMPENSATEUR....	70
<b>FIGURE.3.5</b> : POSTE-COMPENSATEUR FOURNIE PAR $LFT_e\{\psi_r, Q\}$ .....	70
<b>FIGURE.3.6</b> : CONTRÔLEUR ROBUSTIFIÉ SELON LA FACTORISATION CO-PREMIÈRE GAUCHE.....	71
<b>FIGURE.3.7</b> : POSTE-COMPENSATEUR FOURNIE PAR $LFT_e\{\psi_v, Q\}$ .....	72
<b>FIGURE.3.8</b> : SYSTÈME D'INTERCONNEXION $LFT_L(M, Q)$ .....	81
<b>FIGURE.3.9</b> : SYSTÈME D'INTERCONNEXION $LFT(P, K_H)$ .....	85
<b>FIGURE.3.10</b> : VÉRIFICATION DE CONDITION SUR LA STABILITÉ ROBUSTE PAR LES TROIS DIFFÉRENTS CONTRÔLEURS. ....	91
<b>FIGURE.3.11</b> : LA CONDITION SUR LES PERFORMANCES NOMINALES PAR LES TROIS DIFFÉRENTS CONTRÔLEURS.....	92
<b>FIGURE.3.12</b> : RÉPONSES TEMPORELLES FOURNIES PAR LES DEUX CONTRÔLEURS PRÉDICTIONNELS : PRIMAIRE ET ROBUSTIFIÉ .....	93
<b>FIGURE.3.13</b> : RÉPONSES TEMPORELLES FOURNIES PAR LES DEUX CONTRÔLEURS: ROBUSTE ET PRÉDICTIONNEL ROBUSTIFIÉ .....	93
<b>FIGURE.3.14</b> : RÉPONSES TEMPORELLES FOURNIES PAR LES TROIS CONTRÔLEURS .....	93
<b>FIGURE.3.15</b> : COMMANDES FOURNIES PAR LE CONTRÔLEUR PRÉDICTIONNEL ROBUSTIFIÉ .....	94

### LISTE DES FIGURES DU CHAPITRE 4

<b>FIGURE.4.1</b> : SCHÉMA D'UN ACTIONNEUR HYDRAULIQUE À SIMPLE EFFET .....	97
<b>FIGURE.4.2</b> : STABILITÉ ROBUSTE ET PERFORMANCES NOMINALES DU SYSTÈME BOUCLÉ.....	100
<b>FIGURE.4.3</b> : SORTIES GLOBALES DU SYSTÈME BOUCLÉ .....	101
<b>FIGURE.4.4</b> : COMMANDES FOURNIES PAR LES TROIS CONTRÔLEURS.....	101
<b>FIGURE.4.5</b> : SCHÉMA D'UNE ÉOLIENNE À VITESSE VARIABLE BASÉE SUR UNE MADA. ....	103
<b>FIGURE.4.6</b> : SYSTÈME BOUCLÉ PAR LE CONTRÔLEUR 1-DOF UTILISANT LES GRADEURS DE LA MADA DANS LE PLAN ABC.....	106
<b>FIGURE.4.7</b> : SYSTÈME BOUCLÉ PAR LE CONTRÔLEUR 2-DOF UTILISANT LES GRADEURS DE LA MADA DANS LE PLAN ABC.....	108
<b>FIGURE.4.8</b> : ROBUSTESSE SUR LA STABILITÉ ROBUSTE .....	110
<b>FIGURE.4.9</b> : ROBUSTESSE SUR LES PERFORMANCES NOMINALES.....	111
<b>FIGURE.4.10</b> : COMPARAISON ENTRE LES TROIS RÉPONSES DU SYSTÈME EN PRÉSENCE DE PERTURBATIONS ET DES BRUITS DE MESURES .....	112
<b>FIGURE.4.11</b> : TENSION STATORIQUE $V_{sa}$ ASSURÉE PAR LE CONTRÔLEUR PRÉDICTIONNEL PRIMAIRE .....	113
<b>FIGURE.4.12</b> : DYNAMIQUE DE POURSUITE FOURNIE PAR LE GPC PRIMAIRE EN RÉGIME TRANSITOIRE .....	113
<b>FIGURE.4.13</b> : DYNAMIQUE DE REJECTION DE L'EFFET DE CHARGES PAR LE GPC PRIMAIRE .....	113
<b>FIGURE.4.14</b> : DYNAMIQUE D'ATTÉNUATION DES BRUITS PAR LE CONTRÔLEUR GPC PRIMAIRE .....	114
<b>FIGURE.4.15</b> : TENSION STATORIQUE $V_{sa}$ ASSURÉE PAR LE CONTRÔLEUR ROBUSTE .....	114
<b>FIGURE.4.16</b> : DYNAMIQUE DE POURSUITE FOURNIE PAR LE CONTRÔLEUR ROBUSTE EN RÉGIME TRANSITOIRE .....	115

<b>FIGURE.4.17</b> : DYNAMIQUE DE REJECTION DE L'EFFET DE CHARGES PAR LE CONTRÔLEUR ROBUSTE .....	115
<b>FIGURE.4.18</b> : DYNAMIQUE D'ATTÉNUATION DES BRUITS PAR LE CONTRÔLEUR ROBUSTE .....	115
<b>FIGURE.4.19</b> : TENSION STATORIQUE $V_{sa}$ ASSURÉE PAR LE CONTRÔLEUR PAR GPC ROBUSTIFIÉ .....	116
<b>FIGURE.4.20</b> : DYNAMIQUE DE POURSUITE FOURNIE PAR LE GPC ROBUSTIFIÉ EN RÉGIME TRANSITOIRE .....	116
<b>FIGURE.4.21</b> : DYNAMIQUE DE REJECTION DE L'EFFET DE CHARGES PAR LE GPC ROBUSTIFIÉ .....	117
<b>FIGURE.4.22</b> : DYNAMIQUE D'ATTÉNUATION DES BRUITS PAR LE CONTRÔLEUR GPC ROBUSTIFIÉ.....	117
<b>FIGURE.4.23</b> : ÉNERGIE DE COMMANDE FOURNIE PAR GPC PRIMAIRE .....	118
<b>FIGURE.4.24</b> : ÉNERGIE DE COMMANDE FOURNIE PAR LE CONTRÔLEUR ROBUSTE .....	118
<b>FIGURE.4.25</b> : ÉNERGIE DE COMMANDE FOURNIE PAR GPC ROBUSTIFIÉ.....	118

# Sommaire

# TABLE DES MATIERES

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION :	1
OBJECTIF DE LA THÈSE :	6
ORGANISATION DE LA THÈSE :	6

## CHAPITRE 1 : COMMANDE PRÉDICTIVE GÉNÉRALISÉE MULTIVARIABLE POLYNOMIALE

1.1. INTRODUCTION :	8
1.2. REPRÉSENTATION D'UN SYSTÈME PLURIDIMENSIONNEL :	8
1.2.1. REPRÉSENTATION D'UN SYSTÈME MULTIVARIABLE PAR MATRICE DE TRANSFERT	9
1.2.2. DESCRIPTION MATRICIELLE FRACTIONNAIRE MFD D'UN SYSTÈME MIMO:	10
1.3. MODÈLE DE CARIMA.....	11
1.4. CRITÈRE À MINIMISER :	13
1.5. CALCUL DU PRÉDICTEUR OPTIMAL :	15
1.6. FORMULATION MATRICIELLE DU CRITÈRE.....	18
1.7. LOI DE GPC ALGORITHMIQUE:	19
1.8. ALGORITHME DE LA MÉTHODE GPC ALGORITHMIQUE :	19
1.9. CHOIX DES PARAMÈTRES DE SYNTHÈSE $N_2$ , $N_u$ ET $\lambda$ :	20
1.9.1. CHOIX DES HORIZONS DE PRÉDICTION SUR LES SORTIES.....	21
1.9.2. CHOIX DE L'HORIZON DE PRÉDICTION SUR LES COMMANDES.....	21
1.9.3. CHOIX DE LA MATRICE DE PONDÉRATION $\lambda$ SUR LES COMMANDES.....	21
1.10. FORMULATION POLYNOMIALE DE LA LOI DE GPC ALGORITHMIQUE.....	21
1.11. ANALYSE DE ROBUSTESSE DU SYSTÈME BOUCLÉ :	23
1.11.1. MATRICE DE SENSIBILITÉ DIRECTE EN SORTIE :	24
1.11.2. MATRICE DE SENSIBILITÉ DIRECTE EN ENTRÉE :	25
1.11.3. MATRICE DE SENSIBILITÉ COMPLÉMENTAIRE EN SORTIE :	25
1.11.4. MATRICE DE SENSIBILITÉ COMPLÉMENTAIRE EN ENTÉE :	25
1.11.5. MATRICE DE TRANSFERT D'ENTRÉE/SORTIE DU SYSTÈME :	25
1.12. SIMULATIONS ET INTERPRÉTATIONS DES RÉSULTATS :	26
1.13. CONCLUSION.....	31

## CHAPITRE 2 : LA COMMANDE ROBUSTE PLURIDIMENSIONNELLE

2.1. INTRODUCTION :	33
2.2. REPRÉSENTATIONS FRÉQUENTIELLES D'UN SYSTÈME PLURIDIMENSIONNEL :	34
2.2.1. REPRÉSENTATION PAR LES LIEUX DES VALEURS SINGULIÈRES :	35
2.2.2. DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES SVD :	36
2.2.3. NORME D'UNE MATRICE DE TRANSFERT :	36
2.2.3.1. Norme $\mathcal{H}_2$ :	36



2.2.3.2. La norme $H_\infty$ :	36
2.3. MODÉLISATION DES INCERTITUDES :	37
2.3.1. INCERTITUDES NON STRUCTURÉES :	37
2.3.1.1. Incertitudes additives :	38
2.3.1.2. Incertitudes multiplicatives :	39
2.3.1.3. Incertitudes sur la factorisation co-première gauche du modèle nominal :	40
2.3.1.4. Incertitudes sur la factorisation co-première droite du modèle nominal:	41
2.3.2. INCERTITUDES STRUCTURÉES :	41
2.4. TRANSFORMATIONS FRACTIONNAIRES LINÉAIRES LFT :	41
2.4.1. LFT SUPÉRIEURE D'UN SYSTÈME BOUCLÉ:	42
2.4.2. LFT INFÉRIEURE D'UN SYSTÈME BOUCLÉ:	43
2.5. STABILITÉ DU SYSTÈME BOUCLÉ PAR UN CONTRÔLEUR $H_\infty$ :	43
2.5.1. STABILITÉ NOMINALE :	43
2.5.2. STABILITÉ INTERNE:	44
2.5.3. STABILITÉ ROBUSTE :	44
2.5.3.1. Théorème à petit gain :	45
2.5.3.2. Condition de robustesse sur la stabilité robuste :	45
2.5.4. ANALYSE DE ROBUSTESSE EN PRÉSENCES DE DIVERSES ENTRÉES EXOGÈNES	46
2.6. PROBLÈME $H_\infty$ STANDARD.....	49
2.6.1. PROBLÈME $H_\infty$ OPTIMAL :	50
2.6.2. PROBLÈME $H_\infty$ SOUS OPTIMAL :	51
2.6.3. CRITÈRE DE SENSIBILITÉ MIXTE GÉNÉRALISÉE.....	51
2.7. RÉOLUTION DU PROBLÈME $H_\infty$ .....	52
2.7.1. RÉOLUTION UTILISANT LES DEUX ÉQUATIONS DISCRÈTES DE <i>Riccati</i> .....	52
2.7.2. RÉOLUTION FONDÉE SUR L'APPROCHE <i>LMI</i> .....	55
2.7.2.1. Lemme :	55
2.7.2.2. Théorème :	56
2.8. SIMULATIONS ET INTERPRÉTATIONS DES RÉSULTATS.....	56
2.8.1. COMPROMIS DE ROBUSTESSE ASSURÉ PAR LA PREMIÈRE VOIE PROPOSÉE :	57
2.8.2. COMPROMIS DE ROBUSTESSE ASSURÉ PAR LA DEUXIÈME VOIE PROPOSÉE :	61
2.9. CONCLUSION :	63

## CHAPITRE 3 : ROBUSTIFICATION DE LA COMMANDE PRÉDICTIVE GÉNÉRALISÉE PLURIDIMENSIONNELLE

3.1. INTRODUCTION :	65
3.2. STRUCTURE DU CONTRÔLEUR GPC ROBUSTIFIÉ .....	66
3.3. PARAMÉTRISATION DE YOULA.....	67
3.3.1. PRINCIPE .....	67

3.3.2. FACTORISATION CO-PREMIÈRE DES TRANSFERTS MODÈLE/CONTRÔLEUR PRIMAIRE :.....	67
3.3.2.1. Factorisation co-première du contrôleur $K_0(z^{-1})$ :.....	67
3.3.2.2. Factorisation co-première du pré-compensateur $H_0(z^{-1})$ :.....	68
3.3.3. PARAMÉTRISATION DE YOULA BASÉE SUR LA FACTORISATION CO-PREMIÈRE:.....	68
3.3.3.1. Factorisation co-première droite de $K_1(z^{-1})$ :.....	70
3.3.3.2. Factorisation co-première gauche de $K_1(z^{-1})$ :.....	71
3.4. AMÉLIORATION DE LA ROBUSTESSE FOURNIE PAR LE CONTRÔLEUR PRIMAIRE:..	73
3.4.1. AMÉLIORATION DE LA SENSIBILITÉ COMPLÉMENTAIRE EN SORTIE:.....	73
3.4.2. AMÉLIORATION DE LA SENSIBILITÉ DIRECTE EN SORTIE:.....	75
3.4.3. AMÉLIORATION DE LA SENSIBILITÉ DIRECTE EN ENTRÉE :.....	76
3.4.4. AMÉLIORATION DE LA SENSIBILITÉ COMPLÉMENTAIRE EN ENTÉE.....	77
3.4.5. CONSERVATION DE DYNAMIQUE DE POURSUITE :.....	78
3.5. DÉTERMINATION DE LA MATRICE POLYNOMIALE $Q(z^{-1})$ :.....	79
3.5.1. SOLUTION BASÉE SUR L'APPLICATION EXPLICITE DE LA MÉTHODE $H_\infty$ :.....	80
3.5.2. SOLUTION BASÉE SUR L'OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES :.....	81
3.5.3. SOLUTION BASÉE SUR L'APPLICATION IMPLICITE LA MÉTHODE $H_\infty$ :.....	84
3.5.3.1. Détermination direct de la matrice de Youla :.....	86
3.5.3.2. Détermination de la matrice de Youla par l'identification fréquentielle :.....	87
3.6. SIMULATIONS ET INTERPRÉTATIONS DES RÉSULTATS.....	88
3.7. CONCLUSION .....	94

## **CHAPITRE 4 : VALIDATION DE LA ROBUSTIFICATION PROPOSÉE SUR LES SYSTEMES PHYSIQUE**

4.1. INTRODUCTION:.....	96
4.2. COMMANDE D'UN ACTIONNEUR HYDRAULIQUE UNIDIMENSIONNEL :.....	97
4.2.1. MODÉLISATION DU SYSTÈME HYDRAULIQUE :.....	97
4.2.2. SYNTHÈSE DU CONTRÔLEUR ROBUSTE :.....	98
4.2.3. SYNTHÈSE DU CONTRÔLEUR PRÉDICTIF PRIMAIRE :.....	99
4.2.4. SYNTHÈSE DU CONTRÔLEUR PRÉDICTIF ROBUSTIFIÉ:.....	99
4.2.5. RÉPONSES FRÉQUENTIELLES ET TEMPORELLES:.....	100
4.3. COMMANDE DE LA MACHINE ASYNCHRONE À DOUBLES ALIMENTATIONS.....	102
4.3.1. MODÉLISATION DE LA MACHINE .....	102
4.3.2. RÉSULTATS DE SIMULATION ET DISCUSSIONS .....	105
4.3.2.1. Synthèse du contrôleur robuste .....	105
4.3.2.2. Synthèse du contrôleur prédictif primaire Contrôleur conventionnel .....	107
4.3.2.3. Synthèse du contrôleur prédictif robustifié .....	109

4.3.3. RÉPONSES FRÉQUENTIELLES ET TEMPORELLES DU SYSTÈME BOUCLÉ..... 110  
4.4. CONCLUSION ..... 118

**CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES**

CONCLUSION GÉNÉRALE:..... 119  
PERSPECTIVES : ..... 120

**ANNEXES**

ANNEXE A : ..... 122  
ANNEXE B : ..... 128

**RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

RÉFÉRENCES : ..... 133

# Introduction générale

**Introduction :**

La commande prédictive généralisée est une méthode très récente. Elle est un sujet de plusieurs recherches pendant ces dernières décennies. Elle a été appliquée avec succès dans plusieurs applications industrielles dans lesquelles plusieurs types de processus industriels ont été stabilisés. Parmi les types les plus saillants dans l'industrie, on peut citer les processus simples, complexes, mono-entrée et mono-sortie SISO et les systèmes multi-entrées, multi-sorties MIMO [TK01, SC08]. La commande prédictive unidimensionnelle a été inventée, en premier lieu, par l'automaticien J. Richalet, en 1978 [RJ78]. Ensuite, elle a été généralisée par D.W. Clarke en 1987 afin de développer la nouvelle version de cette stratégie de commande appelée « Commande Prédictive Généralisée GPC » [CD87, YT95]. Cette appellation a été effectuée en accord avec de grands groupes industriels aux États-Unis et en Europe (Shell et Adersa) [DR85]. Le concept de base de la commande prédictive généralisée est qu'il s'appuie sur le développement d'un modèle mathématique qui doit être linéaire. Le modèle le plus souvent utilisé, dans la pratique, est celui de type *CARIMA* (où en anglais : Controlled Auto Regressive Integrated Moving Average) assurant la prédiction parfaite du comportement futur de la dynamique réelle du système à commander [MM99]. Cette prédiction doit être assurée dans un horizon du temps futur ou glissant. Par conséquent, la loi de la commande optimale correspondante est développée via la minimisation d'un critère de performance fixé préalablement par l'utilisateur. Ce critère est souvent constitué par deux termes. Le premier terme de celui-ci présente la somme quadratique de l'écart de poursuite entre la sortie prédite et celle de référence (consigne). Celle-ci doit être effectuée pour chaque voie du système à commander. Le second terme du critère représente la somme pondérée de l'énergie de commande, qui doit être pénalisée à l'avance par l'utilisateur pour chaque voie du système [MJ07, KB92]. En effet, La détermination de la loi de GPC nécessite la détermination d'un prédicteur optimal, qui nécessite la résolution de deux équations dites Diophantiennes [PL90]. Ce prédicteur est reformulé en fonction d'un vecteur inconnu contenant tous les incréments de commande du système [RP02]. La détermination optimale de ces derniers est assurée par la minimisation du critère précédent et la solution optimale par cette minimisation fournit les séquences futures des commandes [GJ97]. Le principe de l'horizon glissant est, finalement, appliqué et seule la première commande de chaque voie est appliquée sur le processus industriel.

Toutefois l'application de la version algorithmique citée précédemment sur certains systèmes physiques pluridimensionnels peut fournir une dynamique de poursuite très

acceptable en termes d'obtention des réponses caractérisées par des dépassements très faibles et admissibles, temps de réponse rapide et erreurs statiques très réduites en régime permanent. Cette dynamique est souvent assurée via le choix adéquat de trois types des paramètres on l'occurrence : l'horizon de prédiction de chaque sortie du système, l'horizon de prédiction de la commande de chaque voie et finalement, le coefficient de pondération qui pénalise l'énergie de commande de chaque voie. Le choix de ces paramètres doit être effectué *a priori* par l'utilisateur qui doit respecter certaines règles de réglages assurant le comportement de poursuite souhaité avec des énergies de commandes très économiques. Néanmoins, l'application de cette stratégie de commande sur les systèmes d'ordre élevé nécessite un choix très spécifique de ces paramètres [YB84, YT95]. Un mauvais choix de ceux-ci peut facilement conduire à des anomalies à savoir : la nature des signaux de commande, qui sont souvent devenues fluctuantes sur des plages du temps très réduites ce qui peut déstabiliser le système bouclé, le calcul des séquences de commande qui souvent, nécessite un temps très lent ce qui peut enlever l'avantage de l'application de cette stratégie en temps réel, la qualité de robustesse fournie par le système bouclé notamment en présence des incertitudes de modélisation affectant le modèle de synthèse ainsi que la présence de l'effet de bruits de mesure et celui de la dynamique non linéaire négligée en hautes fréquences [MJ89].

Pour palier à ces anomalies, on fait appel à la transformation polynomiale de loi de GPC sachant que cette dernière donne la possibilité d'analyser la robustesse du système bouclé dans le plan fréquentiel. Ceci est abouti par le tracé des lieux des valeurs singulières maximales des différentes sensibilités à savoir la sensibilité directe et la sensibilité complémentaire, sachant que ces deux dernières assurent l'information *a priori* sur la stabilité robuste et les performances nominales respectivement [ZG81, OK14]. Un autre avantage de la version polynomiale précédente c'est qu'on peut aussi éviter le calcul récursif de chaque équation diophantienne à chaque instant du temps ce qui permet de fournir des signaux de commande dans un temps très raisonnable du point de vue pratique [PL90]. Récemment, plusieurs applications industrielles basées sur la commande des processus industriels par la version polynomiale de GPC ont montré les anomalies de cette stratégie de commande [RP03, RP08]. Ces anomalies sont apparues notamment lors de la phase de synthèse du contrôleur prédictif correspondant, qui est noté par la suite par le contrôleur prédictif primaire sachant que, le modèle de synthèse est souvent entaché par des incertitudes de modélisation. A cet effet, le tracé des lieux des valeurs singulières maximales de la sensibilité directe permet de découvrir, dans le plan fréquentiel, la dégradation remarquable de la stabilité robuste du

système bouclé ce qui peut traduire, dans le plan temporel, par la grande sensibilité aux effets de bruits de mesure ainsi que ceux causés par la dynamique non linéaire négligée en hautes fréquences [SC08]. De plus, le tracé des valeurs singulières de la sensibilité complémentaire permet de découvrir les informations qui concernent les performances nominales, sachant que la dégradation de celles-ci se traduit, dans le plan temporel, par la qualité de poursuite ainsi que la dynamique de rejection de l'effet des incertitudes qui affectent le modèle de synthèse [RJ98]. Il faut noter ici que la satisfaction simultanée de la robustesse sur la stabilité robuste et celle sur les performances nominales est pratiquement impossible sur la même plage de fréquences. C'est pour cette raison qu'on doit chercher un compromis de robustesse (ou en anglais, trade-off robustness) et cela non seulement pour le régime de fonctionnement nominal mais aussi pour tous les régimes perturbés [ZK96].

La synthèse d'un contrôleur robuste, qui doit stabiliser la boucle de commande dans laquelle tous les effets non souhaités suscités sont pris en considération, présente le but principal de la stratégie basée sur la commande robuste [NS11]. Pour atteindre cet objectif, les spécifications fréquentielles, qui sont souvent imposées par le cahier de charges, sont présentées sous forme de pondérations où le choix optimal des paramètres de chacune peut être effectué préalablement par l'utilisateur et cela suivant des règles de sélection très connues dans la théorie de la commande robuste [SS88]. Ces pondérations sont, ensuite, utilisées pour limiter l'évolution des valeurs singulières des différentes sensibilités. Cette limitation peut être reformulée sous forme d'un problème d'optimisation optimale ou sous-optimale [OM04]. La résolution de l'un des deux derniers problèmes peut fournir la représentation d'état du contrôleur robuste désiré. La méthode de résolution, la plus souvent utilisée dans la commande robuste, est celle de  $\mathcal{H}_\infty$  basée soit sur la résolution des deux équations algébriques de *Riccati* ou bien celle basée sur l'approche des inégalités matricielles (ou en anglais *Linear Matrix Inequalities LMI's*) [MM09].

La commande robuste basée sur la méthode  $H_\infty$  a été introduite par Doyle en 1982 [DJ82]. Puis, d'autres chercheurs ont suggéré les règles fondamentales de l'analyse du contrôle robuste. Ensuite, le problème de synthèse optimale d'un contrôleur robuste stabilisant les systèmes SISO a été résolu par Zames et Francis en 1983 [ZG83]. Enfin, l'extension sur les systèmes pluridimensionnels a été abordée par Francis, Helton, et ZAMES en 1984 [FB84]. En effet, le développement d'un contrôleur robuste pluridimensionnel stabilisant un système MIMO a été présenté par plusieurs chercheurs (1986) comme Vidyasagar et Kimura et Glover [VM86]. L'évaluation des performances du système bouclé entraîne, dans ce cas, la recherche

d'algorithmes performants, qui sont aujourd'hui disponibles dans les logiciels spécialisés comme le Matlab. Parallèlement à ces travaux suscités, d'autres recherches ont été développées, notamment sous l'impulsion de Francis, Kwakernaak, Doyle, Glover, ..., etc. Le problème de synthèse des lois de commande peut être transformé sous forme d'une minimisation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un transfert définissant le rapport entre les signaux d'entrées exogènes (perturbations, bruits, références, ..., etc.) et les signaux de sorties exogènes (erreur pondérée, commande pondérée, ..., etc.). Le pas décisif pour l'utilisation de cette approche fut franchi à la fin des années 80, quand apparurent les principales techniques permettant de résoudre le problème standard. Toutefois, la commande robuste basée sur la méthode  $H_\infty$  a la capacité d'assurer un bon compromis de robustesse, en particulier le cas des processus industriels décrits par des modèles mathématiques linéaires incertains. En contre partie, la dynamique de poursuite fournie par cette stratégie de commande est souvent dégradée ainsi que les signaux de commande qui sont assurés mais avec des énergies très élevées avec lesquelles les instruments de mesure peuvent être rapidement saturés. Récemment, plusieurs approches ont été suggérées pour réduire l'ordre élevé des contrôleurs. Parmi ces approches, on peut citer : l'approche SMR de Schur (Shurt Model Reduction) proposée par Safonov et Chiang en 1989 [SM89], l'approche de Hankel suggérée par Safonov en 1990 [SM90], ...etc. Toutefois, ces approches proposées ont la capacité de réduire le degré de complexité survenant lors la phase d'implémentation des contrôleurs d'ordre élevé. Néanmoins, cette réduction peut détériorer le compromis de robustesse du système bouclé ce qui peut restreindre son domaine d'application dans l'industrie. Récemment, l'objectif de la plupart des méthodes de synthèse est de comment assurer simultanément la bonne dynamique de poursuite des trajectoire de références et la bonne robustesse face aux incertitudes de modélisation et l'effet non souhaité causé par les bruits de mesure et la dynamique négligée en hautes fréquences ? Notant ici que la synthèse basée sur un contrôleur de un degré de liberté est incapable de réaliser tous les objectifs précédents. A cet effet, la plupart de recherches avancées ont été orientées vers la synthèse d'un contrôleur robustifié de deux degrés de liberté qui doit conserver la meilleure dynamique de poursuite du contrôleur prédictif primaire et en même temps, il doit fournir la même robustesse du contrôleur robuste. Ces deux objectifs contradictoires « poursuite et régulation » peuvent être réalisés via la paramétrisation de tous les transferts du système bouclé dans lequel un transfert de Youla doit être développé. En résumé, la synthèse d'un contrôleur prédictif robustifié peut nécessiter les trois étapes suivantes : Premièrement, un contrôleur prédictif primaire doit être assurée, en premier lieu, afin d'assurer la bonne dynamique de poursuite avec une certains performances



nominale. Ensuite, un compromis de robustesse entre la stabilité robuste et les performances nominales doit être assuré par une synthèse indépendante du contrôleur robuste et finalement, les deux contrôleurs précédents sont hybridés par la détermination optimale du transfert de Youla. La synthèse du transfert optimal de Youla présente un problème très vaste pendant ces dernières années. A cet effet, plusieurs méthodes ont été proposées pour développer un transfert optimal permettant la robustification du contrôleur prédictif primaire. Parmi de celles-ci on peut citer : la robustification proposée par Kouvaritakis et son groupe, en 1992 pour robustifier une classe des contrôleurs mono-variable avec lesquels la poursuite et la robustesse des systèmes unidimensionnels (SISO) sont assurées avec des marges très acceptables [KB92]. Yoon et Clarck ont proposé, en 1995, une autre stratégie de robustification basée sur l'introduction d'un polynôme noté ( $C - polynomial$ ) dans le modèle de CARIMA cité précédemment [YT95]. Ce polynôme permet d'approcher le comportement du modèle à celui du système réel. Par conséquent, la détermination du prédictif optimal ainsi que la résolution des deux équations de Diophantiennes sont effectuées par la prise en considération de ce polynôme. De plus, Rossiter et son groupe ont proposé, en 1998, une approche de robustification dite SGPC (ou en anglais Stable GPC) [RJ98]. Ayerbe et son groupe ont proposé, en 2003, une synthèse collaborateurs du transfert de Youla donné sous forme d'un polynôme discret [RP03]. Les coefficients de celui-ci sont obtenus via la résolution d'un problème d'optimisation quadratique formulé à partir des spécifications fréquentielles et temporelles imposées à l'avance par un cahier de charges. Il faut noter ici que toutes les approches de robustification citées précédemment sont proposées pour les systèmes mono-variable. L'inconvénient majeur de ces approches réside dans le choix d'une structure adéquate pour le transfert de Youla. De plus, la solution optimale du problème d'optimisation permettant la détermination des coefficients du transfert de Youla peut être piégée par des minima locaux avec lesquels le transfert obtenu devient incapable de satisfaire certaines spécifications du cahier de charges [CB01]. Récemment, la synthèse du transfert de Youla pour les systèmes pluridimensionnels a été proposée, pour la première fois, par Stoica et son groupe, en 2008 [SC08]. L'idée de cette proposition représente une extension de celle proposée par Ayerbe en 2003 [RP03] dans laquelle le transfert de Youla a été imposé sous forme d'états discrets dont les matrices inconnues sont déterminées par l'optimisation min-max. Toutefois cette approche peut assurer de meilleurs résultats notamment pour le cas des systèmes modélisés par des modèles prédictifs d'ordre très réduit.

**Objectif de la thèse :**

Toutefois, la version polynomiale de la loi de GPC a la capacité de fournir un comportement de poursuite très acceptable notamment en l'absence des erreurs de modélisation. Cet objectif est atteint par un choix adéquat des paramètres de synthèse comme les horizons de prédiction de sorties et de commandes ainsi que la matrice pondérant les énergies de commande. Néanmoins, pour un modèle de synthèse imprécis, la robustesse fournie par cette stratégie de commande n'est pas garantie et le système bouclé présente, par conséquent, une instabilité remarquable notamment en régime permanent. En revanche, la commande robuste par la méthode  $H_\infty$  a la capacité de remédier à toutes les anomalies de la version polynomiale de GPC. Elle permet d'assurer un compromis de robustesse entre la stabilité robuste et les performances nominales du système bouclé. Cet objectif est atteint par un choix adéquat des pondérations limitant l'évolution des valeurs singulières maximales des différentes sensibilités comme la sensibilité directe et la sensibilité complémentaire. En revanche, les avantages de cette stratégie de commande sont assurés mais, malheureusement, avec une dégradation remarquable de sa dynamique de poursuite des trajectoires de références. A cet effet, notre but étant donc plus précis. Nous allons proposer une nouvelle stratégie de synthèse permettant d'assurer simultanément les avantages des deux méthodes de commande citées précédemment. Autrement dit, le contrôleur hybride à synthétiser doit conserver la même dynamique de poursuite de la version polynomiale de GPC et cela avec la même robustesse fournie par la méthode  $H_\infty$ . Dans ce cas, la synthèse de ce contrôleur est assurée par le choix des paramètres de réglage de la méthode GPC ainsi que celui des pondérations de la méthode  $H_\infty$ . L'hybridation des deux contrôleurs précédents nécessite la détermination optimale du transfert de Youla qui doit être élaboré mais avec un ordre très réduit. Cela représente également l'objectif de cette thèse. A cet effet, la structure de ce transfert sera obtenue de manière systématique dans laquelle ces paramètres sont déterminés par une approche basée sur l'identification fréquentielle. Finalement, l'efficacité du contrôleur robustifié sera confirmée à travers la commande de systèmes physiques modélisés par des modèles linéaires incertains.

**Organisation de la thèse :**

Ce manuscrit sera divisé en quatre chapitres qui sont les suivants : Le premier chapitre portera sur les bases théoriques nécessaires pour la synthèse du contrôleur prédictif primaire assurant la bonne dynamique de poursuite en l'absence des erreurs de modélisation. A cet effet, une version algorithmique de la loi de GPC sera détaillée en premier lieu puis la

transformation polynomiale de celle-ci sera définie afin d'entamer une analyse de robustesse du système bouclé dans le plan fréquentiel. Cette analyse permettra de découvrir plusieurs anomalies à partir desquelles on cherchera d'autres méthodes de synthèse. Cette méthode présentera l'objet du deuxième chapitre. Le deuxième chapitre sera consacré à la synthèse du contrôleur robuste en utilisant la méthode  $H_\infty$ . L'objectif de la synthèse se basée sur l'obtention d'un compromis de robustesse entre la stabilité robuste et les performances nominales du système bouclé. Pour atteindre cet objectif, un critère de performance basé sur la norme  $H_\infty$  sera formulé à partir des formes idéales proposées (pondérations) pour limiter l'évolution des valeurs singulières maximales des différentes sensibilités dans le domaine fréquentiel. Le problème de synthèse sera donc présenté sous forme d'un problème  $H_\infty$  optimal et l'autre sous forme  $H_\infty$  sous-optimal. La suite de cette thèse sera basée sur la résolution du second problème en utilisant l'approche d'inégalités linéaires *LMI*s. Ce chapitre sera achevé par une étude en simulation dont les performances des deux versions précédentes de la méthode  $H_\infty$  seront comparées à travers une application sur un procédé modélisé par un modèle incertain. Le troisième chapitre a pour but d'hybrider les deux contrôleurs de GPC primaire et de la méthode  $H_\infty$ . On fait ressortir le contrôleur GPC robustifié. A cet effet, les outils mathématiques nécessaires pour cette hybridation seront détaillés dans ce chapitre dans lequel on présentera les différentes factorisations possibles de chaque transfert existant dans la boucle de commande. Ensuite, on présentera les différentes méthodes existantes dans la littérature pour déterminer le transfert de Youla. Ce chapitre sera achevé par la présentation de notre proposition qui permettra la détermination systématique de la structure de ce transfert avec un ordre très raisonnable du point de vue implémentation. Le quatrième chapitre a pour but de présenter l'efficacité de cette nouvelle stratégie de robustification. Celle-ci sera montrée à travers la commande de deux systèmes modélisés par des modèles linéaires incertains. Le premier modèle incertain décrivant le comportement réel d'un actionneur hydraulique. La commande de ce système a été effectuée par la méthode  $H_\infty$  et les détails de cette synthèse sont disponibles dans la bibliothèque Robust/Toolbox de Matlab. Le second modèle incertain simule le fonctionnement d'un système d'énergie renouvelable. Ce système est présenté par un générateur de tension à doubles alimentations.

Enfin, le manuscrit sera achevé par une conclusion générale et un ensemble de perspectives proposées pour d'autres candidats intéressés par cet axe de recherche.

# CHAPITRE 1

**Commande Prédictive Généralisée  
Multivariable polynomiale**

*Ce chapitre porte sur les démarches nécessaires de la synthèse d'une loi optimale basée sur la méthode GPC. La version polynomiale de cette loi de commande sera utilisée pour commander un système pluridimensionnel où sa dynamique est modélisée par une matrice de transfert non carrée. Pour atteindre cet objectif, le transfert de ce système est décomposé afin d'élaborer un modèle de synthèse de type CARIMA qui permet la détermination d'un prédicteur optimal. Ce prédicteur doit assurer la détermination des sorties prédites dans un horizon du temps étendu. Ces sorties sont ensuite utilisées afin d'aboutir à la formulation matricielle du critère de performance dont le vecteur inconnu est celui englobant les incréments de commande de chaque voie du système bouclé. La minimisation de ce critère permet de fournir la version algorithmique de la méthode GPC. Dans la suite de ce travail, la transformation polynomiale de cette loi de commande est ensuite abordée afin d'analyser la robustesse du système bouclé dans le plan fréquentiel. Finalement, ce chapitre sera achevé par une partie de simulation dans laquelle l'efficacité de la version polynomiale de la loi GPC est montrée à travers la commande d'un processus industriel modélisé par un modèle incertain présenté par un transfert non carré.*

### **1.1. Introduction :**

La commande prédictive a été introduite en 1978 par J. Richalet [RJ78]. Depuis, plusieurs travaux ont été publiés par des ingénieurs de la Shell, RMC., De Keyser, et AR., Van Cauwenberghe en 1982 [DR82]. Puis en 1984, B.E. Ydstie [YB84] suggère leur propre approche et leur apport à ce type de technique.

La commande prédictive généralisée (GPC), proposée par Clarke et *al.* [CD87] en 1987, est l'un des algorithmes de commande prédictive les plus répandus. Elle a été implémentée avec succès dans de nombreuses applications industrielles [RJ04], et a montré de bonnes performances et un certain degré de robustesse. Elle peut traiter beaucoup de problèmes de commande pour une large étendue de systèmes et met en jeu un nombre raisonnable de paramètres, que l'utilisateur doit spécifier en fonction de sa connaissance *a priori* du procédé à commander et de ses objectifs de commande [OK14]. L'idée de base de la méthode GPC est de calculer une séquence de commandes futures de telle façon qu'une fonction de coût à plusieurs composantes soit minimale sur un certain horizon de prédiction. L'indice à optimiser est une fonction quadratique qui mesure la distance entre les sorties prédites du système et des séquences de références, plus une fonction quadratique qui mesure les énergies de commandes [GZ15].

### **1.2. Représentation d'un système pluridimensionnel :**

Les différents éléments d'interaction entre un système dynamique et son environnement sont représentés par la figure suivante [BT97, AM02]:

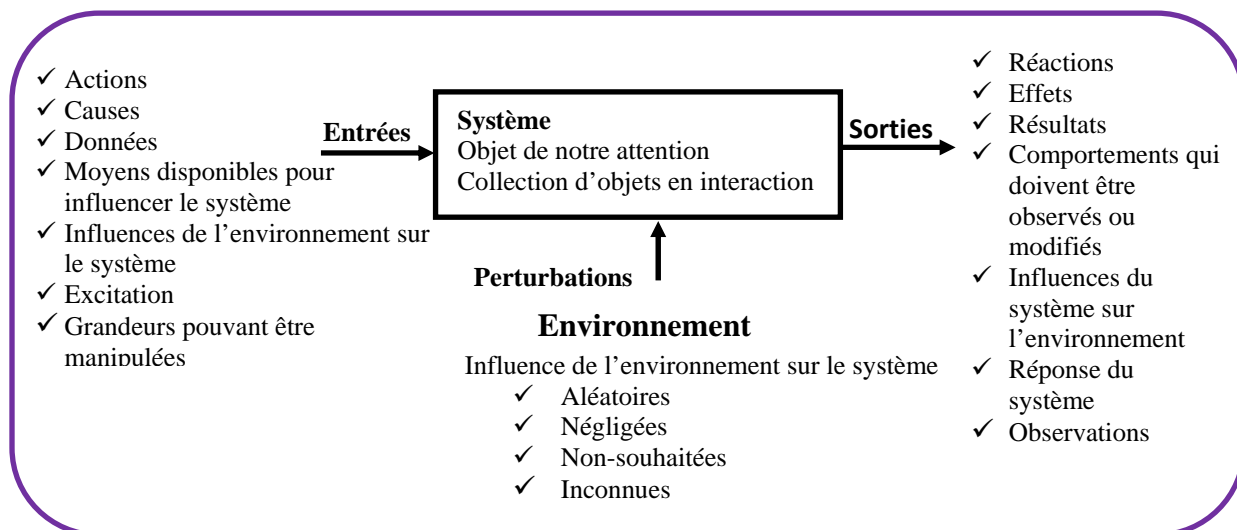


Figure.1.1 : Définitions des grandeurs relatives à un système multivariable

Les entrées exogènes représentent, ici, les excitations qui agissent sur le fonctionnement nominal du système à commander. Parmi lesquelles, on peut citer: l'effet de perturbations, l'effet des bruits de mesures, l'effet de la dynamique négligée en hautes fréquences, ..., etc. De plus, les sorties exogènes peuvent regrouper les effets qui découlent et désignent, le plus souvent, des signaux mesurés. Dans ce chapitre, la synthèse des contrôleurs sera effectuée uniquement pour les systèmes présentés par des modèles linéaires pluridimensionnels et invariants dans le temps, c'est-à-dire, ceux qui possèdent un vecteur d'entrée, noté ici par  $U(t)$ , où  $U(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$ . Ces entrées sont, souvent, mutuellement couplées avec les sorties  $y_1, y_2, \dots, y_n$  qui sont par la suite regroupées dans un vecteur, noté ici par  $Y(t)$ , où  $Y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$ . Une représentation schématique d'un système multivariable est donnée par la figure ci-dessous:

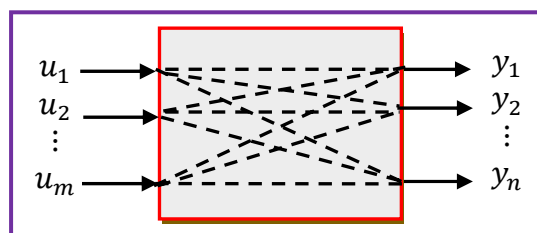


Figure.1.2 : Représentation d'un système multivariable de  $m$  entrées -  $n$  sorties.

### 1.2.1. Représentation d'un système multivariable par une matrice de transfert

Dans la méthode de GPC, un comportement réel d'un système multivariable est souvent décrit par la matrice de transfert discrète, notée ici par  $G_d(z^{-1})$ , telle que la relation suivante:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = G_d(z^{-1}) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

avec  $G_d(z^{-1}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$  est définie par :

$$G_d(z^{-1}) = \begin{bmatrix} G_{d_{11}}(z^{-1}) & G_{d_{12}}(z^{-1}) & \dots & G_{d_{1m}}(z^{-1}) \\ G_{d_{21}}(z^{-1}) & G_{d_{22}}(z^{-1}) & \dots & G_{d_{2m}}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{d_{n1}}(z^{-1}) & G_{d_{n2}}(z^{-1}) & \dots & G_{d_{nm}}(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

où  $G_{d_{ij}}(z^{-1})$  représente le transfert entre l'entrée  $j$  et la sortie  $i$

### 1.2.2. Description matricielle fractionnaire MFD d'un système MIMO:

La représentation en MFD est une alternative à la représentation d'état d'une matrice de transfert rationnelle. En effet, elle généralise le concept de fonctions de transfert pour les systèmes SISO [DM07] aux systèmes multivariables MIMO. Une représentation en MFD à droite, pour la matrice de transfert  $G_d(z^{-1})$  est une factorisation de la forme [GK89, MD90, CR96]:

$$G_d(z^{-1}) = N_r(z^{-1}) \cdot D_r^{-1}(z^{-1}) \quad (1.3)$$

où  $N_r(z^{-1})$  représente la matrice polynomiale de dimension  $n \times m$ . De plus,  $D_r(z^{-1})$  est une matrice polynomiale inversible de dimension  $m \times m$ . Une telle MFD est appelée MFD copremière à droite, si  $N_r(z^{-1})$  et  $D_r(z^{-1})$  sont copremières à droite. Le degré d'une MFD à droite est le degré du polynôme  $\det(D_r(z^{-1}))$ , où  $\det(X)$  est le déterminant de la matrice polynomiale  $X(z^{-1})$ . Une représentation en MFD à gauche est une factorisation de la forme

$$G_d(z^{-1}) = D_\ell^{-1}(z^{-1}) \cdot N_\ell(z^{-1}) \quad (1.4)$$

où  $D_\ell(z^{-1})$  est une matrice polynomiale non singulière de dimension  $n \times n$ . De plus,  $N_\ell(z^{-1})$  est une matrice polynomiale de dimension  $n \times m$ . De l'équation (1.3) et l'équation (1.4), la matrice de transfert  $G_d(z^{-1})$  peut être présentée en double factorisation co-premières à droite et à gauche comme suit:

$$G_d(z^{-1}) = N_r(z^{-1}) \cdot D_r^{-1}(z^{-1}) = D_\ell^{-1}(z^{-1}) \cdot N_\ell(z^{-1}) \quad (1.5)$$

Dans la suite de ce travail, la synthèse du contrôleur prédictif sera basée seulement sur le modèle de synthèse donné par l'équation (1.4). En revanche, les détails de GPC basés sur la factorisation (1.3) seront reportés à d'autres recherches ultérieures. Noter ici que la détermination des deux matrices polynomiales  $D_\ell(z^{-1})$  et  $N_\ell(z^{-1})$  sera effectuée de telle sorte que la matrice polynomiale  $D_\ell(z^{-1})$  doit être diagonale dont chaque transfert diagonal  $D_{\ell\ ii}(z^{-1})$  représente le plus petit dénominateur commun des transferts se trouvant dans la ligne correspondante de la matrice de transfert  $G_d(z^{-1})$ . De plus, la matrice de polynomiale  $N_\ell(z^{-1})$  est déduite directement par de la relation suivante:

$$N_\ell(z^{-1}) = D_\ell(z^{-1}) \cdot G_d(z^{-1}) \quad (1.6)$$

### 1.3. Modèle de CARIMA.

La commande prédictive nécessite, *a priori*, la connaissance d'un modèle mathématique linéaire. Ceci à pour but de prédire le comportement futur du système à commander. Le modèle le plus souvent utilisé pour la synthèse de la loi de GPC est celui de CARIMA (Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average) qui est déduit à partir des deux équations (1.1) et (1.4), on obtient,

$$Y(t) = D_\ell^{-1}(z^{-1})N_\ell(z^{-1}) \cdot U(t) \quad (1.7)$$

Dans ce travail, les deux matrices polynomiales  $D_\ell(z^{-1})$  et  $N_\ell(z^{-1})$  sont choisies comme suit :

$$D_\ell(z^{-1}) = A(z^{-1}), \quad (1.8)$$

$$N_\ell(z^{-1}) = z^{-1}B(z^{-1}), \quad (1.9)$$

Tenant en compte des erreurs de modélisations qui sont regroupées dans le vecteur  $\zeta(t)$ , et sachant que  $\zeta(t) = [\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_n(t)]^T$ , le modèle de CARIMA est celui donné par l'équation ci-dessous [CE07, CE13, CD87, BP96] :

$$A(z^{-1}) \cdot Y(t) = z^{-1}B(z^{-1}) \cdot U(t) + \Delta^{-1}(z^{-1}) \cdot C(z^{-1}) \cdot \zeta(t), \quad (1.10)$$

Le schéma fonctionnel de ce modèle est donné par la **Figure.1.3** comme suit:



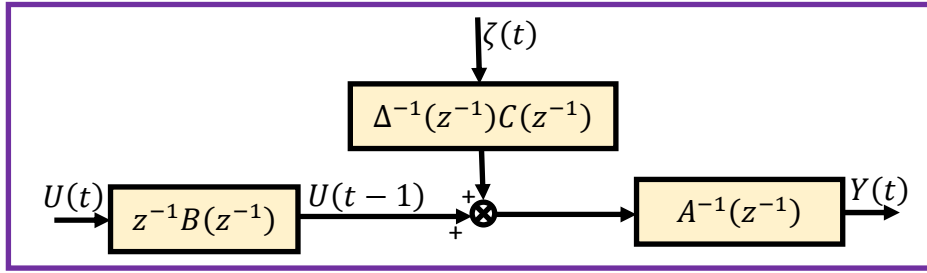


Figure.1.3 : Schéma fonctionnel représentant le modèle de CARIMA

De l'équation (1.10), la matrice polynomiale  $\Delta(z^{-1})$ , permet au système corrigé d'annuler les erreurs statiques en présence des incertitudes de modélisation, sert à rendre le bruit non-stationnaire, ce qui permet de modéliser n'importe quelle perturbation dans la boucle de commande. De plus, les deux matrices polynomiales  $A(z^{-1})$  et  $C(z^{-1})$  de dimensions  $n \times n$  sont supposées diagonales et non singulières. Tandis que la matrice polynomiale  $B(z^{-1})$  est une matrice quelconque de dimension  $n \times m$ . Ces dernières sont données par l'opérateur de retard  $z^{-1}$  avec les relations ci-dessous :

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = I_{n \times n} + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_{n_a} z^{-n_a} = I_{n \times n} + \sum_{k=1}^{n_a} A_k \cdot z^{-k} \\ B(z^{-1}) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots + B_{n_b} z^{-n_b} = \sum_{k=0}^{n_b} B_k \cdot z^{-k} \\ C(z^{-1}) = I_{n \times n} + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_{n_c} z^{-n_c} = I_{n \times n} + \sum_{k=1}^{n_c} C_k \cdot z^{-k} \end{cases}, \quad (1.11)$$

tenant compte la matrice polynomiale diagonale  $\Delta(z^{-1})$  définie par:

$$\Delta(z^{-1}) = (1 - z^{-1}) \cdot I_{n \times n}, \quad (1.12)$$

de l'équation (1.11), les valeurs entiers  $n_a$ ,  $n_b$  et  $n_c$  représentent les degrés des matrices polynomiales  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  et  $C(z^{-1})$  respectivement.

$I_{n \times n}$  : Représente la matrice d'identité de dimension  $n \times n$ ,

$\Delta(z^{-1})$ : Représente l'opérateur de différentiation,

$A_k$ ,  $B_k$  et  $C_k$  : Représentent les matrices réelles constituant les matrices polynomiales  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$  et  $C(z^{-1})$  respectivement. Une autre façon de représenter le système, en opérant les deux membres de l'équation (1.10) par  $\Delta(z^{-1})$ , on obtient la version incrémentale du modèle CARIMA suivante [CD87]:

$$\Delta(z^{-1}) \cdot A(z^{-1}) \cdot Y(t) = \Delta(z^{-1}) \cdot B(z^{-1}) \cdot U(t-1) + C(z^{-1}) \cdot \zeta(t), \quad (1.13)$$

sachant que les sorties et les commandes du modèle incrémental de CARIMA sont données par:  $\Delta Y(t) = Y(t) - Y(t-1)$  et  $\Delta U(t) = U(t) - U(t-1)$ , ainsi l'équation (1.13) décrit

l'évolution des variations de  $n$  sorties du système en fonction de  $m$  variations des entrées, et cela entre deux instants d'échantillonnage successifs  $(t - 1)$  et  $t$ .

#### 1.4. Critère à minimiser :

La loi de la méthode GPC est synthétisée via la minimisation d'un critère quadratique portant, d'un côté, les erreurs futures entre les sorties prédites et les consignes. Il porte, d'un autre côté, les énergies des incréments de commande qui sont, *a priori*, pondérées par une matrice de pondération choisie par l'utilisateur. Ce critère est formulé comme suit [YT95, ZW06, SR92] :

$$J(\Delta u) = esp \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=N_{1_i}}^{N_{2_i}+N_{1_i}-1} [w_i(t+k) - \hat{y}_i(t+k/t)]^2 \right) + \sum_{j=1}^m \left( \lambda_j \sum_{k=1}^{N_{u_j}} [\Delta u_j(t+k-1)]^2 \right) \right\} \quad (1.14)$$

- $N_{1_i}$ : Représente l'horizon minimal de prédiction de sortie pour la  $i^{\text{ème}}$  sortie  $y_i$ , sachant que  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dans ce travail, tous les horizons minimaux sont supposés égaux, i.e.  $N_{1_1} = N_{1_2} = \dots = N_{1_n} = N_1$ .
- $N_{2_i}$ : Représente l'horizon maximal de prédiction de la  $i^{\text{ème}}$  sortie  $y_i$ . Tenant compte la condition suivante :  $N_{1_i} < N_{2_i}$
- $N_{u_j}$ : Représente l'horizon de prédiction de la  $j^{\text{ème}}$  commande  $u_j$ , où  $j = 1, 2, \dots, m$ , tenant compte les deux conditions suivantes  $N_{u_j} \geq N_1$ , et  $N_{u_j} \leq N_{2_i}, \forall j \in \mathbb{N}^*$ .
- $\lambda$  est une matrice réelle diagonale de dimension  $m \cdot \mathcal{N}_{u_{max}} \times m \cdot \mathcal{N}_{u_{max}}$  définie par:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}_{k=1} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}_{k=\mathcal{N}_{u_{max}}} \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

Sachant que  $\mathcal{N}_{u_{max}} = \max_{j=1,2,\dots,m} (N_{u_j})$ , ainsi de l'équation (1.15), chaque bloc diagonal  $diag[(\lambda_j)_{j=1,2,\dots,m}]$  de la matrice diagonale  $\lambda$  permettant de pondérer les énergies des incréments de commande du vecteur  $\Delta u_j(t+k-1)$  pour  $k = 1, 2, \dots, N_{u_j}$  et  $j = 1, 2, \dots, m$ .

- $w_i(t+k)$ : Représente la référence appliquée à la  $i^{\text{ème}}$  voie à l'instant du temps  $t+k$ .
- $\hat{y}_i(t+k)$ : Représente la sortie prédite pour la  $i^{\text{ème}}$  voie à l'instant  $t+k$ .

➤  $\Delta u_j(t + k - 1)$ : représente l'incrément de la  $j^{\text{ème}}$  commande à l'instant du temps  $t + k - 1$ .

La synthèse de la loi de GPC minimisant le critère (1.14) sera basée sur le principe de base présenté par le diagramme fonctionnel suivant (voir la **Figure.1.4**) [SR92, OS06]:

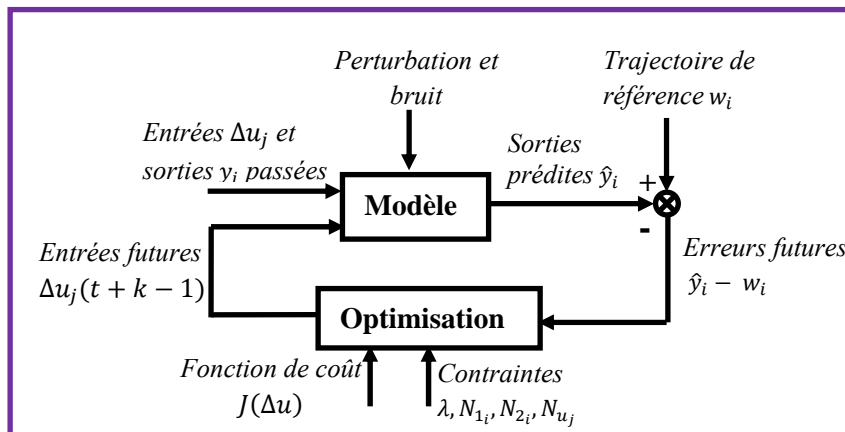


Figure.1.4 : Structure de base du critère de performance de la méthode GPC

De plus, le principe de base de l'horizon glissant utilisé dans la méthode GPC pour un système *SISO* (i.e.  $i = j = 1$ ), peut être illustré par le schéma suivant :

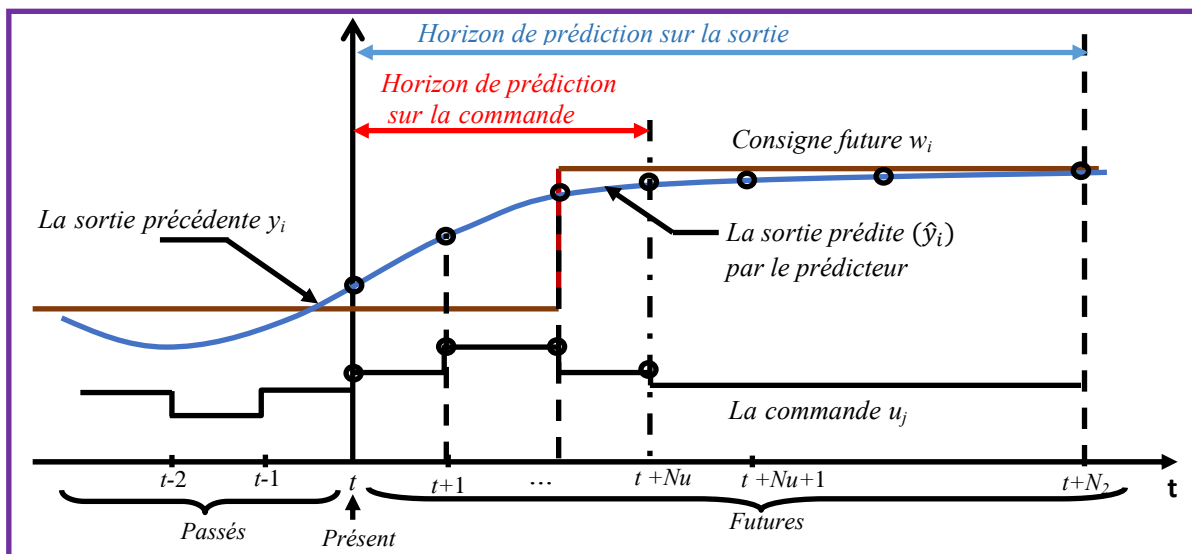


Figure.1.5 : Principe de base de la commande prédictive à base de modèle

D'après la **Figure.1.5**, tous les incréments de commandes  $\Delta u_j$  qui peuvent apparaitre après les horizons  $N_{u_j}$  sont considérés comme nuls, en se basant sur l'hypothèse ci-dessous :

$$\Delta u_j(t + k) = 0 \text{ pour } k \geq N_{u_j}, \tag{1.16}$$

De plus, pour satisfaire à la condition (1.16), il est préférable de choisir  $N_{u_j}$  élevé, ceci implique que l'incrément de commande  $\Delta u_j(t+k)$  est d'autant plus faible que la valeur de  $k$  est élevée.

### 1.5. Calcul du prédicteur optimal :

Le calcul du prédicteur optimal  $\hat{Y}(t+k)$  nécessite, *a priori*, une résolution récursive de deux équations Diophantiennes pour chaque sortie  $y_i(t+k)$  et cela dans un horizon du temps donné par  $k = N_1, \dots, N_{2_i}$ . Pour réaliser cet objectif, on doit suivre les démarches suivantes :

Soit  $(E_k, F_k)$  l'unique couple, solution de l'équation Diophantienne [GJ97], avec:

$$C = E_k A \Delta + z^{-k} F_k, \quad (1.17)$$

sachant que  $E_k(z^{-1}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $F_k(z^{-1}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sont deux matrices polynomiales données en fonction de l'opérateur de retard  $z^{-1}$  comme suit :

$$\begin{cases} E_k(z^{-1}) = E_0^k + E_1^k z^{-1} + \dots + E_{k-1}^k z^{-k+1} \\ F_k(z^{-1}) = F_0^k + F_1^k z^{-1} + \dots + F_{nf^{(k)}}^k z^{-nf^{(k)}}, \\ nf^{(k)} = \max_k(n_a, n_c - k) \end{cases} \quad (1.18)$$

La résolution de l'équation (1.17), développée par *Clarcke*, sera détaillée en *annexe A*, alors, les deux membres de l'équation (1.13) sont multipliés par  $E_k z^k$ , on obtient:

$$E_k A \cdot \Delta Y(t+k) = E_k B \cdot \Delta U(t+k-1) + E_k C \cdot \zeta(t+k), \quad (1.19)$$

de l'équation (1.19), la substitution de la matrice polynomiale  $E_k \cdot A \cdot \Delta$  provenant de l'équation (1.16) donne alors :

$$(C - z^{-k} F_k) \cdot Y(t+k) = E_k B \cdot \Delta U(t+k-1) + E_k C \cdot \zeta(t+k), \quad (1.20)$$

en faisant quelques manipulations mathématiques sur l'équation (1.20), on obtient alors:

$$Y(t+k) = C^{-1} F_k \cdot Y(t) + C^{-1} E_k B \cdot \Delta U(t+k-1) + E_k \cdot \zeta(t+k), \quad (1.21)$$

il faut noter, ici, que le terme  $E_k \cdot \zeta(t+k)$  des valeurs futures des perturbations ou des bruits sont, par définition, indépendantes des signaux mesurables à l'instant  $t$ . Il est, donc, supprimé dans l'équation (1.21), par conséquent, la prédiction optimale à l'instant  $t$  de  $Y(t+k)$  notée ici par  $\hat{Y}(t+k)$ , est obtenue par la relation suivante :

$$\hat{Y}(t+k) = C^{-1}F_k \cdot Y(t) + C^{-1}E_k B \cdot \Delta U(t+k-1), \quad (1.22)$$

Dans l'équation (1.22), le terme  $E_k \cdot B \cdot \Delta U(t+k-1)$  de dimensions  $n \times 1$  sont des combinaisons linéaires de valeurs de  $\Delta U$  à des instants du temps fluctuant entre les deux instants  $(t - n_b)$  et  $(t - k - 1)$ . Sachant que la fonction objective donnée par l'équation (1.14) possède des valeurs futures et valeurs présentes de  $\Delta U$ . Pour cela, une séparation de celles-ci doit se faire via une résolution récursive d'une deuxième équation Diophantienne où deux matrices polynomiales  $G_k(z^{-1})$  et  $H_k(z^{-1})$  sont obtenues [SMT08, PL90], on obtient :

$$E_k B = C G_k + z^{-k} H_k, \quad (1.23)$$

sachant que  $G_k(z^{-1}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$  et  $H_k(z^{-1}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$  sont deux matrices polynomiales données en fonction de l'opérateur de retard  $z^{-1}$  comme suit :

$$\begin{cases} G_k(z^{-1}) = G_0^k + G_1^k z^{-1} + \dots + G_{k-1}^k z^{-k+1} \\ H_k(z^{-1}) = H_0^k + H_1^k z^{-1} + \dots + H_{n_h}^k z^{-n_h}, \\ n_h = \max_k(n_c, n_b) - 1 \end{cases}, \quad (1.24)$$

La résolution de l'équation (1.23), sera détaillée en *annexe A*. Finalement, en remplaçant l'équation (1.23) dans (1.22), on obtient :

$$\hat{Y}(t+k) = G_k \cdot \Delta U(t+k-1) + [C^{-1} \cdot H_k \cdot \Delta U(t-1) + C^{-1} \cdot F_k \cdot Y(t)], \quad (1.25)$$

D'après l'équation (1.25), le premier terme représente les réponses « forcées » du système, qui sont dues aux commandes futures, cependant, le deuxième terme représente les réponses « libres ». Dans le sens qu'elles sont les conséquences, dans le futur, des commandes qui ont été appliquées jusqu'à l'instant  $t$ .

Notons ici que les cas des horizons de prédiction distincts peuvent être envisagés dans certaines applications industrielles où ces derniers cas peuvent ouvrir une nouvelle fenêtre sur d'éventuelles recherches ultérieures. Dans la suite de ce travail, l'horizon de prédiction  $N_{2_i}$  sera considéré égal à  $N_2$ , tandis que l'horizon de prédiction  $N_{u_j}$  sera égal à  $N_u$ . En effet, de l'équation (1.25), pour  $k = N_1, \dots, N_2$ , le vecteur du prédicteur optimal  $\hat{Y}$  peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\underline{\hat{Y}} = \underline{G} \cdot \underline{\Delta U} + \underline{F_c} \quad (1.26)$$

où :

✓  $\underline{\hat{Y}} = [\hat{y}(t + N_1) \quad \hat{y}(t + N_1 + 1) \quad \dots \quad \hat{y}(t + N_2)]^T$  : représente le vecteur du prédicteur de dimensions  $(n \cdot (N_2 - N_1 + 1) \times 1)$  dont chaque ligne de celui-ci représente la sortie prédite  $\hat{y}(t + k)$  à l'instant  $k$ , où  $k = N_1, \dots, N_2$ , avec :

$$\hat{y}(t + k) = [\hat{y}_1(t + k) \quad \hat{y}_2(t + k) \quad \dots \quad \hat{y}_n(t + k)]^T.$$

✓  $\underline{\Delta U} = [\Delta U(t) \quad \Delta U(t + 1) \quad \dots \quad \Delta U(t + N_u - 1)]^T$  : représente le vecteur des incréments de commandes de dimensions  $(m \cdot N_u \times 1)$  dont chaque ligne de celui-ci représente les incréments de commande à l'instant  $k$ , où  $k = 0, \dots, N_u - 1$ , avec :

$$\Delta U(t + k) = [\Delta u_1(t + k) \quad \Delta u_2(t + k) \quad \dots \quad \Delta u_m(t + k)]^T.$$

✓  $\underline{E_c}$  est un vecteur de dimensions  $[n \cdot (N_2 - N_1 + 1) \times 1]$  comportant la prédiction de la réponse libre du système pour les instants d'échantillonnage entre  $t + N_1$  (l'horizon d'initialisation) et  $t + N_2$  (l'horizon de prédiction), avec :

$$\underline{E_c} = IH \cdot \Delta U(t - 1) + IF \cdot Y(t) = \begin{bmatrix} C^{-1}[H_{N_1} \cdot \Delta U(t - 1) + F_{N_1} \cdot Y(t)] \\ C^{-1}[H_{N_1+1} \cdot \Delta U(t - 1) + F_{N_1+1} \cdot Y(t)] \\ \vdots \\ C^{-1}[H_{N_2} \cdot \Delta U(t - 1) + F_{N_2} \cdot Y(t)] \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

✓  $IF$  est une matrice polynomiale de dimension  $[n(N_2 - N_1 + 1) \times n]$  définie par:

$$IF = \begin{bmatrix} C^{-1} \left( F_0^{N_1} + F_1^{N_1} z^{-1} + \dots + F_{n_f}^{N_1} z^{-n_f} \right) \\ C^{-1} \left( F_0^{N_1+1} + F_1^{N_1+1} z^{-1} + \dots + F_{n_f}^{N_1+1} z^{-n_f} \right) \\ \vdots \\ C^{-1} \left( F_0^{N_2} + F_1^{N_2} z^{-1} + \dots + F_{n_f}^{N_2} z^{-n_f} \right) \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Avec:  $n_f^k = \max_k(n_a, n_c - k)$

✓  $IH$  est une matrice polynomiale de dimensions  $[n(N_2 - N_1 + 1) \times m]$  définie par:

$$IH = \begin{bmatrix} C^{-1} (H_0^{N_1} + H_1^{N_1} z^{-1} + \dots + H_{n_h}^{N_1} z^{-n_h}) \\ C^{-1} (H_0^{N_1+1} + H_1^{N_1+1} z^{-1} + \dots + H_{n_h}^{N_1+1} z^{-n_h}) \\ \vdots \\ C^{-1} (H_0^{N_2} + H_1^{N_2} z^{-1} + \dots + H_{n_h}^{N_2} z^{-n_h}) \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

avec :  $n_h = \max_k(n_c, n_b) - 1$ ,

✓  $\underline{G}$ : représente une matrice réelle de dimensions  $[n(N_2 - N_1 + 1) \times mN_u]$  définie par :

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} G_{N_1-1} & \cdots & G_0 & \cdots & \cdots & 0 \\ G_{N_1} & G_{N_1-1} & \cdots & G_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ G_{N_u-1} & G_{N_u-2} & G_{N_u-3} & \cdots & \cdots & G_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{N_2-1} & G_{N_2-2} & G_{N_2-3} & \cdots & G_{N_2-N_u+1} & G_{N_2-N_u} \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

De l'équation (1.30), la matrices réelle  $G_{\mathcal{f}}$  de dimensions  $n \times m$  est définie par :

$$G_{\mathcal{f}} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nm} \end{pmatrix}_{\mathcal{f}} \quad (1.31)$$

Où  $(g_{ij})_{\mathcal{f}}$  représente le coefficient de la réponse indicielle à l'instant  $\mathcal{f}$  pour le transfert entre la  $j^{\text{ème}}$  entrée et la  $i^{\text{ème}}$  sortie du système à commander.

## 1.6. Formulation matricielle du critère

De l'équation (1.14), la représentation matricielle du critère de performance peut être écrite comme suit:

$$J = (\underline{\hat{Y}} - \underline{W})^T (\underline{\hat{Y}} - \underline{W}) + \Delta \underline{U}^T \cdot \lambda \cdot \Delta \underline{U} \quad (1.32)$$

avec :  $\underline{W} = [W(t + N_1) \quad W(t + N_1 + 1) \quad \cdots \quad W(t + N_2)]^T$  représente le vecteur des références futures de dimensions  $n \times (N_2 - N_1 + 1)$  comportant les combinaisons futures  $W(t + k)$  pour  $k = N_1, \dots, N_2$ , il vient donc :

$W(t + k) = [w_1(t + k) \quad w_2(t + k) \quad \cdots \quad w_n(t + k)]^T$ . À partir des équations (1.26), (1.27) et (1.28), les deux matrices polynomiales  $IF$  et  $IH$  peuvent être représentées comme suit [SS92, SMT08, PL90] :

$$\begin{cases} IF = (C^{-1} \cdot [F_{N_1}(z^{-1}) \quad F_{N_1+1}(z^{-1}) \quad \cdots \quad F_{N_2}(z^{-1})])^T \\ IH = (C^{-1} \cdot [H_{N_1}(z^{-1}) \quad H_{N_1+1}(z^{-1}) \quad \cdots \quad H_{N_2}(z^{-1})])^T \end{cases} \quad (1.33)$$

La substitution de l'équation (1.25) dans l'expression (1.31) permet de donner la représentation matricielle du le critère, d'où :

$$J = [\underline{G} \cdot \Delta \underline{U} + IH \cdot \Delta U(t-1) + IF \cdot Y(t) - \underline{W}]^T [\underline{G} \cdot \Delta \underline{U} + IH \cdot \Delta U(t-1) + IF \cdot Y(t) - \underline{W}] + \Delta \underline{U}^T \cdot \lambda \cdot \Delta \underline{U} \quad (1.34)$$

### 1.7. Loi de GPC algorithmique:

La loi de GPC est obtenue par la minimisation du critère (1.33) par rapport aux incréments  $\Delta \underline{U}$ , on aura donc l'expression suivante [KB92, RP02, MB05, SMT08]:

$$\Delta \underline{U}_{opt} = -IM \cdot [IH \cdot \Delta U(t-1) + IF \cdot Y(t) - \underline{W}] \quad (1.35)$$

avec :  $IM \in \mathbb{R}^{m \cdot N_u \times n \cdot (N_2 - N_1 + 1)}$  est la matrice du gain optimal du correcteur GPC, donnée par la relation ci-après:

$$IM = (\underline{G}^T \underline{G} + \lambda)^{-1} \underline{G}^T = [M_1 \quad \dots \quad M_{N_u}]^T \quad (1.36)$$

On peut constater que l'équation (1.34), permet d'obtenir le vecteur des incréments optimaux présents  $\Delta \underline{U}_{opt}(t)$ , ainsi que celui des incréments optimaux de commande futurs de  $[\Delta \underline{U}_{opt}(t+1) \quad \dots \quad \Delta \underline{U}_{opt}(t+N_u-1)]^T$ . En se basant sur le principe de l'horizon glissant, seules les  $m$  premières lignes de la matrice  $IM$  (i.e.,  $M_1 \in \mathbb{R}^{m \times n \cdot (N_2 - N_1 + 1)}$ ) sont appliquées au système (ces  $m$  premières lignes correspondent au calcul de la commande à l'instant  $t$ , les  $m \cdot (N_u - 1)$  restantes correspondants aux instants  $(t+1), \dots, (t+N_u-1)$  quand  $N_u > 1$ ). De ce fait, l'équation (1.34) devient comme suit :

$$U(t) = U(t-1) + M_1 \cdot [\underline{W} - IH \cdot \Delta U(t-1) - IF \cdot Y(t)]. \quad (1.37)$$

En tenant compte de la relation :

$$\Delta \underline{U}_{opt}(t) = U(t) - U(t-1), \quad (1.38)$$

où la matrice  $M_1$  est donnée par :  $M_1 = [M_{1N_1} \quad \dots \quad M_{1(N_2 - N_1 + 1)}]^T$ , sachant que les  $M_{1k}$  pour  $k = N_1, \dots, (N_2 - N_1 + 1)$  sont des matrices réelles de dimensions  $m \times n$ .

### 1.8. Algorithme de la méthode GPC algorithmique :

L'algorithme qui permet de déterminer la loi optimale de la méthode GPC pour commander un système pluridimensionnel se resume par les deux étapes de calcul suivantes :



**Étape1: Calculs hors ligne**

- a) Obtention de la matrice de transfert  $G_d(z^{-1})$ .
- b) Factorisation de  $G_d(z^{-1})$  en deux matrices polynomiales  $\tilde{M}(z^{-1})$  et  $\tilde{N}(z^{-1})$ .
- c) Détermination des deux matrices  $A(z^{-1})$  et  $B(z^{-1})$  du modèle de *CARIMA*.
- d) Définition des trajectoires de références (à suivre).
- e) Choix des paramètres de synthèse de la méthode de GPC à savoir :  $N_1, N_2, N_u, \lambda$ .
- f) Résolution de la première équation diophantienne pour le calcul des deux matrices polynomiales  $E_k(z^{-1})$  et  $F_k(z^{-1})$ , pour  $k = N_1, \dots, N_2$ .
- g) Résolution de la deuxième équation diophantienne pour le calcul des deux matrices polynomiales  $G_k(z^{-1})$  et  $H_k(z^{-1})$ , pour  $k = N_1, \dots, N_2$ .
- h) Détermination de deux matrices polynomiales  $IF$  et  $IH$ .
- i) Calcul des matrices réelles  $\underline{G}, IM$  et  $M_1$ .
- j) Initialisation de la variable du temps ( $t = t_0$ )
- k) Initialisation des deux vecteurs de sortie  $Y(t_0)$  et de commande  $U(t_0)$ .

**Étape2: Calculs en ligne**

- a) Mise à jour du vecteur de sortie  $Y(t + 1)$  à partir du modèle de *CARIMA*.
- b) Choix d'un vecteur de référence  $W(t + k)$  pour l'horizon glissant  $k = t + N_1$  jusqu'au  $k = t + N_2 + N_1 - 1$ .
- c) Calcul des incréments optimaux  $\Delta \underline{U}_{opt}$  à partir de l'équation (1.35)
- d) Mise à jour du vecteur de la commande optimale  $U(t) = \Delta \underline{U}_{opt}(t) + U(t - 1)$ .
- e) Mise à jour du variable du temps, i.e.,  $t = t + 1$  et retour à l'étape (a)

**1.9. Choix des paramètres de synthèse  $N_2, N_u$  et  $\lambda$ :**

D'après les démarches citées précédemment pour la détermination d'une loi optimale de *GPC* algorithmique, on a pu constater que l'application de cette version est néanmoins facile pour certains processus industriels. Le seul point délicat est celui qui concerne le choix de ses paramètres de synthèse à savoir  $N_1, N_2, N_u$  et  $\lambda$  [RP08, RP02]. L'objectif principal d'un bon réglage de ces paramètres est d'assurer une bonne dynamique de poursuite du système bouclé tout en assurant des énergies de commande néanmoins très réduites [RJ98, CE13, CD87]. Pour atteindre ces objectifs, plusieurs méthodes de réglage ont été proposées pour assurer un meilleur choix de ceux-ci. Parmi lesquelles, on peut citer les choix suivants :

### 1.9.1. Choix des horizons de prédiction sur les sorties

- L'horizon  $N_1$  est souvent choisi égal à la valeur minimale des retards purs de chaque voie du système à commander. Pour un système sans retard,  $N_1$  est choisi égal à 1.
- L'horizon  $N_2$  est choisi de façon que  $N_2 T_e$  soit égal au maximum des temps de réponse en boucle ouverte pour chacune des voies, où  $T_e$  est le temps d'échantillonnage du contrôleur. Il est à noter que plus  $N_2$  est grand, plus le temps de calcul est long, [CS12, CD87, CE07].

### 1.9.2. Choix de l'horizon de prédiction sur les commandes

Pour les processus simples, il suffit de prendre  $N_u$  égal à 1 pour assurer une bonne dynamique de poursuite de chaque voie. Par contre, pour les processus complexes  $N_u$  doit être égal au moins au nombre des pôles instables ou mal amortis pour chaque voie du système à commander, [CD87, CE13, DB09].

### 1.9.3. Choix de la matrice de pondération $\lambda$ sur les commandes

Pour le coefficient de pondération  $\lambda_j$ , le choix de celui-ci est effectué d'une façon intuitive et en fonction de l'énergie de commande qui doit être raisonnable et économique du point de vue pratique. De ce fait, on peut dire que plus  $\lambda_j$  est élevé, plus le temps de réponse du système est long sur la  $i^{\text{ème}}$  voie. Il faut mentionner ici que la matrice  $\lambda$  peut jouer un rôle très important notamment dans le conditionnement numérique de la méthode GPC car elle intervient dans la matrice  $G^T G + \lambda$  que l'on doit inverser, [KB92, DM10, GZ15].

## 1.10. Formulation polynomiale de la loi de GPC algorithmique

L'application de la loi de GPC algorithmique sur les systèmes pluridimensionnels présente un certain nombre de difficultés notamment pour les processus industriels modélisés par des modèles d'ordre très élevé. Dans ce cas, le calcul de la commande nécessite un temps de calcul très élevé. A cet effet, nous allons utiliser la version polynomiale de celle-ci, et cela pour, d'un côté, d'éviter le calcul récursif de la commande, ce qui réduit d'une façon remarquable le temps de calcul de cette dernière. D'un autre côté, elle permet de faire l'analyse de robustesse de stabilité et de performance du système bouclé dans le plan fréquentiel. Pour présenter les avantages de cette version, la loi de GPC algorithmique sera concrétisée par trois contrôleurs qui peuvent se présenter sous la forme  $R_0 S_0 T_0$  ci-dessous [RP03, MB05, SC08, RP08, RS09] :

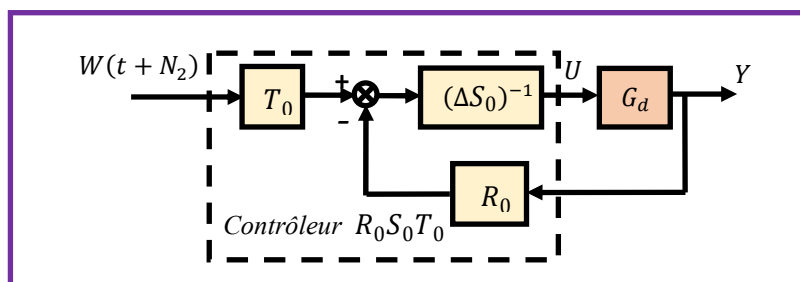


Figure.1.6 : Système bouclé basé sur la structure RST

d'après la **Figure.1.6**, la structure  $R_0S_0T_0$  proposée peut fournir la relation ci-après:

$$S_0(z^{-1}) \cdot \Delta U(t) = T_0(z^{-1}) \cdot W(t + N_2) - R_0(z^{-1}) \cdot Y(t), \quad (1.39)$$

sachant que le vecteur des références futures à l'horizon de prédiction  $k = N_2$  est donné par:

$$W(t + N_2) = [w_1(t + N_2) \quad w_2(t + N_2) \quad \dots \quad w_n(t + N_2)]^T, \quad (1.40)$$

l'équation (1.40) peut être réécrite comme suit:

$$W(t + N_2) = z^{N_2} [w_1(t) \quad w_2(t) \quad \dots \quad w_n(t)]^T = z^{N_2} W(t), \quad (1.41)$$

de plus, en faisant quelques manipulations mathématiques sur l'équation (1.37), on obtient :

$$(I_{m \times m} + z^{-1} \cdot M_1 \cdot IH) \Delta U(t) = M_1 \cdot \underline{W} - M_1 \cdot IF \cdot Y(t), \quad (1.42)$$

de l'équation (1.42), le vecteur des références futures  $\underline{W}$  peut être réécrit comme suit:

$$\underline{W} = W(t) \cdot [z^{N_1} I_{n \times n} \quad z^{N_1+1} I_{n \times n} \quad \dots \quad z^{N_2} I_{n \times n}]^T, \quad (1.43)$$

la substitution de l'équation (1.41) dans l'équation (1.39) permet l'obtention de l'expression ci-dessous:

$$S_0(z^{-1}) \cdot \Delta U(t) = T_0(z^{-1}) \cdot z^{N_2} W(t) - R_0(z^{-1}) \cdot Y(t), \quad (1.44)$$

De plus, le remplacement de l'équation (1.43) dans l'équation (1.42) donne l'expression suivante:

$$(I_{m \times m} + z^{-1} M_1 \cdot IH) \Delta U(t) = M_1 \cdot W(t) [z^{N_1} I_{n \times n} \quad z^{N_1+1} I_{n \times n} \quad \dots \quad z^{N_2} I_{n \times n}]^T - M_1 \cdot IF \cdot Y(t), \quad (1.45)$$

Maintenant, l'identification terme à terme des deux équations (1.44) et (1.45) permet de définir les matrices polynomiales de la structure  $R_0S_0T_0$ , on aura donc:

$$\begin{cases} S_0(z^{-1}) = I_{m \times m} + z^{-1}M_1 \cdot IH \\ R_0(z^{-1}) = M_1 \cdot IF \\ T_0(z^{-1}) = M_1 \cdot [z^{-N_2+N_1}I_{n \times n} \quad z^{-N_2+N_1+1}I_{n \times n} \quad \dots \quad I_{n \times n}]^T \end{cases} \quad (1.46)$$

On peut constater que la matrice polynomiale  $C(z^{-1})$  se trouve au niveau du correcteur dans  $S_0(z^{-1})$ ,  $T_0(z^{-1})$  et  $R_0(z^{-1})$  par l'intermédiaire de  $IH$ ,  $IF$  et  $M_1$ . Dans la suite de ce travail, la matrice polynomiale sera égale à la matrice d'identité (i.e.  $C(z^{-1}) = I_{n \times n}$ ).

Les avantages procurés par l'obtention de la forme polynomiale  $RST$  équivalente au  $GPC$  sont multiples. Parmi lesquels, on peut citer :

- ✓ L'utilisateur peut étudier, *a priori*, la stabilité du système bouclé en fonction des paramètres  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_u$ ,  $\lambda$ . On peut alors garantir la stabilité nominale de celui-ci dans le plan fréquentiel. Ce n'est pas le cas avec la version algorithmique de  $GPC$ , pour laquelle la stabilité pourra seulement être examinée via des théorèmes généraux.
- ✓ Il est possible de procéder à une analyse de stabilité robuste par le tracé des valeurs singulières maximales du système bouclé où ce dernier permet d'évaluer le degré de robustesse de stabilité et des performances du système.
- ✓ Cette approche permet d'analyser le correcteur généré par le jeu de paramètres  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_u$ ,  $\lambda$  qui sont choisis par l'utilisateur. De ce fait, on peut donc obtenir les pôles et les zéros du correcteur et étudier son conditionnement..., etc.
- ✓ Les polynômes matriciels étant obtenus une fois pour toute hors ligne, l'approche polynomiale du  $GPC$  apparaît plus rapide à l'exécution que la version algorithmique. (Ce qui peut être intéressant dans le cas de l'utilisation de périodes d'échantillonnage courtes).

### 1.11. Analyse de robustesse du système bouclé :

Comme nous l'avons dit précédemment, la représentation de la version polynomiale de la méthode  $GPC$  est indispensable pour effectuer l'analyse de robustesse en stabilité du système bouclé. En effet, rappelons ici que la version algorithmique ne fournit pas de façon explicite les correcteurs. Nous allons aborder un ensemble de théorèmes concernant des conditions de robustesse de stabilité d'un système bouclé. En effet, une boucle d'asservissement est habituellement décrite par le schéma standard suivant [RS09, RP03, OM04, ZA14]:

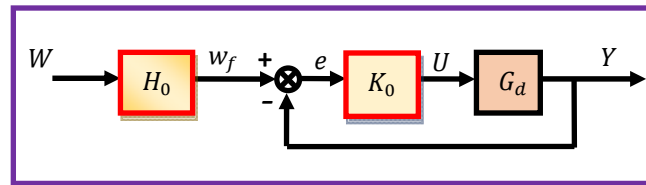


Figure.1.7 : Système bouclé basé sur le contrôleur prédictif primaire de 2 degrés de liberté

D’après la Figure.1.7, les nomenclatures ci-après seront utilisées pour la suite de ce travail, on aura donc :

- $K_0(z^{-1})$  : représente le poste-compensateur du contrôleur prédictif primaire.
- $H_0(z^{-1})$  : représente le pré-compensateur du contrôleur prédictif primaire.
- $e(t)$  : représente le vecteur des erreurs de poursuite.
- $w_f(t)$  : représente le vecteur des consignes filtrées qui sont générées par le pré-compensateur  $H_0(z^{-1})$ .

Dans la phase d’analyse de robustesse du système bouclé par un contrôleur de deux degrés de liberté, il existe souvent d’autres signaux de perturbation et d’autres des bruits de mesure qui doivent les prendre en considération lors de l’étude de robustesse dans le plan fréquentiel. La configuration standard du système bouclé peut être généralisée par le schéma de la figure ci-dessous :

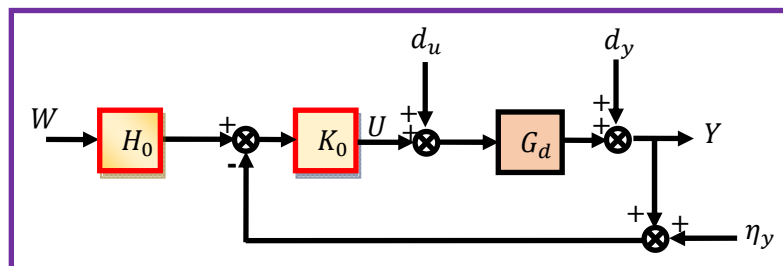


Figure.1.8 : Configuration standard du système bouclé par le contrôleur prédictif primaire

Avec :

$d_u$  : représente les entrées de perturbation ramenées en entrée du système à commander.

$d_y$  : représente les entrées de perturbation ramenées en sortie du système à commander.

$\eta_y$  : représente les entrées des bruits de mesures.

D’après la Figure.1.8, on peut définir les différentes matrices de sensibilité comme suit [ZG81, RP03, OH03, MB05]:

### 1.11.1. Matrice de sensibilité directe en sortie :

Elle représente le transfert entre le vecteur de sortie  $Y$  et celui des perturbations en sortie  $d_y$ . Notons ici que cette matrice de transfert représente également le transfert entre les erreurs de poursuite et les entrées de consigne ainsi que les entrées de bruit de mesure. A cet

effet, cette matrice de sensibilité joue un rôle très important pour l'amélioration de la dynamique de poursuite du système bouclé en présence des entrées citées précédemment. Elle est donc définie par:

$$S_{y_0} = (I_{n \times n} + G_d K_0)^{-1} \quad (1.47)$$

### 1.11.2. Matrice de sensibilité directe en entrée :

Elle représente le transfert entre la somme des entrées  $U + d_u$  et le vecteur des perturbations  $d_u$  qui affecte cette entrée. Elle est définie par:

$$S_{u_0} = (I_{m \times m} + K_0 G_d)^{-1} \quad (1.48)$$

### 1.11.3. Matrice de sensibilité complémentaire en sortie :

La fonction de sensibilité complémentaire en sortie notée  $T_{y_0}$  détermine le transfert entre le vecteur de sortie  $Y$  et celui des bruits de mesure  $n_y$ . Elle est donnée par :

$$T_{y_0} = G_d K_0 (I_{n \times n} + G_d K_0)^{-1} \quad (1.49)$$

### 1.11.4. Matrice de sensibilité complémentaire en entrée :

Cette matrice représente le transfert qui détermine la manière dont les perturbations du système  $d_y$  et les bruits de mesure  $n_y$  affectent les commandes  $U$ . Elle est donc définie par:

$$T_{u_0} = K_0 G_d (I_{m \times m} + K_0 G_d)^{-1} \quad (1.50)$$

### 1.11.5. Matrice de transfert d'entrée/sortie du système :

La matrice de transfert d'entrée/sortie  $G_{cl_0}$  du système, représente la boucle fermée du système corrigé. Elle permet donc de définir la dynamique de poursuite des trajectoires de référence. Cette matrice est donnée par l'expression suivante :

$$G_{cl_0} = G_d K_0 (I_{n \times n} + G_d K_0)^{-1} H_0, \quad (1.51)$$

en faisant quelques manipulations mathématiques sur cette matrice, d'où l'obtient l'identité suivante qui est toujours vérifiée  $G_d K_0 (I_{n \times n} + G_d K_0)^{-1} = [I_{n \times n} + (G_d K_0)^{-1}]^{-1}$ . A partir de là, le transfert de la boucle fermée peut être réécrit comme suit, [OH03, MB05, GK88]:

$$G_{cl_0} = [I_{n \times n} + (G_d K_0)^{-1}]^{-1} H_0 \quad (1.52)$$

D'après les définitions précédentes, on peut constater que les matrices de sensibilité à savoir  $S_{y_0}(z^{-1})$ ,  $S_{u_0}(z^{-1})$ ,  $T_{y_0}(z^{-1})$  et  $T_{u_0}(z^{-1})$  font intervenir la matrice de transfert en boucle ouverte  $G_d(z^{-1}) \cdot K_0(z^{-1})$  et vérifiant les propriétés ci-après :

$$\begin{cases} G_d K_0 [I_{n \times n} + (G_d K_0)^{-1}]^{-1} = [I_{n \times n} + G_d K_0]^{-1} G_d K_0 \\ K_0 G_d [I_{m \times m} + K_0 G_d]^{-1} = [I_{m \times m} + K_0 G_d]^{-1} K_0 G_d \\ K_0 S_{y_0} = S_{u_0} K_0 \end{cases} \quad (1.53)$$

sachant que les deux identités suivantes sont toujours vérifiées:

$$\begin{cases} S_{y_0} + T_{y_0} = I_{n \times n} \\ S_{u_0} + T_{u_0} = I_{m \times m} \end{cases} \quad (1.54)$$

de plus, d'après la configuration standard donnée par la **Figure.1.8**, on peut définir le bilan des signaux comme suit:

$$\begin{cases} Y = G_{cl_0} \cdot W - T_{y_0} \cdot \eta_y + S_{y_0} \cdot d_y + S_{y_0} G_d \cdot d_u \\ e = S_{y_0} \cdot (W - d_y - \eta_y) - S_{y_0} G_d \cdot d_u \\ U = K_0 S_{y_0} \cdot (W - d_y - \eta_y) - T_{u_0} \cdot d_u \end{cases} \quad (1.55)$$

Rappelons ici, que le lieu des valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité directe permet de définir les performances nominales du système bouclé. Autrement dit, cette matrice de sensibilité peut fournir, dans le plan fréquentiel, les informations sur l'effet des incertitudes de modélisation sur le système corrigé ainsi que celles des erreurs de poursuite en régime permanent. En revanche, le tracé des valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité complémentaire peut fournir l'information sur la robustesse de stabilité en tenant compte de la dynamique négligée en hautes fréquences ainsi que l'effet des bruits de mesure.

### 1.12. Simulations et interprétations des résultats :

Pour examiner les performances de la version polynomiale de la méthode GPC basée sur les trois contrôleurs  $R_0 S_0 T_0$ , nous allons utiliser un processus physique pluridimensionnel. Sa dynamique a été modélisée par une matrice de transfert non carrée obtenue via un pas de discrétisation  $T_e = 15$  secondes. Ce processus comporte trois grandeurs d'entrées présentées par le vecteur  $U = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad u_3(t)]$ . Il comporte aussi deux grandeurs de sorties présentées par le vecteur  $Y = [y_1(t) \quad y_2(t)]$ . Le transfert reliant le système d'entrée/sortie de ce processus est présenté par le schéma fonctionnel suivant :

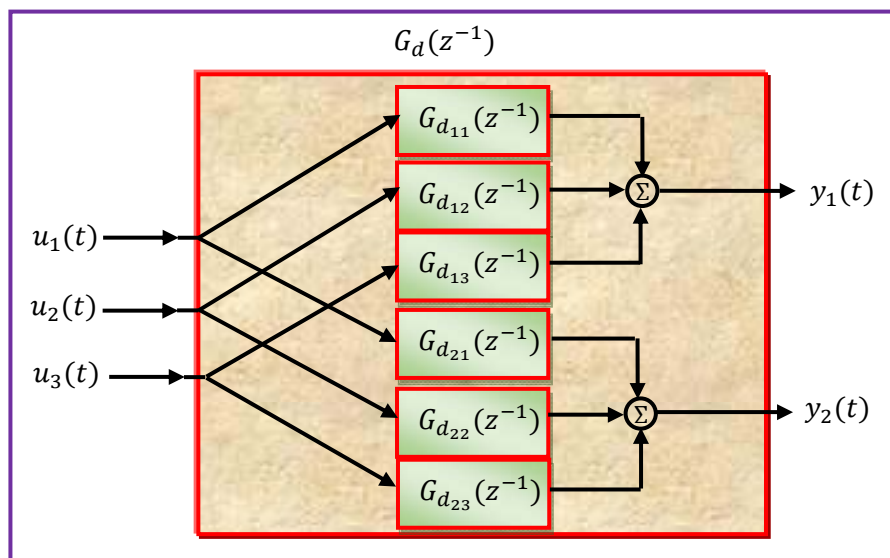


Figure.1.9 : Représentation du système couplé de 3 entrées -2 sorties

où, sa matrice de transfert discrète est donnée par:

$$G_d(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{-0.1483}{1-0.9516z^{-1}} & \frac{0.00777}{1-0.9516z^{-1}} & \frac{0.02626}{1-0.9516z^{-1}} \\ \frac{0.0013+0.1908z^{-1}}{1-0.972z^{-1}} & \frac{0.0515-0.03362z^{-1}}{1-0.972z^{-1}} & \frac{0.0308-0.07758z^{-1}}{1-0.972z^{-1}} \end{bmatrix}, \quad (1.56)$$

de l'équation (1.56), les deux matrices polynomiales construisant le modèle de CARIMA sont déterminées suivant la méthode citée au paragraphe §1.2.2, il vient donc :

$$A(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.9516 & 0 \\ 0 & -0.972 \end{bmatrix} z^{-1} \quad (1.57)$$

$$B(z^{-1}) = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} -14.83 & 0.777 & 2.626 \\ 0.13 & 5.15 & 3.08 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1908 & 0.3362 & -0.7758 \end{bmatrix} z^{-1} \quad (1.58)$$

Dans la phase de synthèse du contrôleur prédictif basé sur la structure RST, les paramètres de réglage qui assurent la bonne dynamique de poursuite des trajectoires de référence ont été choisis comme suit :  $(N_1, [N_{2_1}, N_{2_2}], N_u, \lambda_{1,2,3}) = (1, [2, 2], 1, 10^{-2} \cdot [8, 5, 1])$ .

Notons ici que les choix de ces paramètres a été effectué tout en respectant les règles de réglages citées au paragraphe §1.9, d'où on fait ressortir les trois matrices polynomiales suivantes :

$$R_0(z^{-1}) = \begin{bmatrix} -4.379 & 2.83 \\ 1.43 & 4.716 \\ 6.843 & 4.605 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.662 & -1.792 \\ -0.8694 & -2.837 \\ -4.16 & -2.264 \end{bmatrix} z^{-1} \quad (1.59)$$



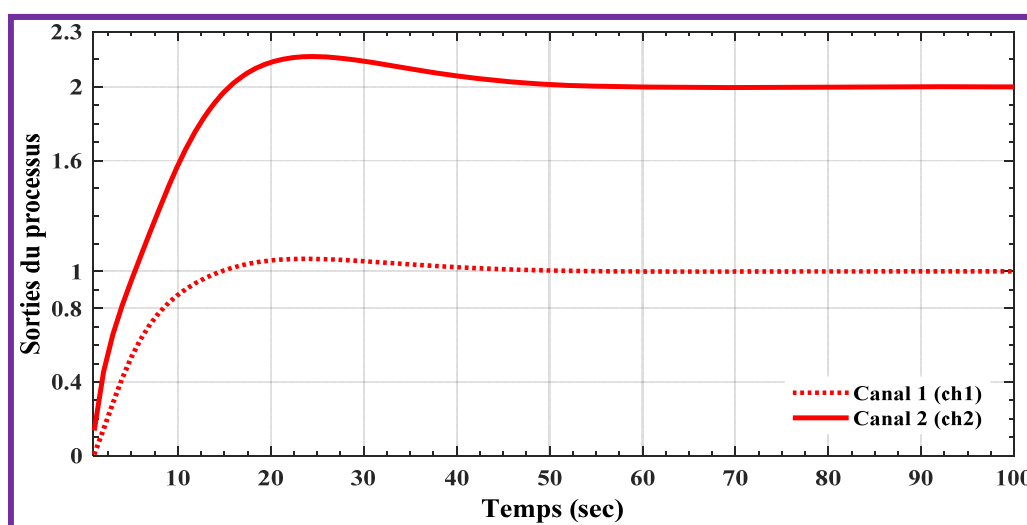
$$S_0(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3518 & -0.06198 & -0.143 \\ 0.5571 & -0.09814 & -0.2265 \\ 0.4444 & -0.0783 & -0.1807 \end{bmatrix} z^{-1} \quad (1.60)$$

$$T_0(z^{-1}) = \begin{bmatrix} -1.35 & 0.8287 \\ 0.3708 & 1.07 \\ 1.774 & -0.0127 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5817 & 0.2095 \\ 0.19 & 0.8086 \\ 0.909 & 2.354 \end{bmatrix} z^{-1} \quad (1.61)$$

La dynamique de poursuite du système bouclé est celle obtenue à partir de l'utilisation du vecteur de consignes  $W$  dans la configuration donnée par la **Figure.1.6** telle que :

$$W = \begin{cases} w_1(t) = 1: t \geq 0 \\ w_2(t) = 2: t \geq 0 \end{cases}, \text{ pour } t \in [0,100] \text{ seconde.}$$

On obtient alors la **Figure.1.10** ci-après:



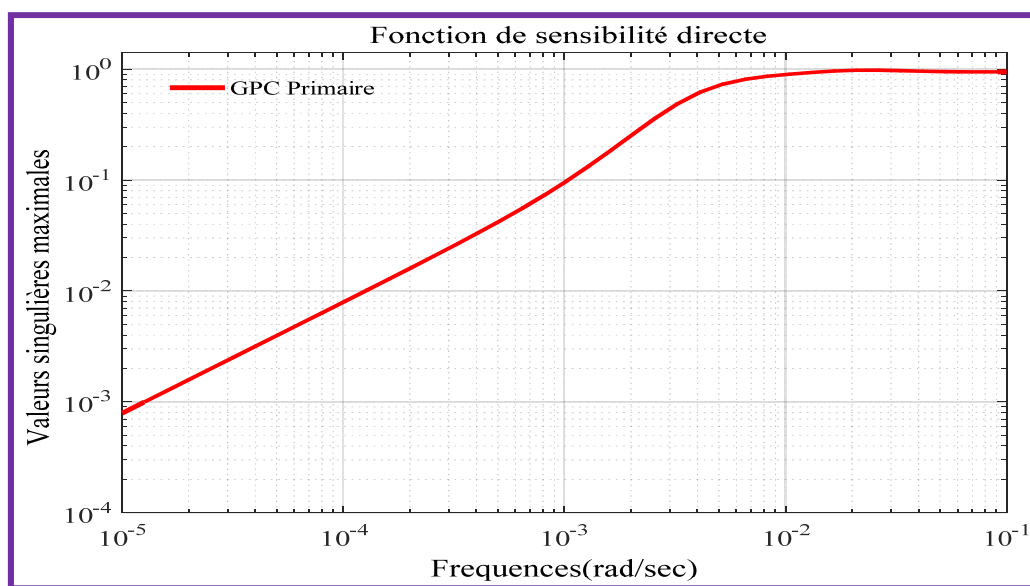
**Figure.1.10** : Évolution temporelle des réponses indicielles du système commandé par le GPC polynomiale

A partir de la **Figure.1.10**, on a pu constater que la version polynomiale proposée peut garantir une bonne dynamique de poursuite. Ceci pour chaque voie du système bouclé. Cette dynamique est caractérisée par un temps de montée néanmoins rapide avec un dépassement acceptable du point de vue pratique. De plus, les deux réponses temporelles du système corrigé sont assurées avec une erreur statique très réduite pour chaque voie.

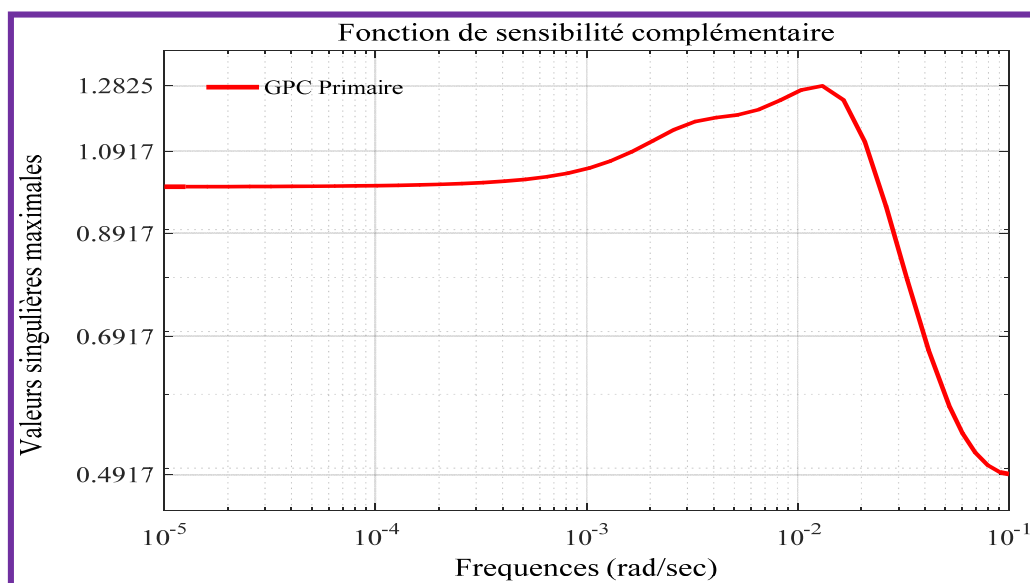
Pour la robustesse du système bouclé, En se basant sur la configuration standard présentée par la **Figure.1.8** où le pré-compensateur ainsi que le poste-compensateur sont choisis respectivement par les deux transferts suivants :

$$\begin{cases} H_0(z^{-1}) = R_0^{-1}(z^{-1}) \cdot T_0(z^{-1}) \\ K_0(z^{-1}) = [\Delta S_0(z^{-1})]^{-1} \cdot R_0(z^{-1}) \end{cases} \quad (1.62)$$

De plus, le vecteur de perturbation agissant sur les entrées du modèle de synthèse est supposé nul (i.e.  $d_u = [0 \ 0 \ 0]^T$ ) tandis que le vecteur de perturbation  $d_y$  est supposé être un échelon d'amplitude de 0.25 Volt qui est porté sur les sorties du processus à partir de l'instant  $t = 100$  secondes. Pour le vecteur de bruit de mesure  $\eta_y$ , il est supposé être un signal aléatoire gaussien de moyenne nulle et de variance 0,01. Ce dernier est appliqué à partir de l'instant  $t = 200$  secondes. Les figures (**Figure.1.11** et **Figure.1.12**) représentent respectivement les lieux de  $\sigma_{max}[S_{y_0}(e^{j\omega T_e})]$  et  $\sigma_{max}[T_{y_0}(e^{j\omega T_e})]$  dans une plage de fréquences limitée par  $10^{-5} \leq \omega \leq 10^{-1}$  radian/seconde, on obtient donc les réponses fréquentielles suivantes :

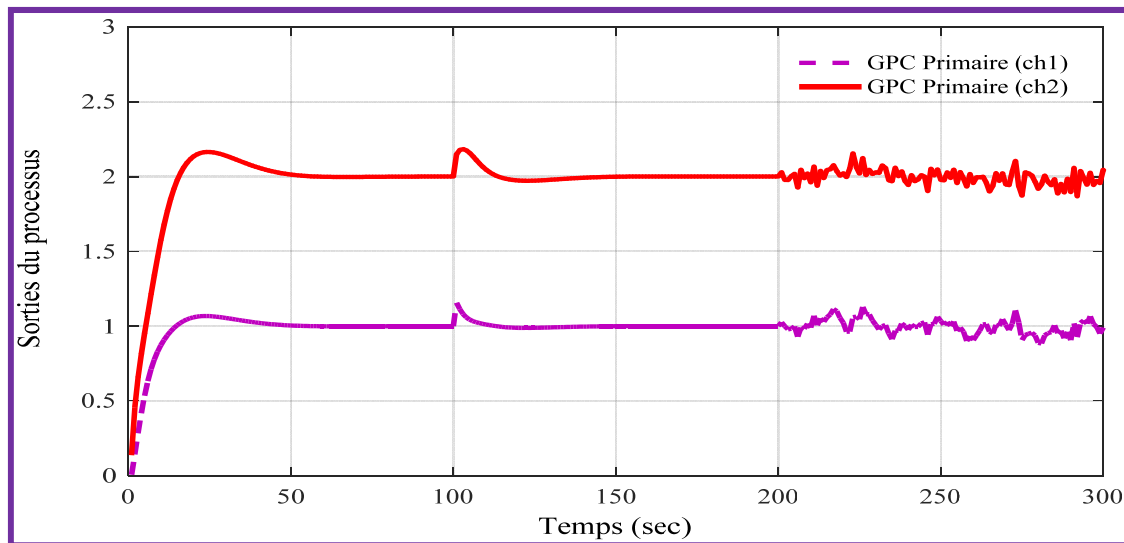


**Figure.1.11** : Évolution de la performance nominale du système bouclé



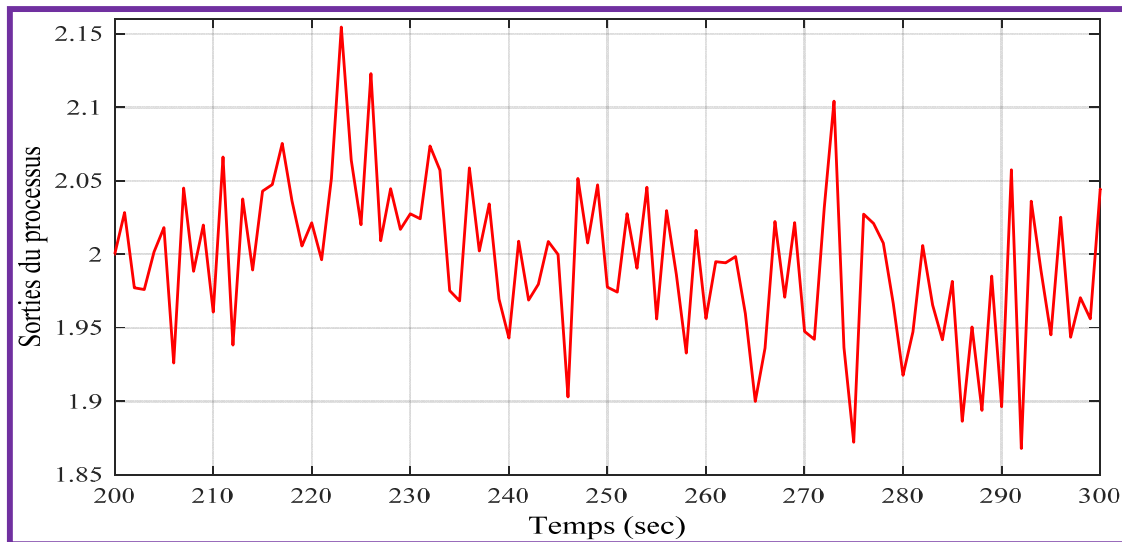
**Figure.1.12** : Évolution de la stabilité robuste du système bouclé

D'après la **Figure.1.11**, on a pu constater que les valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité directe sont très réduites en basses fréquences. Ceci est traduit par l'obtention d'une bonne dynamique de réjection des perturbations ou des incertitudes de modélisation. De plus, les performances nominales sont assurées avec une marge de robustesse acceptable du point de vue pratique. En revanche, d'après la **Figure.1.12**, il est clair de voir l'apparition d'un pic de résonance égal à  $\max\|T_{y_0}\|_{\infty} = 1.2803$  survenant à la pulsation  $\omega = 0.03$  radians/secondes dans le tracé du lieu des valeurs singulières maximales de la fonction de sensibilité complémentaire  $T_{y_0}$ . Ceci peut provoquer l'apparition des phénomènes non souhaités dans la chaîne de commande du système bouclé. De ce fait, la marge de sécurité face aux effets des bruits de mesures (marge de la stabilité robuste) sera très étroite en hautes fréquences notamment dans l'intervalle  $10^{-3} \leq \omega \leq 10^{-1}$  radian/seconde. Pour confirmer les résultats précédents dans le plan temporel, la **Figure.1.13** présente les sorties globales du système bouclé en tenant compte des signaux exogènes cités précédemment, on obtient donc :



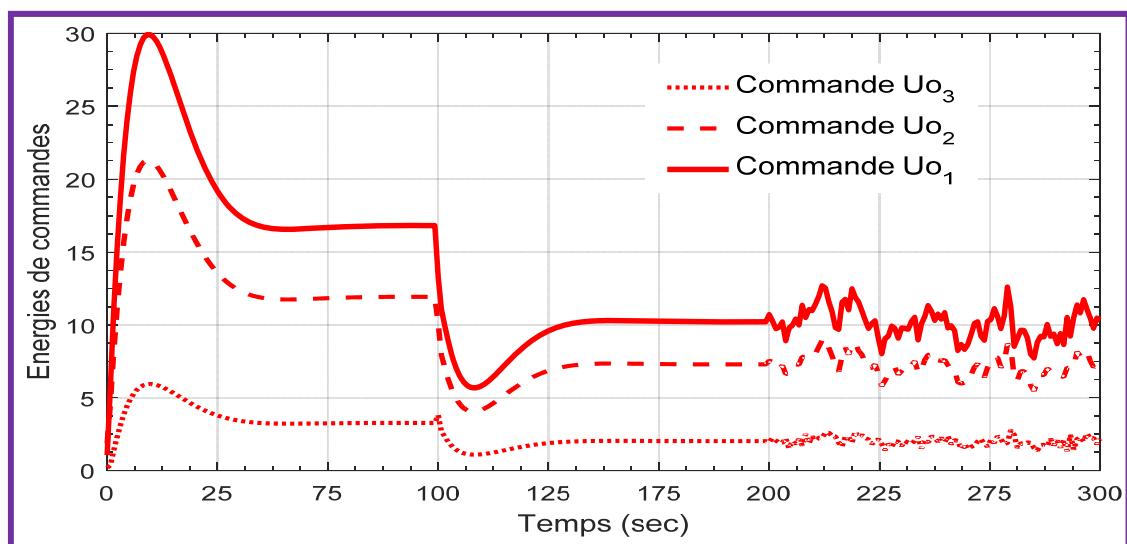
**Figure.1.13** : Évolution temporelle des réponses indicielles du système en présence de perturbations et de bruit de mesure

D'après la **Figure.1.13**, il est évident d'observer que les deux entrées de perturbation sont bien rejetées et cela dans un intervalle de temps très réduit. Par contre, le système bouclé présente une grande sensibilité aux entrées de bruits de mesure en régime permanent comme le montre la **Figure.1.14**.



*Figure.1.14 : Sensibilité de la réponse indicielle du système en présence de bruit de mesure (zoom)*

La **Figure.1.15** présente les signaux de commande fournis par la version polynomiale de la méthode GPC dans le plan temporel, on obtient :



*Figure.1.15 : Les commandes appliquées au système*

D'après la **Figure.1.15**, on peut voir nettement que cette version de GPC n'arrive pas à fournir de bons signaux de commande qui sont très fluctuants notamment en régime stationnaire.

### 1.13. Conclusion.

Dans ce chapitre, on a présenté les démarches de la commande prédictive généralisée pour la commande des systèmes pluridimensionnels. Cette méthode de commande était présentée en deux versions : algorithmique et polynomiale. La version polynomiale possède l'avantage de l'analyse de robustesse du système bouclé dans le plan fréquentiel. Ceci en présence des

incertitudes de modélisation ainsi que des signaux des bruits de mesure. Cette analyse était basée sur le tracé des lieux des valeurs singulières maximales des deux matrices de sensibilité qui sont la sensibilité directe en sortie et la sensibilité complémentaire en sortie. Cette étude a été validée sur un processus physique, modélisé par une matrice de transfert non carrée.

Les résultats de simulation montrent que la bonne dynamique de poursuite des trajectoires de référence dépend du choix adéquat des paramètres de synthèse. Néanmoins, la robustesse fournie, en particulier la stabilité robuste, était assurée mais avec une marge de sécurité très réduite. Ces résultats ont été confirmés dans le plan temporel où les commandes fournies sont très fluctuantes dans un intervalle de temps très réduit chose qui peut restreindre l'application de cette version de GPC en présence ce type des signaux dans la boucle de commande.

Toutefois la bonne dynamique de poursuite était bien assurée par la version polynomiale de GPC. Néanmoins, la robustesse du système bouclé était très fragile en présence des bruits de mesure. En conséquence, notre objectif devient plus précis dans la suite de ce travail. Nous allons suggérer, et indépendamment de la stratégie de commande, une autre méthode de synthèse basée sur la théorie de la commande robuste, et cela pour palier à l'inconvénient de la méthode de GPC. La méthode robuste suggérée pour atteindre cet objectif est celle de la méthode  $\mathcal{H}_\infty$  qui sera détaillée dans le chapitre suivant.

# CHAPITRE 2

**La commande robuste pluridimensionnelle**

*Ce chapitre décrit d'une manière succincte les différentes techniques basées sur la théorie de la commande robuste des systèmes pluridimensionnels linéaires. Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à la méthode de synthèse dite  $H_\infty$ . A cet effet, nous allons présenter les outils mathématiques et les principales définitions utilisées dans cette stratégie de commande comme la définition de la norme  $H_\infty$  et ses propriétés, la quantification et l'évaluation des incertitudes de modélisation qui affectent les modèles de synthèse, les tracés des lieux des valeurs singulières maximales des deux sensibilités directe et complémentaire dans le plan fréquentiel. Ces deux conditions seront formulées sous forme d'un problème de sensibilité mixte dont deux versions de la méthode  $H_\infty$  seront utilisées pour la résolution de celui-ci. La première version est celle basée sur la résolution récursive de deux équations de Riccati. Tandis que la seconde est celle basée sur la formulation des spécifications sous forme des inégalités matricielles où en anglais Linear Matrix Inequalities LMI's. Ce chapitre sera achevé par une étude en simulation qui sera effectuée seulement par la résolution du problème de  $H_\infty$  sous-optimal donné par le critère de sensibilité mixte. Les résultats de simulation dans le plan fréquentiel et temporel seront comparés à ceux fournis par le contrôleur prédictif primaire de GPC.*

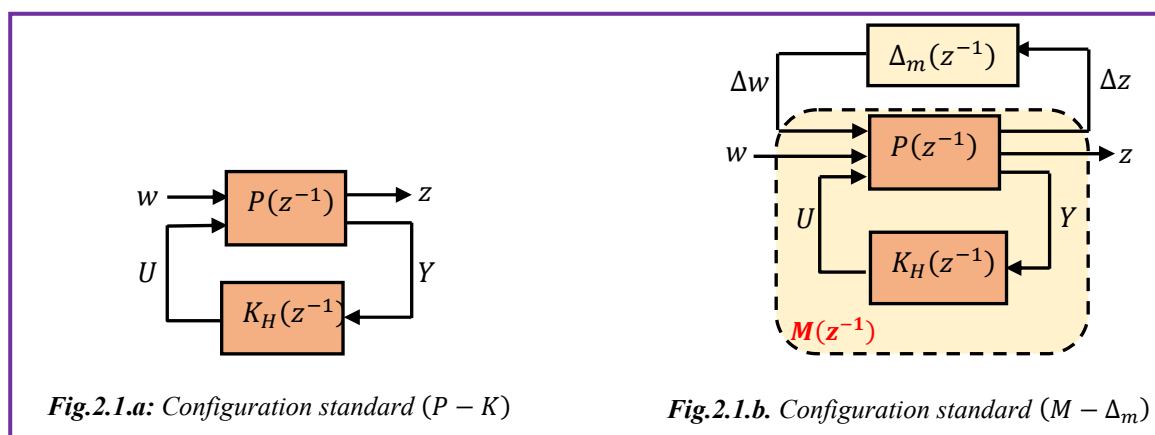
## **2.1. Introduction :**

La commande robuste des systèmes pluridimensionnels est un type de commande qui vise à garantir les performances et la stabilité des processus industriels en présence des perturbations du milieu ainsi que les incertitudes de modélisation qui affectent le modèle de synthèse. Dans la plupart des applications industrielles, il existe un écart entre le comportement observé du système réel et son modèle de synthèse [SS88]. Par conséquent, le contrôleur robuste obtenu doit assurer une Stabilité Robuste RS du système bouclé ainsi que des Performances Nominale NP de celui-ci [ZG81]. Ceci non seulement pour le régime de fonctionnement nominal mais aussi pour tous les régimes possibles de perturbation commise pendant la phase de modélisation. En effet, plusieurs méthodes efficaces ont été proposées pour assurer les deux robustesses précédentes en présence des incertitudes de modélisation, des bruits de mesure et finalement en présence des dynamiques négligées en hautes fréquences [OM04]. Parmi les méthodes de synthèse les plus efficaces, la méthode  $H_\infty$  est la plus utilisée. Elle permet d'assurer les meilleures marges de RS et de NP [NS11, MM09]. C'est une méthode d'optimisation qui prend en compte une définition mathématique des contraintes en ce qui concerne le comportement attendu en boucle fermée [ZG81, LL03]. Un avantage considérable que possède par la commande  $H_\infty$  est sa capacité d'introduire, dans un même effort de synthétisation, les concepts liés à la commande classique et à la commande robuste [MD90]. Le mot « optimal » est fréquemment utilisé dans son sens strictement mathématique, car la commande synthétisée est celle qui minimise l'effet des entrées/sorties

exogènes du système, ce qui peut être vu comme "non optimal" par les opérateurs (l'optimisation étant relative à l'objectif recherché). De plus, le mot « infini » dans le symbole  $H_\infty$  signifie que ce type de commande est conçu pour imposer des restrictions de type min-max au sens de la théorie de la décision (minimiser la perte maximum possible) dans le domaine fréquentiel [KA06]. Finalement, La norme  $H_\infty$  d'un système dynamique est l'amplification maximale que le système peut exercer sur l'énergie du signal d'entrée. Dans le cas d'un système Multi-Input, Multi-Output MIMO, ceci équivaut à la valeur singulière maximale du système ce qui, dans le cas mono variable SISO (Single Input Single Output), se traduit par la valeur maximale de l'amplitude de sa réponse fréquentielle [GS09, GK88].

## 2.2. Représentations fréquentielles d'un système pluridimensionnel :

Dans le but de mettre en évidence la correction d'un système pluridimensionnel, à partir d'un modèle de synthèse qui modélise parfaitement la dynamique réelle du système à commander, la représentation unifiée conformément à la **Figure.2.1.a** à été utilisée dans l'étape de synthèse du contrôleur. En revanche, si ce dernier est entaché par des erreurs d'incertitudes de modélisation, dans ce cas, la représentation précédente doit être remplacée par celle donnée par la **Figure.2.1.b** [OH03, GP94], on aura :



**Figure.2.1 :** Configuration standards d'un système bouclé

A partir de cette figure, les nomenclatures suivantes seront utilisées dans la suite de ce travail, avec :

- $P(z^{-1})$ : est une matrice de transfert décrivant le modèle généralisé (système augmenté).
- $K_H(z^{-1})$ : est une matrice de transfert décrivant le contrôleur robuste à synthétiser par la méthode  $H_\infty$ .
- $\Delta_m(z^{-1})$ : est une matrice de transfert stable décrivant les incertitudes de modélisation.



- $w$  : est un vecteur qui représente les différentes entrées exogènes à savoir: les trajectoires de référence, les perturbations, les bruits de mesures, ..., etc.
- $z$  : est un vecteur qui représente les différentes sorties exogènes telles que: les erreurs modérées de poursuite, les commandes modérées, ..., etc.

Où la réponse fréquentielle notée  $G_d(e^{j\omega})$  pour  $\omega \in \mathbb{R}^{*+}$  est une matrice complexe et le gain de cette réponse dépendra de la fréquence d'étude mais aussi de la direction du vecteur d'excitation. Il est donc intéressant d'étudier certaines propriétés de la matrice de gain pour chaque fréquence.

### 2.2.1. Représentation par les lieux des valeurs singulières :

Lors de la synthèse d'un contrôleur robuste, les valeurs singulières sont le plus souvent, utilisées pour quantifier les énergies des signaux agissant sur un système pluridimensionnel. Elles mesurent les gains principaux d'une matrice de transfert en fonction de l'évolution de la pulsation  $\omega$  dans le plan fréquentiel. Ces gains peuvent être définis comme suit [KV80, OH03, GP94]:

Soit  $G_d(z^{-1})$  une matrice de transfert modélisant le comportement réel d'un système physique pluridimensionnel. Les gains principaux maximaux et minimaux de celle-ci sont respectivement donnés par:

$$\forall \omega > 0, \bar{\sigma}[G_d(e^{-j\omega})] =: \max_i \{ \sigma_i [G_d(e^{-j\omega})] \} \quad (2.1)$$

$$\forall \omega > 0, \underline{\sigma}[G_d(e^{-j\omega})] =: \min_i \{ \sigma_i [G_d(e^{-j\omega})] \} \quad (2.2)$$

Sachant que l'opérateur  $z^{-1}$  est défini par  $z^{-1} = e^{-j\omega}$ . De plus, ces deux dernières relations sont encore équivalentes à :

$$\bar{\sigma}[G_d(e^{-j\omega})] \triangleq \max_{\|x\|=1} \|G_d \cdot x\| = \sqrt{\lambda_{\hbar_{max}}(G_d^* \cdot G_d)} \quad (2.3)$$

$$\underline{\sigma}[G_d(e^{-j\omega})] \triangleq \min_{\|x\|=1} \|G_d \cdot x\| = \sqrt{\lambda_{\hbar_{min}}(G_d^* \cdot G_d)} \quad (2.4)$$

De l'équation (2.4), le terme  $\|X\|$  représente la norme euclidienne de la matrice  $X$  sachant que  $X^*$  représente la matrice conjuguée de celui-ci et que  $\lambda_{\hbar}(X)$  sont ses valeurs propres.

### 2.2.2. Décomposition en valeurs singulières SVD :

Les valeurs singulières de la matrice  $G_d \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , notées ici par  $\sigma_i(G_d)$ , sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice  $G_d^* \cdot G_d$  si  $m > n$ , sinon de  $G_d \cdot G_d^*$  :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_{\hbar_i}(G_d^* \cdot G_d)} = \sqrt{\lambda_{\hbar_i}(G_d \cdot G_d^*)} \quad (2.5)$$

La décomposition de  $G_d$  en valeurs singulières s'écrit [DL94]:

$$G_d = \mathcal{V} \cdot \Sigma \cdot \mathcal{W}^*, \quad (2.6)$$

sachant que les colonnes de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  sont respectivement les vecteurs propres de  $G_d \cdot G_d^*$  et  $G_d^* \cdot G_d$ . De plus,  $\mathcal{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\mathcal{W} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  sont deux matrices unitaires telles que:  $\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}^* = I_{n \times n}$  et  $\mathcal{W} \cdot \mathcal{W}^* = I_{m \times m}$  et  $\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $\Sigma = \text{diag} \{ \sigma_1, \dots, \sigma_m \}$ , pour  $m = n$ . Ainsi pour le cas  $m \neq n$ ,  $\Sigma$  est complétée par des zéros. Les plus grande et plus petite valeurs singulières sont notées  $\bar{\sigma}(G_d)$  et  $\underline{\sigma}(G_d)$  respectivement.

### 2.2.3. Norme d'une matrice de transfert :

Dans la commande robuste des systèmes linéaires invariants dans le temps, on s'intéressera aux deux normes suivantes sur la relation entrée/sortie [KV80, PD00] :

#### 2.2.3.1. Norme $\mathcal{H}_2$ :

La norme  $\mathcal{H}_2$  d'une matrice de transfert représente l'énergie en sortie lorsqu'on injecte un bruit blanc vérifiant la relation  $u(e^{-j\omega}) \cdot u^*(e^{-j\omega}) = I$ , d'où :

$$\|G_d(e^{-j\omega})\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[G_d^*(e^{-j\omega})G_d(e^{-j\omega})] d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

L'équation (2.8) est encore équivalente à celle donnée par :

$$\|G_d(e^{-j\omega})\|_2 = \text{Sup}_{U(z^{-1}) \in H_\infty} \left( \frac{\|Y(z^{-1})\|_2}{\|U(z^{-1})\|_\infty} \right) \quad (2.8)$$

#### 2.2.3.2. La norme $H_\infty$ :

C'est la norme induite par la norme des fonctions  $H_2$ . De plus, cette norme mesure le gain maximal (pic de résonance) de la réponse fréquentielle de  $G_d(e^{-j\omega})$ , on obtient donc :

$$\|G_d(e^{-j\omega})\|_{\infty} = \max_{\omega} \bar{\sigma}[G_d(e^{-j\omega})] \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) est encore équivalente à celle donnée par :

$$\|G_d(e^{-j\omega})\|_{\infty} = \text{Sup}_{U(z^{-1}) \in \mathcal{H}_2} \left( \frac{\|Y(z^{-1})\|_2}{\|U(z^{-1})\|_2} \right) \quad (2.10)$$

### 2.3. Modélisation des incertitudes :

Dans la pratique, les systèmes ne sont pas isolés et subissent leur environnement. De plus, un modèle ne décrit jamais complètement et parfaitement le comportement d'un système.

La représentation des incertitudes de modélisation pour un processus pluridimensionnel reflète notre connaissance des phénomènes physiques qui les causent et notre capacité à les représenter sous forme simple et facile à manipuler.

Dans le cadre de la commande robuste, il est nécessaire de préciser l'ensemble des modèles possibles représentant la dynamique réelle du système physique à commander. Un tel ensemble est défini par un modèle nominal et un domaine d'incertitude. Ces incertitudes peuvent décrire les incohérences entre le modèle de synthèse et le régime réel. Il y a trois raisons pour leur existence [MJ06]:

- Une connaissance incomplète de la dynamique réelle à modéliser.
- Le système original est parfaitement connu mais le modèle est réduit pour simplifier les calculs ou pour contourner les difficultés imposées par la complexité du modèle complet.
- Les incertitudes sont causées par une structure inadéquate du modèle, par exemple la représentation d'un modèle non linéaire par un modèle type.

Dans le cas général, on peut envisager deux types d'incertitude qui sont, incertitudes non structurées et Incertitudes structurées (paramétrique).

#### 2.3.1. Incertitudes non structurées :

De nombreuses perturbations se produisant dans différentes parties d'un système, peuvent cependant être groupées dans un seul bloc de perturbation  $\Delta_m$ . Cette représentation d'incertitude est appelée incertitude « non structurée ». Dans le cas de systèmes linéaires invariant dans le temps, le bloc  $\Delta_m$  peut être représenté par une matrice de fonction de transfert inconnue. L'incertitude de dynamique non structurée dans un système de contrôle peut être décrite de différentes façons, telle que listée dans la suite, où  $G_p(z^{-1})$  désigne la

dynamique de système perturbée réelle et  $G_d(z^{-1})$  une description nominale du modèle du système physique [WS01].

Dans la théorie de la commande robuste, les incertitudes de modélisation non structurées sont souvent représentées de deux façons : additive ou multiplicative (à l'entrée ou à la sortie) selon la dynamique du système.

### 2.3.1.1. Incertitudes additives :

Elles représentent, en général, l'erreur absolue entre le système réel et le modèle nominal  $G_d(z^{-1})$ . Ce type d'incertitudes est souvent utilisé afin de modéliser les dynamiques de non linéarités négligées ou des dynamiques mal connues [WS01, KA06]. Elles peuvent être introduites sous forme additives directes ou additives inversées. En effet, la matrice de transfert du régime perturbé  $G_p(z^{-1})$  est définie, pour chaque configuration, comme suit :

#### Incertitudes additives directes :

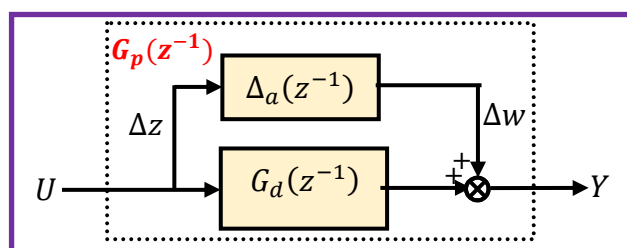


Figure.2.2 : Incertitudes additives directes

où,  $\Delta_a(z^{-1})$  est une perturbation additive. D'où le système perturbé qui est obtenu par :

$$G_p(z^{-1}) = G_d(z^{-1}) + \Delta_a(z^{-1}) \quad (2.11)$$

#### Incertitudes additives inversées :

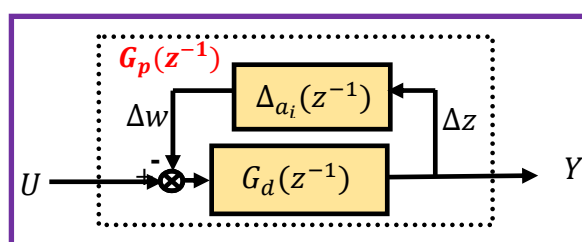


Figure.2.3 : Incertitudes additives inversées

où,  $\Delta_{a_i}(z^{-1})$  perturbation additive inversée. Le système perturbé est obtenu comme suit :

$$G_p(z^{-1}) = [G_d^{-1}(z^{-1}) + \Delta_{a_i}(z^{-1})]^{-1} \quad (2.12)$$

### 2.3.1.2. Incertitudes multiplicatives :

Ces incertitudes permettent de définir les écarts, en termes de variation, par rapport au modèle nominal. Elles peuvent être introduites sous forme multiplicative en entrée directe, ou multiplicative en entrée inverse, multiplicative en sortie directe, ou multiplicative en sortie inverse. Dans la pratique, les incertitudes multiplicatives en entrée (directe ou inverse) sont souvent utilisées pour prendre en compte les erreurs de modélisation (i.e., des actionneurs ou des convertisseurs alimentant une machine tournante). Par contre, les incertitudes multiplicatives en sortie (directe ou inverse) modélisent généralement les défauts des capteurs de mesure [WW91, KA06]. En effet, le régime perturbé  $G_p(z^{-1})$  décrivant le modèle incertain est celui donné, pour chaque configuration, comme suit :

#### Incertitudes multiplicatives en sortie directe :

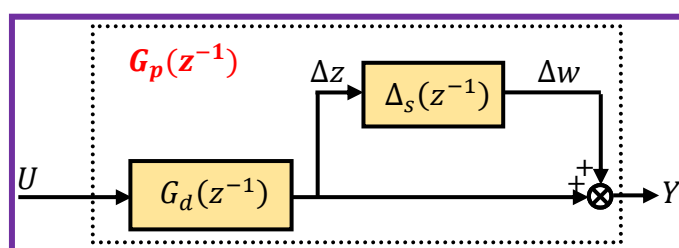


Figure.2.4 : Incertitudes multiplicatives en sortie directe

A partir de ce schéma bloc, on peut tirer les formules des modèles perturbés et de la perturbation multiplicative directe à la sortie  $\Delta_s(z^{-1})$  :

$$G_p(z^{-1}) = [I + \Delta_s(z^{-1})] \cdot G_d(z^{-1}) \quad (2.13)$$

#### Incertitudes multiplicatives en sortie inverse :

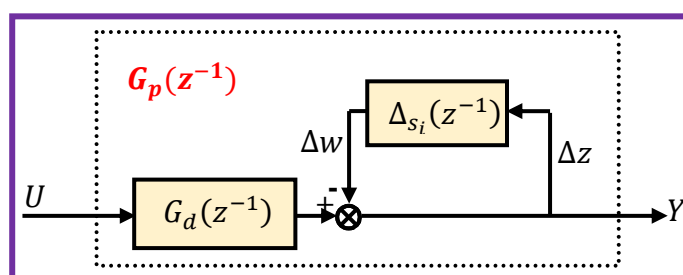


Figure.2.5 : Incertitudes multiplicatives en sortie inverse

D'après la Figure.2.5, le modèle perturbé est donné par la relation suivante :

$$G_p(z^{-1}) = [I + \Delta_{s_i}(z^{-1})]^{-1} \cdot G_d(z^{-1}) \quad (2.14)$$

où,  $\Delta_{s_i}(z^{-1})$  est l'incertitude multiplicative inverse à la sortie.

**Incertitudes multiplicative en entrée directe :**

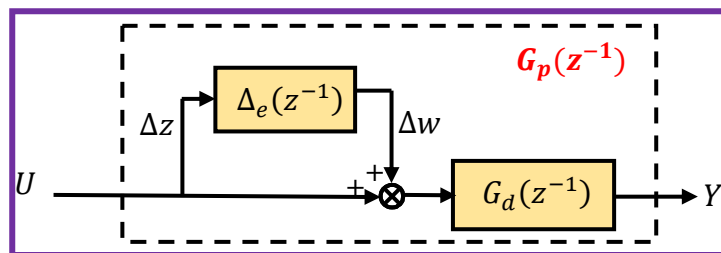


Figure.2.6 : Incertitudes multiplicatives en entrée directe

où,  $\Delta_e(z^{-1})$  représente la perturbation multiplicative directe à l'entrée, sachant que :

$$G_p(z^{-1}) = G_d(z^{-1}) \cdot [I + \Delta_e(z^{-1})] \tag{2.15}$$

**Incertitudes multiplicative en entrée inverse :**

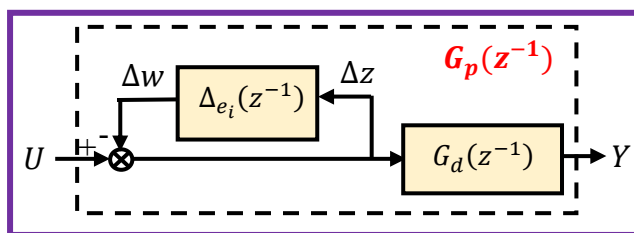


Figure.2.7 : Incertitudes multiplicatives en entrée inverse

D'après la Figure.2.7, le système perturbé est définie par :

$$G_p(z^{-1}) = G_d(z^{-1}) \cdot [I + \Delta_{e_i}(z^{-1})]^{-1} \tag{2.16}$$

où,  $\Delta_{e_i}(z^{-1})$  représente la perturbation multiplicative inverse à l'entrée.

**2.3.1.3. Incertitudes sur la factorisation co-première gauche du modèle nominal :**

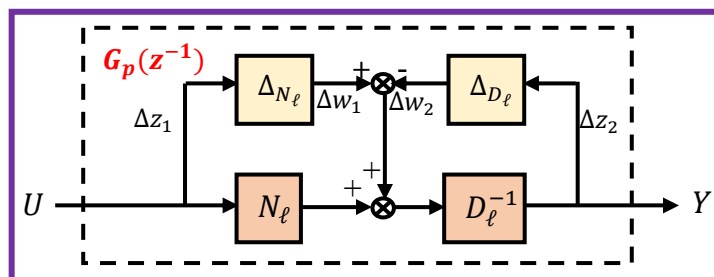


Figure.2.8 : Incertitudes sur les facteurs co-premiers gauches

D'après la Figure.2.8, le système perturbé est donné par [DM07]. :

$$G_p = (D_\ell + \Delta_{D_\ell})^{-1} (N_\ell + \Delta_{N_\ell}) \tag{2.17}$$

où  $\Delta_{D_\ell}$  et  $\Delta_{N_\ell}$ , sont des incertitudes non structurées sur les facteurs premiers à gauche  $D_\ell$  et  $N_\ell$  respectivement .

**2.3.1.4. Incertitudes sur la factorisation co-première droite du modèle nominal:**

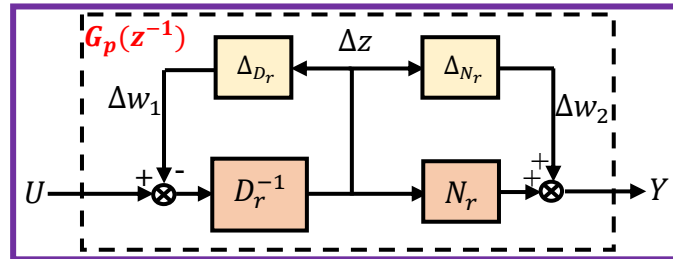


Figure.2.9 : Incertitudes sur les facteurs co-premiers droits

$$G_p = (N_r + \Delta_{N_r})(D_r + \Delta_{D_r})^{-1} \tag{2.18}$$

sachant que,  $\Delta_{D_r}$  et  $\Delta_{N_r}$ , sont des incertitudes non structurées sur les facteurs premiers à droite  $D_r$  et  $N_r$  respectivement [DM07].

**2.3.2. Incertitudes structurées :**

Les représentations d'incertitude non structurées discutés précédemment sont utiles pour décrire des dynamiques de système non modélisées ou négligées. Ces incertitudes complexes se produisent généralement dans la gamme des hautes fréquences et peuvent inclure des retards non modélisés, parasite de couplage, hystérésis et autres non-linéarités. Cependant, les dynamiques de perturbation dans de nombreux systèmes de contrôle industriels peuvent également être causées par une description inexacte des caractéristiques des composants, des effets déchirés et usés sur les composants de l'installation ou le déplacement des points de fonctionnement, etc. Ces perturbations peuvent être représentées par des variations de certains paramètres du système sur certaines gammes de valeurs possibles (complexes ou réelles). Ils affectent la performance de la gamme des basses fréquences et sont appelés incertitudes paramétriques ou structurées.

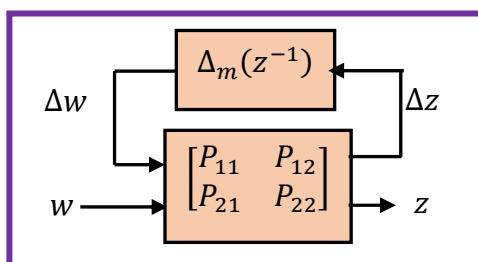
**2.4. Transformations fractionnaires linéaires LFT :**

Dans la théorie de la commande robuste, deux transformations linéaires fractionnaires seront utilisées pour la modélisation et la commande du système pluridimensionnel incertain.

Ces deux transformations sont *LFT* supérieure et *LFT* inférieure. Pour plus de détails, voir l'annexe B.

### 2.4.1. LFT supérieure d'un système bouclé:

Dans le cadre de la modélisation des systèmes incertains, le système d'interconnexion de la matrice complexe de transfert  $P(z^{-1})$  à celle des incertitudes  $\Delta_m(z^{-1})$  permet de définir le transfert en boucle fermée  $T_{w \rightarrow z}(z^{-1})$ . Ceci est effectué par l'utilisation d'une transformation dite *LFT* supérieure  $F_u(P, \Delta_m)$ , on obtient la figure suivante [ZK96, MJ89] :



**Figure.2.10** : Configuration standard de *LFT* supérieures

où,  $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$  représente la matrice de transfert d'interconnexion et d'après la **Figure.2.10**, on peut déduire que :

$$z = (P_{22} + P_{21}\Delta_m(I - P_{11}\Delta_m)^{-1}P_{12}) \cdot w, \quad (2.19)$$

A partir de l'équation (2.19), si  $(I - P_{11}\Delta_m)$  est inversible, on peut donc définir l'expression suivante :

$$F_u(P, \Delta_m) = P_{22} + P_{21}\Delta_m(I - P_{11}\Delta_m)^{-1}P_{12} \quad (2.20)$$

$F_u(P, \Delta_m)$  représente la transformation linéaire fractionnaire supérieure de  $P$  et  $\Delta_m$ .

Avec l'introduction de transformations fractionnaires linéaires supérieures, les représentations d'incertitude non structurées discutées précédemment, peuvent être décrites uniformément par la **Figure.2.10**. En résumé, le système perturbé de chaque type d'incertitudes est donc définie par :

$$G_p(z^{-1}) = F_u(P(z^{-1}), \Delta_m(z^{-1})) \quad (2.21)$$

où la matrice  $P$  de chaque type d'incertitude est définie, comme suit :

✓ Perturbation additive:  $P = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G_d \end{bmatrix}$



- ✓ Perturbation additive inverse:  $P = \begin{bmatrix} -G_d & G_d \\ -G_d & G_d \end{bmatrix}$ .
- ✓ Perturbation multiplicative en entrée:  $P = \begin{bmatrix} 0 & I \\ G_d & G_d \end{bmatrix}$
- ✓ Perturbation multiplicative en sortie :  $P = \begin{bmatrix} 0 & G_d \\ I & G_d \end{bmatrix}$
- ✓ Perturbation multiplicative inverse en entrée:  $P = \begin{bmatrix} -I & I \\ -G_d & G_d \end{bmatrix}$
- ✓ Perturbation multiplicative inverse en sortie:  $P = \begin{bmatrix} -I & G_d \\ -I & G_d \end{bmatrix}$
- ✓ Perturbations sur les facteurs co-premiers gauches :  $P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D_\ell^{-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I \\ G_d \end{bmatrix} \\ D_\ell^{-1} & G_d \end{bmatrix}$
- ✓ Perturbations sur les facteurs co-premiers droits :  $P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -D_r^{-1} & 0 \\ -G_d & I \end{bmatrix} & D_r^{-1} \\ & G_d \end{bmatrix}$

#### 2.4.2. LFT inférieure d'un système bouclé:

Dans le cadre de la synthèse du contrôleur robuste, le système d'interconnexion de la matrice augmentée  $P(z^{-1})$  à celle du contrôleur  $K_H(z^{-1})$  permet de définir le transfert en boucle fermée  $T_{w \rightarrow z}(z^{-1})$ . Ceci est effectué à l'aide d'une transformation dite *LFT* inférieure  $F_\ell(P, K_H)$ . On obtient la figure suivante [ZK96, MJ89]:

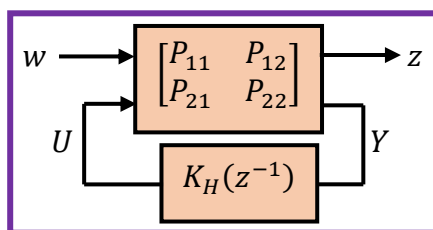


Figure.2.11 : Configuration standard de LFT inférieures

D'après la **Figure.2.11**, la transformation fractionnaire linéaire inférieure  $F_\ell(P, K_H)$  est définie par :

$$F_\ell(P, K_H) = P_{11} + P_{12}K_H(I - P_{22}K_H)^{-1}P_{21} \quad (2.22)$$

D'où, le transfert d'entrées-sorties exogènes est:  $T_{w \rightarrow z}(z^{-1}) = M(z^{-1}) = F_\ell(P, K_H)$ .

#### 2.5. Stabilité du système bouclé par un contrôleur $H_\infty$ :

##### 2.5.1. Stabilité nominale :

La stabilité nominale d'un système monovarié est assurée si tous les pôles du transfert en boucle fermée sont situés dans le demi-plan complexe gauche. Il faut noter ici que lors de

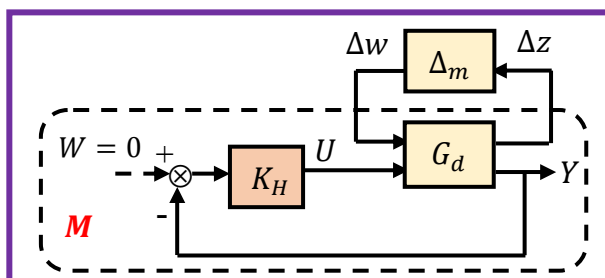
la conception du contrôleur, la simplification de pôles/zéros instables entre  $G_d$  et  $K_H$  peut faire apparaître une instabilité. Cette simplification disparaissait lors de l'implémentation du contrôleur sur le système physique réel.

**2.5.2. Stabilité interne:**

Un système est en stabilité interne si, en lui appliquant en tout endroit des signaux d'entrées bornées, on obtient en tout endroit des signaux de sorties bornées. Nous verrons dans la suite de ce travail que ce type de stabilité dépend de la stabilité de quatre matrices de sensibilité dont ses transferts seront détaillés dans la suite de ce travail.

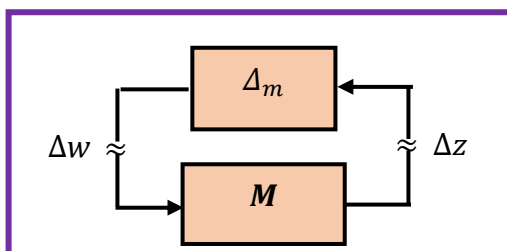
**2.5.3. Stabilité robuste :**

Ce type de stabilité doit être examiné dans le cas d'un système bouclé soumis à des incertitudes de modélisation. A cet effet, étant donné le système bouclé donné par la **Figure.2.12** où  $G_d$  est le modèle de fonctionnement nominal,  $K_H$  est le contrôleur stabilisant la boucle et  $\Delta_m$  qui représente le transfert modélisant l'incertitude non structurée parmi celles qui ont été citées précédemment [MJ89, BT93], on obtient :



*Figure.2.12 : Structure d'un système bouclé pour l'analyse de la robustesse de stabilité*

avec  $W$  est l'entrée de référence que l'on suppose ici nulle. Pour l'analyse de la robustesse de stabilité, la structure donnée par la **Figure.2.12** peut être reconfigurée sous la forme générale ( $M - \Delta_m$ ) ci-dessous:



*Figure.2.13 : Structure générale d'étude de la robustesse de stabilité*

où  $M(z^{-1})$  est le transfert qui apparaît lorsqu'on isole dans le bloc  $\Delta_m(z^{-1})$  toutes les incertitudes de modèle citées dans la **section §2.3**.

A partir de la **Figure.2.13**, il peut être intéressant d'étudier la robustesse de stabilité d'un tel système bouclé soumis à des incertitudes de modélisation non structurées (le cas des incertitudes structurées sera reporté à d'autres études ultérieures). Pour cela, on fait un appel au théorème du faible gain, ou en anglais « *Small gain theorem* ».

### 2.5.3.1. Théorème à petit gain :

Sous l'hypothèse de la stabilité de  $\|\Delta_m\|_\infty \leq 1$ , et le transfert  $M$  du système entre l'entrée et la sortie de la perturbation supposée stable également, le système de la **Figure.2.13** est stable pour toute  $\Delta_m$  [MJ89, BT93] si :

$$\|M(e^{-j\omega}) \cdot \Delta_m(e^{-j\omega})\|_\infty \leq 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \bar{\sigma}(M(e^{-j\omega})) \cdot \bar{\sigma}(\Delta_m(e^{-j\omega})) < 1 \quad (2.23)$$

Le système bouclé, cité ci-dessus, assure la stabilité robuste si la condition suivante est vérifiée :

$$\|M(e^{-j\omega})\|_\infty \cdot \|\Delta_m(e^{-j\omega})\|_\infty \leq 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}^+ \quad (2.24)$$

### 2.5.3.2. Condition de robustesse sur la stabilité robuste :

D'après les équations (2.10) et (2.13), le système bouclé, donné par la **Figure.2.12** en présence des diverses formes d'incertitudes détaillées dans la section §2.3, donne les conditions de robustesse de stabilité comme suit :

✓ Incertitudes additives directes:

$$M(z^{-1}) = -K_H(I_{n \times n} + G_d K_H)^{-1} = -K_H S_{y_H} \quad (2.25)$$

$$\|K_H S_{y_H}\|_\infty < 1 / \|\Delta_a\|_\infty \quad (2.26)$$

✓ Incertitudes additives inverses:

$$\|S_{y_H} \cdot G_d\|_\infty < 1 / \|\Delta_{a_i}\|_\infty \quad (2.27)$$

✓ Incertitudes multiplicatives en sortie:

$$M(z^{-1}) = -G_d K_H (I_{n \times n} + G_d K_H)^{-1} = -T_{y_H} \quad (2.28)$$

$$\|T_{y_H}\|_\infty < 1 / \|\Delta_s\|_\infty \quad (2.29)$$

✓ Incertitudes multiplicatives en entrée:

$$M(Z^{-1}) = -K_H G_d (I_{m \times m} + K_H G_d)^{-1} = -T_{u_H} \quad (2.30)$$

$$\|T_{u_H}\|_{\infty} < 1 / \|\Delta_e\|_{\infty} \quad (2.31)$$

✓ Incertitudes multiplicatives inverses en entrée:

$$\|S_{u_H}\|_{\infty} < 1 / \|\Delta_{e_i}\|_{\infty} \quad (2.32)$$

✓ Incertitudes multiplicatives inverses en sortie:

$$\|S_{y_H}\|_{\infty} < 1 / \|\Delta_{s_i}\|_{\infty} \quad (2.33)$$

✓ Incertitudes sur les facteurs co-premiers gauches :

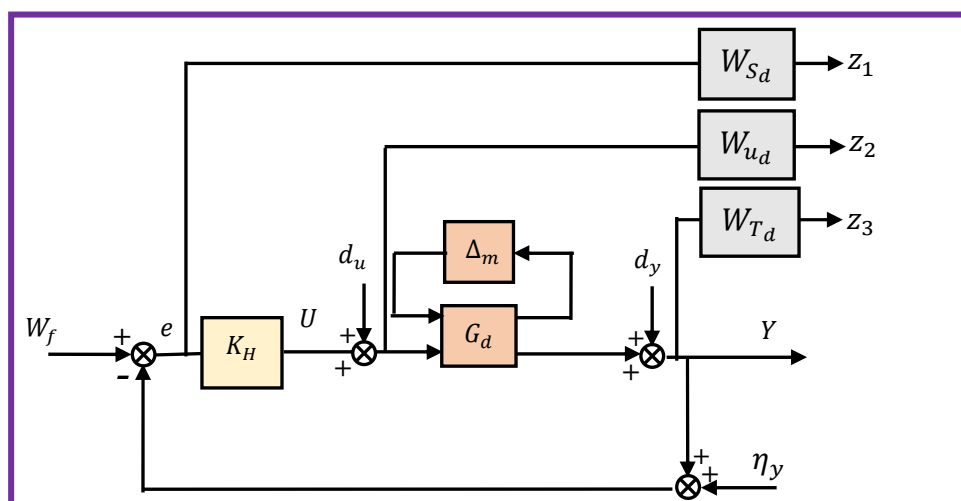
$$\left\| \begin{bmatrix} S_{y_H} D_{\ell}^{-1} \\ K_H S_{y_H} D_{\ell}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 / \|\Delta_{D_{\ell}} \quad \Delta_{N_{\ell}}\|_{\infty} \quad (2.34)$$

✓ Incertitudes sur les facteurs co-premiers droits :

$$\|D_r^{-1} S_u \quad D_r^{-1} S_{u_H} K_H\|_{\infty} < 1 / \left\| \begin{bmatrix} \Delta_{D_r} \\ \Delta_{N_r} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (2.35)$$

#### 2.5.4. Analyse de robustesse en présence de diverses entrées exogènes

L'analyse de robustesse, fondée sur la stabilité robuste ainsi que les performances nominales, présente le sujet de nombreuses méthodes de synthèse des contrôleurs robustes et stables. Ces derniers doivent stabiliser, de manière robuste, non seulement le système nominal mais aussi le cas de présence des entrées exogènes, en l'occurrence, les incertitudes de modélisation, les bruits de mesure, la dynamique négligée en hautes fréquences, ..., etc. A cet effet, des conditions de robustesse peuvent être introduites afin de satisfaire les spécifications fréquentielles imposées par un cahier de charges. Pour la formulation du problème de la synthèse d'un contrôleur robuste, on considère la configuration standard donnée par la **Figure.2.14** [ZK96, TM14] :



**Figure.2.14 :** Configuration standard d'un système bouclé

Les notations suivantes seront utilisées dans la suite, avec :

- $d_u$ : représente le vecteur des perturbations à l'entrée du système.
- $d_y$ : représente le vecteur des perturbations à la sortie du système.
- $e$ : représente le vecteur des erreurs de poursuite entre les sorties mesurées et les références.
- $\eta_y$ : représente le vecteur des bruits de mesure.
- $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ : représentent, respectivement, les signaux modérés (filtrés) des erreurs de poursuite, des commandes et les sorties mesurées.

A partir de la configuration standard ci-dessus, les sorties exogènes sont définies par :

$$\begin{cases} z_1 = W_{S_d} \cdot e \\ z_2 = W_{u_d} \cdot u \\ z_3 = W_{T_d} \cdot y \end{cases} \quad (2.36)$$

où  $W_{S_d}(z^{-1})$ ,  $W_{u_d}(z^{-1})$  et  $W_{T_d}(z^{-1})$  représentent des pondérations discrètes fournies par la discrétisation des transferts continus  $W_S(s)$ ,  $W_u(s)$  et  $W_T(s)$  respectivement. L'inverse des pondérations discrètes citées ci-haut a pour but de limiter l'évolution des valeurs singulières maximales des trois sensibilités  $S_{y_H}$ ,  $K_H S_{y_H}$  et  $T_{y_H}$  respectivement.

Par conséquent, les spécifications sur les performances nominales du système bouclé peuvent être modélisées par la pondération  $W_S(j\omega)$ . Les valeurs singulières maximales de l'inverse de cette matrice doivent limiter l'évolution de  $S_{y_H}(e^{-j\omega})$  dans la plage des fréquences  $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$ . Elle est choisie comme suit [ZK96] :

$$W_S(j\omega) = \begin{pmatrix} W_{S_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{S_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{S_{p \times p}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } W_{S_{ii}}(j\omega) = \frac{j\omega / M_{S_{ii}} + \omega_{B_{ii}}}{j\omega + \omega_{B_{ii}} \cdot \varepsilon_{S_{ii}}} \quad (2.37)$$

où,  $M_{S_{ii}}$ ,  $\omega_{B_{ii}}$  et  $\varepsilon_{S_{ii}}$  sont des paramètres choisis par l'utilisateur afin de déterminer l'élément diagonal  $W_{S_{ii}}(j\omega)$ , sachant que son inverse permet de limiter le transfert  $(S_{y_H}(j\omega))_{ii}$ . De plus, les spécifications sur les énergies de commande du système bouclé peuvent être modélisées par la pondération  $W_u(j\omega)$  qui est, souvent, choisie par:

$$W_u(j\omega) = \begin{pmatrix} W_{u_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{u_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{u_{q \times q}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } W_{u_{ii}}(j\omega) = \frac{j\omega + \omega_{BC_{ii}} / M_{u_{ii}}}{\varepsilon_{BC_{ii}} \cdot j\omega + \omega_{BC_{ii}}} \quad (2.38)$$

où,  $M_{u_{ii}}$ ,  $\omega_{BC_{ii}}$  et  $\varepsilon_{BC_{ii}}$  sont préalablement choisis pour limiter  $(K_H S_{y_H}(j\omega))_{ii}$  dans la plage des fréquences  $[\omega_{min} \ \omega_{max}]$ . Finalement, les spécifications sur la stabilité robuste du système bouclé, en présence des incertitudes multiplicatives en sortie, sont représentées par la pondération  $W_T$ . Cette dernière est souvent choisie comme suit [ZK96]:

$$W_T(j\omega) = \begin{pmatrix} W_{T_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{T_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{T_{p \times p}} \end{pmatrix}, \text{ avec : } W_{T_{ii}}(j\omega) = \frac{j\omega + \omega_{BT_{ii}} / M_{T_{ii}}}{\varepsilon_{T_{ii}} \cdot j\omega + \omega_{BT_{ii}}} \quad (2.39)$$

où  $M_{T_{ii}}$ ,  $\omega_{BT_{ii}}$  et  $\varepsilon_{T_{ii}}$  sont des paramètres choisis par l'utilisateur afin de déterminer l'élément diagonal  $W_{T_{ii}}(j\omega)$ , sachant que son inverse permet de limiter le transfert  $(T_{y_H}(j\omega))_{ii}$ .

Pendant la synthèse du contrôleur robuste, les spécifications fréquentielles (à satisfaire) sont résumées comme suit:

- ❖ **Spécification 1 :** Une bonne dynamique de poursuite des signaux de référence implique que  $\sigma_{max}[S_{y_H}(e^{-j\omega})]$  doit être faible.
- ❖ **Spécification 2 :** Une bonne atténuation de l'effet des bruits de mesure implique que  $\sigma_{max}[T_{y_H}(e^{-j\omega})]$  doit être faible.

- ❖ **Spécification 3 :** Une bonne réjection des perturbations en entrée du modèle implique que  $\sigma_{\max}[G_d(e^{-j\omega}).S_{y_H}(e^{-j\omega})]$  doit être minimisée.
- ❖ **Spécification 4 :** Une bonne minimisation des énergies de commande implique que  $\sigma_{\max}[T_{u_H}(e^{-j\omega})]$  ou  $\sigma_{\max}[K_H(e^{-j\omega})S_{y_H}(e^{-j\omega})]$  doivent être faibles.
- ❖ **Spécification 5 :** Un compromis de robustesse entre les objectifs contradictoires *NP* et *RS* doit être assuré avec une marge élevée.

De plus, la norme  $H_\infty$  de chaque sensibilité parmi celles mentionnées précédemment, est définie comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_S = \|S_{y_H}\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{\max}[S_{y_H}(e^{-j\omega})]) \\ M_R = \|K_H S_{y_H}\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{\max}[K_H(e^{-j\omega})S_{y_H}(e^{-j\omega})]) \\ M_T = \|T_{y_H}\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{\max}[T_{y_H}(e^{-j\omega})]) \\ \tilde{M}_S = \|S_{u_H}\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{\max}[S_{u_H}(e^{-j\omega})]) \\ \tilde{M}_R = \|G_d S_{u_H}\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{\max}[G_d(e^{-j\omega}).S_{u_H}(e^{-j\omega})]) \\ \tilde{M}_T = \|T_{u_H}\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} (\sigma_{\max}[T_{u_H}(e^{-j\omega})]) \end{array} \right.$$

où  $M_S$ ,  $M_R$ ,  $M_T$ ,  $\tilde{M}_S$ ,  $\tilde{M}_R$  et  $\tilde{M}_T$  représentent la norme  $H_\infty$  des valeurs singulières des transferts  $S_{y_H}$ ,  $K_H S_{y_H}$ ,  $T_{y_H}$ ,  $S_{u_H}$ ,  $G_d S_{u_H}$  et  $T_{u_H}$ . De plus, si les valeurs de  $M_*$  et de  $\tilde{M}_*$  sont élevées, on obtient des marges de robustesse très faibles.

## 2.6. Problème $H_\infty$ standard

La synthèse du contrôleur  $H_\infty$  est basée sur la satisfaction de certaines spécifications fréquentielles parmi celles citées précédemment. Étant donné que le but de notre travail est d'assurer un bon compromis de robustesse entre les performances nominales et la stabilité robuste en présence des incertitudes multiplicatives non structurées amenées en sortie du modèle. Ce compromis de robustesse doit être assuré par des commandes réduites et cela en absence des signaux de perturbation  $d_u$  agissant sur les entrées du modèle de synthèse. A cet effet, le critère à minimiser peut contenir les sensibilités à savoir  $S_{y_H}$ ,  $K_H S_{y_H}$  et  $T_{y_H}$ . Il est formulé via l'application de *LFT* inférieure sur le système d'interconnexion représenté par la **Figure.2.15** suivante [ZK96, TM14]:

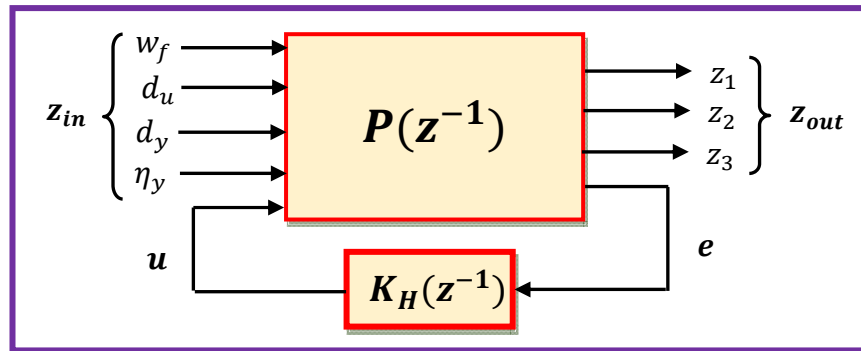


Figure.2.15 : Configuration  $(P - K_H)$  du système bouclé

où la représentation d'état du modèle augmenté généralisé  $P(z^{-1})$  peut être mise sous la forme suivante:

$$P = \begin{bmatrix} A_p & \vdots & [B_{p1} & B_{p2}] \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ [C_{p1}] & \vdots & [D_{p11} & D_{p12}] \\ [C_{p2}] & \vdots & [D_{p21} & D_{p22}] \end{bmatrix} \triangleq \begin{cases} x(k+1) = A_p \cdot x(k) + B_{p1} \cdot z_{in}(k) + B_{p2} \cdot u(k) \\ z_{out}(k) = C_{p1} \cdot x(k) + D_{p11} \cdot z_{in}(k) + D_{p12} \cdot u(k) \\ e(k) = C_{p2} \cdot x(k) + D_{p21} \cdot z_{in}(k) + D_{p22} \cdot u(k) \end{cases} \quad (2.40)$$

A partir de l'équation (2.40), la matrice de transfert  $P(z^{-1})$  peut être partitionnée suivant le formalisme ci-dessous:

$$\begin{bmatrix} z_{out}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} = P(z^{-1}) \begin{bmatrix} z_{in}(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(z^{-1}) & P_{12}(z^{-1}) \\ P_{21}(z^{-1}) & P_{22}(z^{-1}) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_{in}(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

En tenant compte du vecteur de commande  $u(k) = K_H(z^{-1}) \cdot e(k)$ . D'où, la synthèse du contrôleur robuste se ramène finalement à la résolution de l'un des deux problèmes: problème  $H_\infty$  optimal ou  $H_\infty$  sous-optimal.

### 2.6.1. Problème $H_\infty$ optimal :

La synthèse de la commande consiste à minimiser le critère de performance ci-dessous :

$$\min_{K_H(z^{-1})} \left\{ \sup_{w \neq 0} \frac{\|z_{out}\|_2}{\|z_{in}\|_2} \right\} = \min_{K_H(z^{-1})} \{ \|LFT(P, K_H)\|_\infty \} \quad (2.42)$$

La minimisation de  $\|LFT(P, K_H)\|_\infty$ , sur l'ensemble des contrôleurs  $K_H(z^{-1})$  stabilisant d'une manière interne le système bouclé, peut fournir un gain optimal d'atténuation noté  $\gamma_{opt}$  pour lequel toutes les spécifications, imposées par le cahier de charges, sont satisfaisantes [ZG81, SM08].



### 2.6.2. Problème $H_\infty$ sous optimal :

Dans ce cas, le problème de la commande est remplacé par la recherche de la solution de l'inégalité représentée par l'équation (2.43) [OM04]:

$$\|LFT_\ell(P, K_H)\|_\infty < \gamma, \quad (2.43)$$

où,  $\gamma \in \mathbb{R}^{*+}$  est le gain d'atténuation fixé *a priori* par l'utilisateur.

### 2.6.3. Critère de Sensibilité Mixte généralisée

Dans la suite de ce travail, le raisonnement adopté durant la synthèse du contrôleur robuste est basé sur la limitation des valeurs singulières maximales des sensibilités suivantes:  $\sigma_{\max}[S_{y_H}(e^{-j\omega})]$ ,  $\sigma_{\max}[K_H(e^{-j\omega})S_{y_H}(e^{-j\omega})]$  et  $\sigma_{\max}[T_{y_H}(e^{-j\omega})]$  respectivement. Cet objectif peut être réalisé par la satisfaction des contraintes suivantes [OM04, OH03]:

$$\begin{cases} \sigma_{\max}[S_{y_H}(e^{-j\omega})] \leq |\ell_s(e^{-j\omega})| \\ \sigma_{\max}[K_H(e^{-j\omega})S_{y_H}(e^{-j\omega})] \leq |\ell_u(e^{-j\omega})| \\ \sigma_{\max}[T_{y_H}(e^{-j\omega})] \leq |\ell_y(e^{-j\omega})| \end{cases} \quad (2.44)$$

où  $\ell_s$ ,  $\ell_u$  et  $\ell_T$  sont des fonctions scalaires spécifiant la forme (gabarit) désirée de  $\sigma_{\max}[S_{y_H}(e^{-j\omega})]$ ,  $\sigma_{\max}[K_H(e^{-j\omega})S_{y_H}(e^{-j\omega})]$  et  $\sigma_{\max}[T_{y_H}(e^{-j\omega})]$  respectivement. De plus, si l'on définit  $W_{S_d} = \ell_s^{-1}$ ,  $W_{u_d} = \ell_u^{-1}$  et  $W_{T_d} = \ell_T^{-1}$ , les équations données par (2.44) deviennent:

$$\|W_{S_d} \cdot S_{y_H}\|_\infty < 1 \quad (2.45)$$

$$\|W_{u_d} \cdot K_H S_{y_H}\|_\infty < 1 \quad (2.46)$$

$$\|W_{T_d} \cdot T_{y_H}\|_\infty < 1 \quad (2.47)$$

Notons ici que la détermination directe du contrôleur robuste  $K_H(z^{-1})$ , satisfaisant les inégalités (2.45), (2.46) et (2.47), représente un problème d'optimisation ouvert. Cependant, ces dernières peuvent être substituées sous forme d'un problème de  **$H_\infty$  sous-optimal**, dit problème « sensibilité mixte généralisée ». Ce dernier est donné comme suit [OH03] :

$$\left\| \begin{array}{c} W_{S_d} S_{y_H} \\ W_{u_d} K_H S_{y_H} \\ W_{T_d} T_{y_H} \end{array} \right\|_\infty \leq \gamma < 1 \quad (2.48)$$

sachant que  $\gamma_{min} \leq \gamma \leq \gamma_{max}$ , et 
$$\begin{cases} \gamma_{min} = \max \left( \|W_{S_d} \cdot S_{y_H}\|_{\infty}, \|W_{u_d} \cdot K_H S_{y_H}\|_{\infty}, \|W_{T_d} T_{y_H}\|_{\infty} \right) \\ \gamma_{max} = \sqrt{2} \max \left( \|W_{S_d} \cdot S_{y_H}\|_{\infty}, \|W_{u_d} \cdot K_H S_{y_H}\|_{\infty}, \|W_{T_d} T_{y_H}\|_{\infty} \right) \end{cases}$$

de plus, la détermination du contrôleur robuste  $K_H(z^{-1})$ , satisfaisant les inégalités (2.45), (2.46) et (2.47), peut être encore substituée sous forme d'un problème  $H_{\infty}$  optimal formulé comme suit :

$$\min_{K_H(z^{-1})} \{ \|LFT_{\ell}(P, K)\|_{\infty} \} = \min_{K_H(z^{-1})} \left\{ \max_{\omega \in \mathbb{R}^{*+}} \left( \bar{\sigma} \begin{bmatrix} W_{S_d} S_{y_H} \\ W_{u_d} K_H S_{y_H} \\ W_{T_d} T_{y_H} \end{bmatrix} \right) \right\} \quad (2.49)$$

A partir de l'équation (2.41), la matrice du modèle augmenté est obtenue comme suit:

$$P = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{S_d} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \vdots & \begin{bmatrix} -W_{S_d} & -W_{S_d} & G_d \\ W_{T_d} & 0 & W_{T_d} G_d \end{bmatrix} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ I & \vdots & \begin{bmatrix} -I & -I & -G_d \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

## 2.7. Résolution du problème $H_{\infty}$

### 2.7.1. Résolution utilisant les deux équations discrètes de Riccati

Considérons la représentation d'état généralisée donnée par l'équation (2.40) dans laquelle la matrice  $D_{p22}$  est supposée nulle. Cela veut dire qu'il n'existe pas une transmission directe des grandeurs d'entrées-sorties du système ce qui est le cas dans la plupart des applications industrielles. Lors de la synthèse du contrôleur robuste, la solution du problème  $H_{\infty}$  existe, si et seulement si, les hypothèses ci-dessous sont satisfaites [LL03, AP06]:

- **Hypothèse 1** : Le couple  $(A_p, B_{p2})$  est stabilisable ainsi que  $(C_{p2}, A_p)$  est détectable ;
- **Hypothèse 2** : Le rang de la matrice réelle  $D_{p12} = \begin{pmatrix} 0_{m_2 \times m_2} \\ I_{m_2 \times m_2} \end{pmatrix}$  est égal à  $m_2$  ainsi que la matrice réelle  $D_{p21} = [0_{\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2} \quad I_{\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2}]$  égal à  $\mathcal{P}_2$  ;
- **Hypothèse 3** : Pour la plage des fréquences  $\omega \in [0 \frac{2\pi}{T_e}]$ , le rang de la matrice polynomiale  $\begin{pmatrix} A_p - e^{j\omega} I_n & B_{p2} \\ C_{p1} & D_{p12} \end{pmatrix}$  est égal à  $n + m_2$ . Autrement dit, le rang de cette matrice doit être plein;

- **Hypothèse 4 :** Pour la plage des fréquences  $\omega \in \left[0 \frac{2\pi}{T_e}\right]$ , le rang de la matrice polynomiale  $\begin{pmatrix} A_p - e^{j\omega} I_n & B_{p1} \\ C_{p2} & D_{p21} \end{pmatrix}$  est égal à  $n + p_2$ . Autrement dit, le rang de cette matrice doit être complet;

Maintenant, une fois les quatre hypothèses précédentes étant toutes vérifiées, on assume la supposition des matrices ci-dessous :

$$\begin{cases} \mathcal{J} = \begin{bmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_{m_1} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_{m_2} \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_{p_1} \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (2.51)$$

et

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} C_{p1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} D_{p11} & D_{p12} \\ I_{m_1} & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.52)$$

Dans ce cas, la première équation de *Riccati* discrète est définie comme suit [GD14]:

$$X_\infty = \bar{\mathcal{C}}^T \cdot \mathcal{J} \cdot \bar{\mathcal{C}} + A_p^T \cdot X_\infty \cdot A_p - L^T \cdot R_p^{-1} \cdot L \quad (2.53)$$

sachant que  $X_\infty$  représente la solution de l'équation (2.54). De plus, les deux matrices  $R_p$  et  $L$  sont définies par :

$$R_p = \bar{\mathcal{D}}^T \cdot \mathcal{J} \cdot \bar{\mathcal{D}} + B_p^T \cdot X_\infty \cdot B_p = \begin{bmatrix} R_{p1} & R_{p2}^T \\ R_{p2} & R_{p3} \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

et

$$L = \bar{\mathcal{D}}^T \cdot \mathcal{J} \cdot \bar{\mathcal{C}} + B_p^T \cdot X_\infty \cdot A_p = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

On suppose, maintenant, qu'il existe deux matrices  $V_{12}^T V_{12}$  et  $V_{21}^T V_{21}$  de dimensions  $m_2 \times m_2$  et  $m_1 \times m_1$  respectivement. Sachant que  $V_{12}^T V_{12} = R_{p3}$  et  $V_{21}^T V_{21} = -\gamma^{-2} \nabla$ , avec la matrice  $\nabla$  qui vérifie la condition  $\nabla = R_{p1} - R_{p2}^T \cdot R_{p3}^{-1} \cdot R_{p2} < 0$ . Maintenant, on définit la

matrice  $\begin{bmatrix} A_t & \tilde{B}_t \\ C_t & \tilde{D}_t \end{bmatrix}$  par:

$$\begin{bmatrix} A_t & \tilde{B}_t \\ C_t & \tilde{D}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_t & \vdots & [\tilde{B}_{t1} & \tilde{B}_{t2}] \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ [C_{t1}] & \vdots & [\tilde{D}_{t11} & \tilde{D}_{t11}] \\ [C_{t2}] & \vdots & [\tilde{D}_{t21} & \tilde{D}_{t22}] \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

sachant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_t = A_p - B_{p1}\nabla^{-1}L_1 - R_{p2}^T R_{p3}^{-1}L_2 \\ \tilde{B}_{t1} = B_{p1}V_{21}^{-1} \\ \tilde{B}_{t2} = 0 \\ \tilde{D}_{t11} = V_{12}R_{p3}^{-1}R_{p2}V_{21}^{-1} \\ \tilde{D}_{t11} = I \\ \tilde{D}_{t21} = D_{p21}V_{21}^{-1} \\ \tilde{D}_{t22} = 0 \\ C_{t1} = V_{12}R_{p3}^{-1}(L_2 - R_{p2}\nabla^{-1}L_1 - R_{p2}^T R_{p3}^{-1}L_2) \\ C_{t2} = C_{p2} - D_{p21}\nabla^{-1}L_1 - R_{p2}^T R_{p3}^{-1}L_2 \end{array} \right. \quad (2.57)$$

De plus, la deuxième équation de *Riccati* discrète, dont la solution est donnée par  $Z_\infty$ , est obtenue par l'expression ci-dessous:

$$Z_\infty = \tilde{B}_t \cdot \hat{J} \cdot \tilde{B}_t^T + A_t \cdot Z_\infty \cdot A_t^T - M_t \cdot S_t^{-1} \cdot M_t^T \quad (2.58)$$

A partir de l'équation (2.55), les deux matrices  $S_t = \begin{bmatrix} S_{t1} & S_{t2} \\ S_{t2}^T & S_{t3} \end{bmatrix}$  et  $M_t = [M_{t1} \quad M_{t2}]$  sont définies par :

$$\begin{cases} S_t = \tilde{D}_t \cdot \hat{J} \cdot \tilde{D}_t^T + C_t \cdot Z_\infty \cdot C_t^T \\ M_t = \tilde{B}_t \cdot \hat{J} \cdot \tilde{D}_t^T + A_t \cdot Z_\infty \cdot C_t^T \end{cases} \quad (2.59)$$

De même, partant des équations (2.53) et (2.58), les solutions  $X_\infty$  et  $Z_\infty$  existent, si et seulement si, les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :

1. La solution  $X_\infty$  existe si  $X_\infty \geq 0$ ,  $\nabla < 0$  et la matrice  $A_p - B_{p1}\nabla^{-1}L_\nabla$  doit être asymptotiquement stable.

2. La solution  $Z_\infty$  existe si  $Z_\infty \geq 0$ ,  $S_{t1} - S_{t2}S_{t3}^{-1}S_{t2}^T < 0$  et la matrice  $A_t - M_tS_t^{-1}C_t$  doit être asymptotiquement stable.

Finalement, la représentation d'état définissant la matrice polynomiale du contrôleur robuste, i.e.,  $K_H = \begin{bmatrix} A_k & \vdots & B_k \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ C_k & \vdots & D_k \end{bmatrix}$ , est obtenue par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} A_k & \vdots & B_k \\ \dots & \vdots & \dots \\ C_k & \vdots & D_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_t - B_{p2} V_{12}^{-1} (C_{t1} - S_{t2} S_{t3}^{-1} C_{t2}) - M_{t2} \cdot S_{t3}^{-1} C_{t2} & \vdots & -B_{p2} V_{12}^{-1} S_{t2} S_{t3}^{-1} + M_{t2} S_{t3}^{-1} \\ \dots & \vdots & \dots \\ -V_{12}^{-1} (C_{t1} - S_{t2} S_{t3}^{-1} C_{t2}) & \vdots & -V_{12}^{-1} S_{t2} S_{t3}^{-1} \end{bmatrix}$$

Maintenant, si la matrice de la transmission directe est différente de zéro, i.e.  $D_{p22} \neq 0$ , alors, le transfert du contrôleur robuste sera fourni par l'expression ci-dessous:

$$K_H = \widehat{K}_H (I + D_{p22} \widehat{K}_H)^{-1} \quad (2.60)$$

Sachant que :

$$\widehat{K}_H = \begin{bmatrix} \widehat{A}_t - \widehat{B}_k D_{p22} (I_{m_2} + \widehat{D}_k D_{p22})^{-1} \widehat{C}_k & \vdots & \widehat{B}_t - \widehat{B}_k D_{p22} (I_{m_2} + \widehat{D}_k D_{p22})^{-1} \widehat{D}_k \\ \dots & \vdots & \dots \\ (I_{m_2} + \widehat{D}_k D_{p22})^{-1} \widehat{C}_k & \vdots & (I_{m_2} + \widehat{D}_k D_{p22})^{-1} \widehat{D}_k \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Tout en tenant compte de la condition  $|I + D_{p22} \widehat{K}_H(\infty)| \neq 0$

### 2.7.2. Résolution fondée sur l'approche LMI

En dehors de l'approche fondée sur les deux équations discrètes de *Riccati* et des techniques utilisant les représentations d'état, il existe une approche plus récente pour la résolution du problème  $H_\infty$ . En effet, cette approche utilise une formulation du problème en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI) pour les matrices  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  introduites précédemment [GD14]. Sans entrer dans les détails de la technique, nous donnons ici quelques éléments de la théorie développée dans [LL03, AP06]. Dans le cas de  $H_\infty$ , les techniques LMI utilisent le lemme fondamental suivant :

#### 2.7.2.1. Lemme :

Soit un système, ayant la réalisation en espace d'état, donné par le système d'équations (2.40), les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\|LFT_\ell(P, K_H)\|_\infty < \gamma$  et la matrice d'état  $A_p$  est stable;
- Il existe une matrice symétrique  $X_\infty$  définie positive  $X_\infty > 0$  qui représente la solution de l'inégalité matricielle linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} A_p^T \cdot X_\infty - X_\infty \cdot A_p & X_\infty \cdot B_p & C_p^T \\ B_p^T \cdot X_\infty & -\gamma \cdot I & C_p^T \\ C_p & D_p & -\gamma \cdot I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.62)$$

Ce résultat est connu sous la forme du Lemme de *Kalman-Popov-Yacubovich* [FA05]. Il est facile de voir que l'ensemble des solutions de l'équation (2.62) constitue un ensemble convexe dont on peut extraire une solution par des techniques d'optimisation très performantes.

La démonstration pour le problème de synthèse  $H_\infty$  consiste à appliquer le lemme précédent au système bouclé puis à manipuler la condition obtenue jusqu'à obtenir des conditions plus simples. On peut raisonnablement espérer obtenir des *LMI* puisqu'elles constituent une autre caractérisation de la norme  $H_\infty$ . Ces manipulations détaillées dans [GD14] conduisent au résultat donné par le théorème ci-dessous :

### 2.7.2.2. Théorème :

Il existe un contrôleur  $K_H(z^{-1})$  qui représente la solution du problème  $H_\infty$  sous-optimal, si et seulement si, il existe des matrices symétriques  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  solution du problème *LMI* ci-après :

$$\begin{pmatrix} N_x & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} X_\infty \cdot A_p + A_p^T \cdot X_\infty & X_\infty \cdot B_{p1} \\ B_{p1}^T \cdot X_\infty & -\gamma \cdot I \\ [C_{p1} & D_{p11}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{p1}^T \\ D_{p11}^T \\ [-\gamma \cdot I] \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} N_x & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.63)$$

$$\begin{pmatrix} N_y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} Y_\infty \cdot A_p^T + A_p \cdot Y_\infty & Y_\infty \cdot C_{p1}^T \\ C_{p1} Y_\infty & -\gamma \cdot I \\ [C_{p1} & D_{p11}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{p1} \\ D_{p11} \\ [-\gamma \cdot I] \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} N_y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.64)$$

$$\begin{pmatrix} X_\infty & I \\ I & Y_\infty \end{pmatrix} > 0 \quad (2.65)$$

## 2.8. Simulations et interprétation des résultats

Dans cette section, la synthèse du contrôleur robuste, qui stabilise le système bouclé cité dans le premier chapitre, est effectuées seulement par la résolution du problème de  $H_\infty$  sous-optimal donné par le critère (2.48). Dans ce cas, le contrôleur à synthétiser par cette stratégie de commande doit assurer les spécifications ci-dessous:

- 1- Assurer la stabilité interne du système bouclé avec des énergies de commandes très réduites.
- 2- Assurer une bonne dynamique de poursuite des trajectoires de référence.

- 3- Assurer une bonne dynamique de rejection des perturbations en présence des erreurs de modélisation présentées sous forme d'incertitudes multiplicatives non structurées amenant en sortie du modèle de synthèse
- 4- Assurer une bonne dynamique d'atténuation des effets des bruits de mesure qui affectent la boucle de commande.

Nous verrons, dans le chapitre suivant, que ces spécifications sont imposées afin d'améliorer les robustesses fournies par le contrôleur prédictif primaire. Il faut noter ici que la satisfaction simultanée des deux dernières spécifications est pratiquement impossible dans la même plage de fréquences. A cet effet, on synthétisera des contrôleurs robustes assurant un bon compromis de robustesse entre la stabilité robuste et les performances nominales du système bouclé. Pour assurer ce compromis de robustesse avec une marge de sécurité élevée, on doit passer par l'une des deux voies suivantes :

➤ Soit on assure une bonne marge de la stabilité robuste en minimisant, au mieux, les valeurs singulières maximales de la sensibilité complémentaire en hautes fréquences. En revanche, la satisfaction de la condition sur les performances nominales doit être contrôlée en basses fréquences.

➤ Soit on assure une bonne marge de performances nominales en minimisant, au maximum possible, les valeurs singulières maximales de la sensibilité directe en basses fréquences. En revanche, la satisfaction de la condition sur la stabilité robuste doit être contrôlée en hautes fréquences.

A cet effet, la réalisation de tous les objectifs suscités peut être assurée via des choix adéquats des pondérations qui sont proposées ici dans l'espace continu. Ces dernières doivent être préalablement discrétisées avant le développement du modèle augmenté généralisé et la formulation du problème de sensibilité mixte correspondant.

### **2.8.1. Compromis de robustesse assuré par la première voie proposée :**

Le but de cette partie consiste à satisfaire les quatre spécifications citées précédemment. Cette satisfaction doit être assurée avec un meilleur compromis de robustesse fourni par le réglage proposé dans la première voie citée ci-dessus.

A cet effet, la spécification sur les performances nominales est représentée par la pondération continue  $W_S(s)$  qui a été choisie comme suit :

$$W_S(s) = \begin{pmatrix} W_{S_{11}} & 0 \\ 0 & W_{S_{22}} \end{pmatrix}, \quad \text{où } W_{S_{11}} = W_{S_{22}} = \frac{s/M_S + \omega_B \cdot \varepsilon_S}{s + \omega_B}, \quad \text{sachant que : } M_S = 2.4975,$$

$\omega_B = 0.182 \times 10^{-2}$  et  $\varepsilon_S = 1.1 \times 10^{-7}$ . Cette spécification permet d'avoir une idée sur la dynamique de réjection des perturbations du système bouclé en présence des erreurs de modélisation de type multiplicative en sortie. De plus, elle permet également d'avoir une idée sur la dynamique de poursuite des trajectoires de référence à savoir le temps de réponse, le temps de montée, l'erreur stationnaire, ..., etc.

Dés lors, la spécification sur la stabilité robuste est présentée par la pondération continue  $W_T(s)$ . Cette dernière a été choisie comme suit :

$$W_T(s) = \begin{pmatrix} W_{T_{11}} & 0 \\ 0 & W_{T_{22}} \end{pmatrix}, \quad \text{où } W_{T_{11}} = W_{T_{22}} = \frac{s + \frac{\omega_{BT}}{M_T}}{\varepsilon_T \cdot s + \omega_{BT}}, \quad \text{sachant que } M_T = 2.5, \quad \omega_{BT} =$$

$0.33 \times 10^{-2}$  et  $\varepsilon_T = 0.1$ . Cette spécification permet d'avoir une idée sur la dynamique d'atténuation de plusieurs effets causés par les bruits de mesure et la dynamique négligée en hautes fréquences.

Les deux pondérations précédentes sont maintenant utilisées afin de formuler le critère de sensibilité mixte correspondant. La solution optimale de celui-ci peut fournir la représentation d'état discrète du contrôleur robuste  $K_H(z^{-1})$ , on obtient donc :

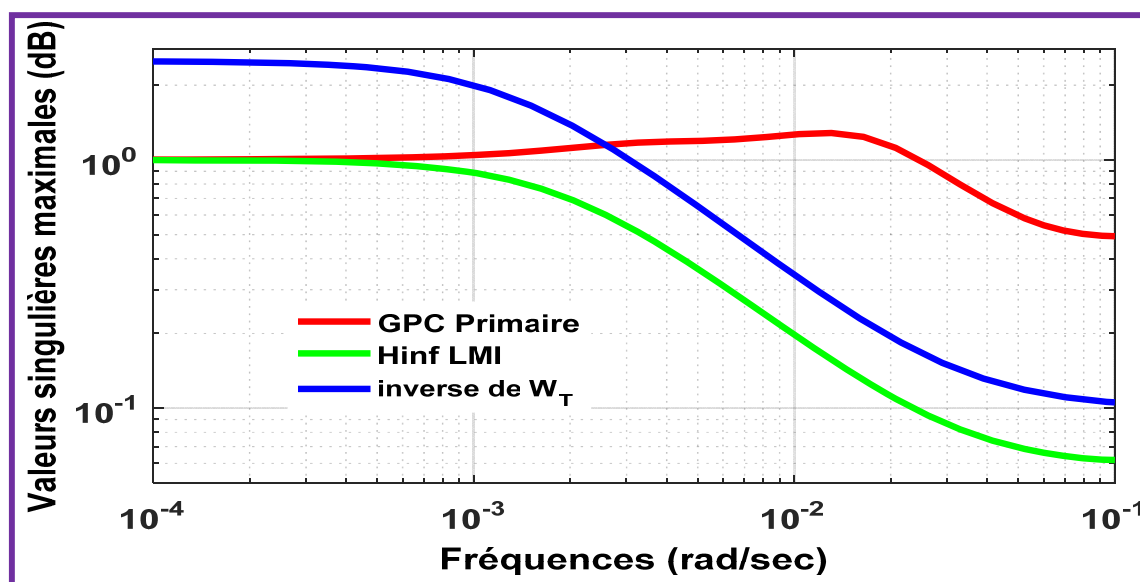
$$A_k = \begin{pmatrix} 1.0207 & 0.0073127 & -0.0065866 & 0.28048 & -0.011676 & -0.32032 \\ 0.055743 & 1.2066 & -0.031402 & -0.15611 & 0.62404 & -0.15665 \\ 0.7599 & 0.39138 & 0.57276 & -1.2996 & 1.308 & -2.292 \\ 0.27811 & -0.010191 & 0.06127 & -0.064373 & 0.086272 & -0.35052 \\ 0.017926 & -0.48007 & 0.010668 & 0.061572 & -0.41369 & -0.026873 \\ 0.23251 & 0.0068086 & -0.0015743 & 0.063731 & 0.007727 & -0.069438 \end{pmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 1.4845 & -0.44731 \\ -0.39472 & -1.4868 \\ 0.32147 & 0.077692 \\ 0.39258 & -0.021261 \\ 0.14885 & 0.46158 \\ 0.33651 & -0.10338 \end{bmatrix}, \quad D_k = \begin{bmatrix} -0.51128 & 0.21488 \\ -0.52363 & 1.3491 \\ 0.87225 & 0.76839 \end{bmatrix}, \text{ et}$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 0.44932 & 1.3335 & 0.1158 & 2.8047 & 3.5577 & -4.5825 \\ -5.3267 & -5.2322 & 9.8295 & 2.4164 & -15.873 & 21.594 \\ 8.2462 & 7.9633 & -0.25841 & -2.6358 & 23.474 & -35.511 \end{bmatrix}$$



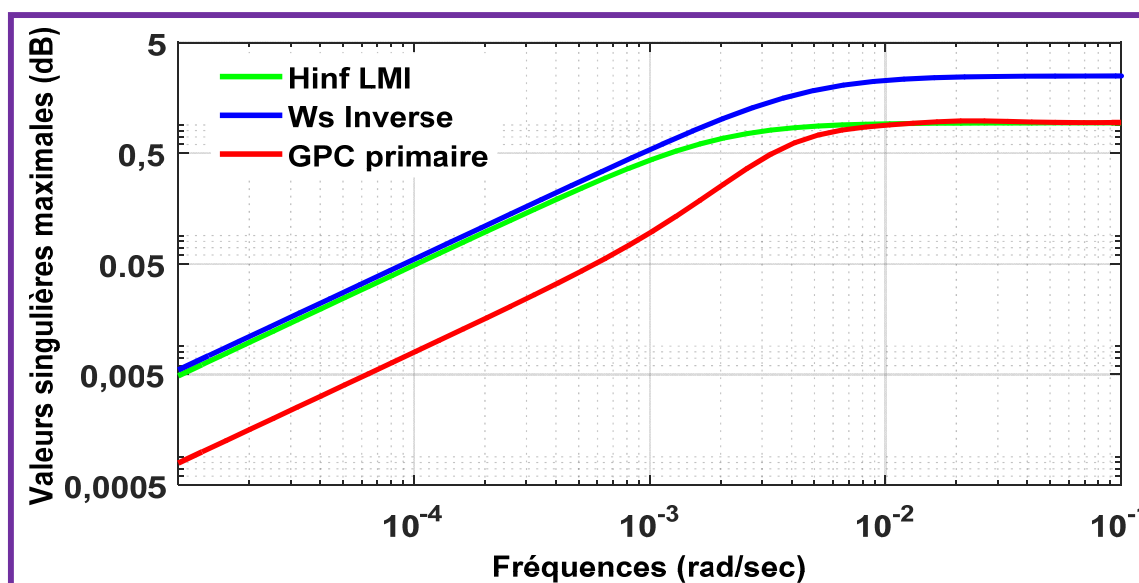
La robustesse du système bouclé a été analysée dans la même plage des fréquences mentionnées dans le premier chapitre. Par conséquent, la **Figure.2.16** présente la condition sur la stabilité robuste du système bouclé par le contrôleur cité ci-dessus. Cette figure présente également la comparaison avec la stabilité robuste du système bouclé par le contrôleur prédictif primaire. On obtient donc la figure suivante :



*Figure.2.16 : Comparaison des stabilités robustes fournies par les deux contrôleurs*

Sur la **Figure.2.16**, on observe nettement la détérioration de la condition sur la stabilité robuste du système bouclé par le contrôleur prédictif primaire et cela dans la plage fréquentielle qui s'étend de  $3 \times 10^{-3} \leq \omega \leq \omega_{max}$  radian/seconde. Ce résultat se traduit, dans le plan temporel, par une sensibilité importante du système bouclé aux effets des bruits de mesure en régime permanent. De plus, la **Figure.2.16** montre clairement la satisfaction de la condition de robustesse précédente obtenue par le contrôleur synthétisé par la méthode  $H_{\infty}$  et cela pour chaque fréquence appartenant au gabarit fréquentiel  $\omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max}$ .

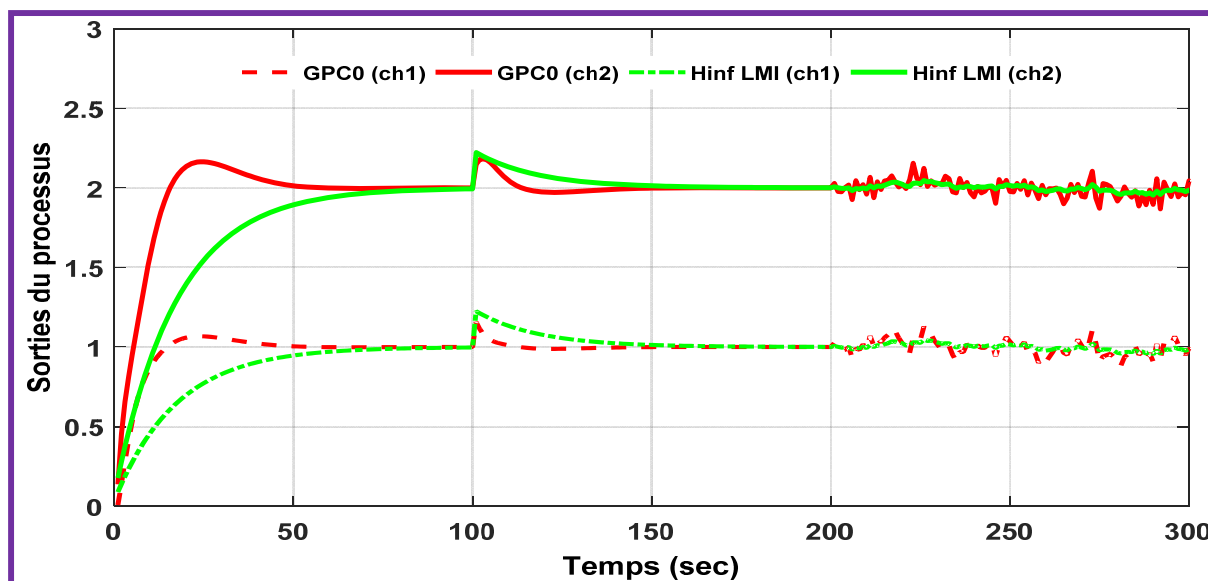
La **Figure.2.17** présente la condition sur les performances nominales du système bouclé par le contrôleur robuste de la méthode  $H_{\infty}$ . Ces performances sont comparées avec celles fournies par le système bouclé par le contrôleur prédictif primaire. On obtient la figure suivante :



**Figure.2.17** : Comparaison des performances nominales fournies par les deux contrôleurs

Sur la **Figure.2.17**, on constate clairement nettement que la condition de robustesse sur les performances nominales est respectée par le contrôleur de la méthode  $H_{\infty}$ . Néanmoins la marge de cette robustesse est inférieure à celle fournie par le contrôleur prédictif primaire. au regard de ces courbes, on constate qu'en dépit de la supériorité des deux dynamiques de rejection des perturbations et de poursuite des trajectoires de références fournies par le contrôleur prédictif primaire, le compromis de robustesse « stabilité robuste-performances nominales » reste toujours insuffisant, sachant que ce dernier est bien respecté par la méthode  $H_{\infty}$  dans toute la plage fréquentielle.

Afin de confirmer les résultats précédents, le logiciel *Simulink/Matlab* a été utilisé dans le plan temporel afin de visualiser les réponses temporelles du système bouclé par les deux contrôleurs précédents, A cet effet, les mêmes vecteurs d'excitation, qui ont été mentionnés dans le chapitre précédent, à savoir  $W(t)$ ,  $d_y(t)$  et  $\eta(t)$ , sont appliqués sur le système bouclé afin de voir et analyser les trois dynamiques de poursuite des références, de rejection des perturbations en sortie et d'atténuation de l'effet des bruits de mesure. On obtient donc les réponses temporelles présentées par la **Figure.2.18** comme suit :



*Figure.2.18 : Comparaison des sorties globales fournies par les deux contrôleurs*

D'après cette figure, il est clair de constater que le contrôleur robuste synthétisé par la méthode  $H_\infty$  a la capacité de fournir la meilleure dynamique d'atténuation des bruits de mesure. Les dynamiques de poursuite et de réjection des perturbations de ce contrôleur sont acceptables quoiqu'elles nécessitent encore d'autres améliorations. Ceci est l'objectif de la prochaine section.

### 2.8.2. Compromis de robustesse assuré par la deuxième voie proposée :

Cette partie a pour but de satisfaire les quatre spécifications citées précédemment dans lesquelles le bon compromis de robustesse est effectué via le réglage de robustesse explicite dans la deuxième proposition précédente. A cet effet, les paramètres de la pondération continue  $W_S(s)$  ainsi que ceux de la pondération continue  $W_T(s)$  sont choisis de nouveau comme les suit:

- Pour  $W_S(s)$ , on a :  $M_S = 1.6949$ ,  $\omega_B = 0.059$  et  $\varepsilon_S = 1.6949 \times 10^{-7}$ .
- Pour  $W_T(s)$ , on a :  $M_T = 1.4596$ ,  $\omega_{BT} = 0.36496$  et  $\varepsilon_T = 0.9124$ .

Une autre spécification supplémentaire a été ajoutée au critère de sensibilité et cela pour limiter l'énergie des signaux de commande. Cette spécification est représentée par une matrice réelle donnée comme suit :

$$W_u = \begin{pmatrix} 0.31623 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0056234 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Les trois pondérations citées précédemment sont ensuite utilisées afin de formuler le critère de sensibilité mixte dont la solution optimale fournit la représentation d'état discrète du contrôleur robuste  $K_H(z^{-1})$ . On obtient donc :

$$A_k = \begin{pmatrix} 0.10204 & -0.63067 & -0.18735 & 0.46429 & -367.32 & -80.924 \\ 1.0995 \times 10^{-6} & 0.56246 & 8.498e \times 10^{-8} & -0.97064 & 0.40701 & 0.0005957 \\ 5.3609 \times 10^{-7} & -0.25415 & 0.43858 & 1.7819 \times 10^{-8} & -0.18492 & 0.0002157 \\ 0.52118 & 0.36535 & 0.10854 & 0.73124 & 212.79 & 47.299 \\ -6.3359 \times 10^{-7} & -0.0014371 & 0.0024827 & 1.2832 \times 10^{-7} & -0.00025191 & -0.000343 \\ -0.0005068 & 0.0013007 & 0.0003864 & -0.0014503 & 0.75756 & 0.16162 \end{pmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} -6.6767 & 5.3252 \\ -8.8304 & -1.0092 \times 10^{-5} \\ 3.997 & -1.4838 \times 10^{-6} \\ 3.8679 & 6.0242 \\ 0.017462 & 5.819 \times 10^{-7} \\ 0.01377 & -0.010469 \end{bmatrix}, \quad D_k = \begin{bmatrix} -19.807 & 6.6005 \\ -0.14053 & 42.642 \\ 1.0711 & 24.658 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 1.6312 & 1.3979 & 7.0108 & 0.75853 & 1046.2 & 231.1 \\ 12.491 & 0.96857 & 13.034 & 10.466 & 4321.7 & 952.18 \\ 12.909 & 1.6785 & 21.498 & 1.1867 & 7182 & 1586.9 \end{bmatrix}$$

La **Figure.2.19** représente la comparaison des réponses fréquentielles et temporelles du système bouclé par le contrôleur robuste de la méthode  $H_\infty$  et le contrôleur prédictif primaire. À partir de cette figure, on observe que la meilleure dynamique de réjection des perturbations est celle fournie par le contrôleur synthétisé par la méthode  $H_\infty$  qui assure également la satisfaction de la condition sur la stabilité robuste et celle sur les performances nominales. En revanche, sa dynamique d'atténuation sur les l'effets des bruits de mesure est dégradée en comparaison avec celle fournie par le contrôleur prédictif primaire.

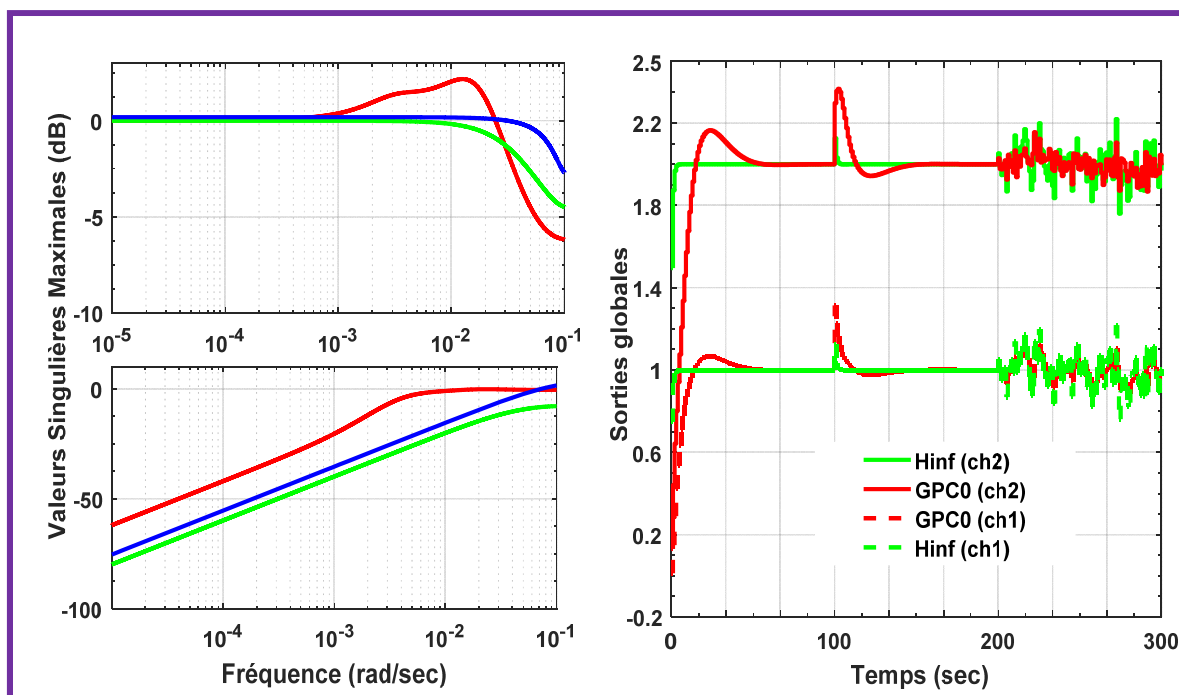


Figure.2.19 : Comparaison des réponses temporelles et fréquentielles fournies par les deux contrôleurs

## 2.9. Conclusion :

Dans ce chapitre on aborde, la synthèse du contrôleur robuste pendant laquelle on représentera le critère de sensibilité mixte par deux problèmes différents d'optimisation à savoir, problème  $H_\infty$  sous-optimal et  $H_\infty$  optimal. La fonction objective de chaque problème a été formulée à partir d'un choix adéquat des pondérations et cela dans l'objectif de limiter les valeurs singulières maximales des différentes sensibilités fournies par le système bouclé. Sachant que la structure proposée pour chaque pondération a permis d'avoir une information *a priori* sur la sensibilité correspondante, de même, la synthèse utilisant la méthode  $H_\infty$  permet de fournir un bon compromis de robustesse sur la stabilité robuste et sur les performances nominales. Pour ces raisons, on a pu orienter notre choix sur les pondérations et cela pour assurer les performances nominales avec une marge importante tout en respectant la condition sur la stabilité robuste ou bien d'assurer cette dernière avec une marge de sécurité élevée tout en respectant la condition sur les performances nominales. En comparaison avec les résultats fréquentiels et temporels illustrés dans le chapitre précédent, on a confirmé que la stabilité robuste du système bouclé par le contrôleur prédictif primaire n'est pas assurée en présence des incertitudes de modélisation chose qui peut produire une grande sensibilité aux effets des bruits de mesure et produire également des réponses temporelles très fluctuantes en régime permanent. Sachant que cet inconvénient a été résolu

par le contrôleur  $H_\infty$  et cela par la minimisation, au plus haut degré, des valeurs singulières maximales de leur sensibilité complémentaire en hautes fréquences. A cet effet, l'objectif du chapitre suivant consistera donc à améliorer la stabilité robuste fournie par le contrôleur prédictif primaire en utilisant la méthode  $H_\infty$  basée sur la première voie proposée pour le choix des pondérations spécifiques dans le critère de sensibilité mixte. Le contrôleur fourni par cette méthode sera hybridée avec celui de GPC primaire en utilisant la paramétrisation de Youla.

# CHAPITRE 3

**Robustification de la commande prédictive  
généralisée pluridimensionnelle**

*Ce chapitre sera consacré à l'étude de l'approche de robustification basée sur la paramétrisation de Youla. Les factorisations fractionnelles co-premières des deux matrices de transfert du modèle de synthèse ainsi que celle du contrôleur primaire seront détaillées. La synthèse du contrôleur robustifié sera ensuite formulée sous forme d'un problème d'optimisation sous contrainte qui sera résolue par l'approche classique, basée sur l'algorithme min-max. Les anomalies de cette approche seront présentées. Ainsi, la recherche d'une méthode alternative fera apparaître notre contribution dans ce domaine, dans la mesure où notre méthode est basée sur la comparaison des sensibilités fournies par le contrôleur  $H_\infty$  avec celles fournies par le contrôleur prédictif primaire. par la suite, l'identification fréquentielle sera utilisée afin de déterminer la matrice optimale de Youla. Cette nouvelle proposition sera également appliquée sur le même système qui a été adopté durant les deux chapitres précédents. Les résultats obtenus seront comparés, dans le plan fréquentiel et temporel, en utilisant le contrôleur prédictif primaire de GPC et celui synthétisé par la méthode  $H_\infty$ .*

### **3.1. Introduction :**

Dans le premier chapitre, nous avons montré l'efficacité de la version polynomiale de la loi GPC sur les systèmes pluridimensionnels dont la dynamique est décrite par un modèle prédictif incertain [TK0, BP96, CD87]. Cette version a la capacité d'assurer une bonne dynamique de poursuite des trajectoires de référence et cela après un choix convenable des paramètres de réglage de cette stratégie de commande [YT95, CD87]. En outre, le choix adéquat de ces paramètres doit être effectué suivant des règles de réglage. La validité de cette version a été démontrée sur un système pluridimensionnel non carré avec lequel on a vérifié la robustesse de stabilité ainsi que les performances nominales dans le plan fréquentiel. Celle-ci est assurée à travers des lieux des valeurs singulières maximales de différentes matrices de sensibilité fournies par le système bouclé [TM14]. L'évolution de ces sensibilités, notamment la sensibilité directe et la sensibilité complémentaire, a permis de découvrir les inconvénients majeurs de cette stratégie de commande. Ceux-ci sont apparus à chaque fois que le modèle de synthèse est entaché par d'incertitudes de modélisation provoquant, en conséquence, la variation de chaque paramètre du modèle dans une plage bornée [MJ06, MJ89]. Un autre inconvénient constaté lors de l'analyse de robustesse est la sensibilité du système bouclé aux effets des bruits de mesure en haute fréquence. A cet effet, le deuxième chapitre a été présenté afin de surmonter ces inconvénients. Cela a été assuré par une autre stratégie de commande basée sur la théorie de la commande robuste qui utilise la méthode  $H_\infty$ . Sur la base de cette méthode, le problème de synthèse a été formulé par un problème de sensibilité mixte où la solution optimale fournit la représentation d'état du contrôleur robuste souhaité. Toutefois, les robustesses de stabilité et les performances nominales du système bouclé sont assurées avec



des marges très élevées. De même, sa dynamique de poursuite est dégradée d'une manière importante. Sur la base de ces deux stratégies de commande suscitées, l'objectif de ce chapitre a pour but de conserver la bonne dynamique de poursuite du GPC polynomial et de modifier sa robustesse de manière qu'elle devienne similaire à celle obtenue par la méthode  $H_\infty$ . Pour atteindre cet objectif, le contrôleur de GPC, appelé par la suite contrôleur primaire, sera robustifié par l'approche de Youla dans laquelle une matrice appelée Q-Youla sera déterminée sur la base du contrôleur  $H_\infty$ . Ceci permet de faire ressortir un contrôleur robustifié assurant les bonnes dynamiques souhaitées.

### 3.2. Structure du contrôleur GPC robustifié :

La commande GPC algorithmique nécessite la modélisation du comportement réel du système en utilisant le modèle prédictif de CARIMA, qui a été décrit dans le premier chapitre par l'équation (1.13). Cette loi de commande peut être transformée sous une forme polynomiale conduisant, par conséquent, à un contrôleur à deux degrés de liberté [ZA14]. Ce contrôleur est présenté par la forme  $R_0S_0T_0$  classique et le système bouclé correspondant a été donné par la Figure.1.6. Notons ici que l'étape de robustification du contrôleur primaire permet de faire apparaître une autre structure, notée ici par  $R_1S_1T_1$ , représentant le contrôleur robustifié. De ce fait, le système bouclé correspondant peut être donné par la Figure.3.1 comme suit :

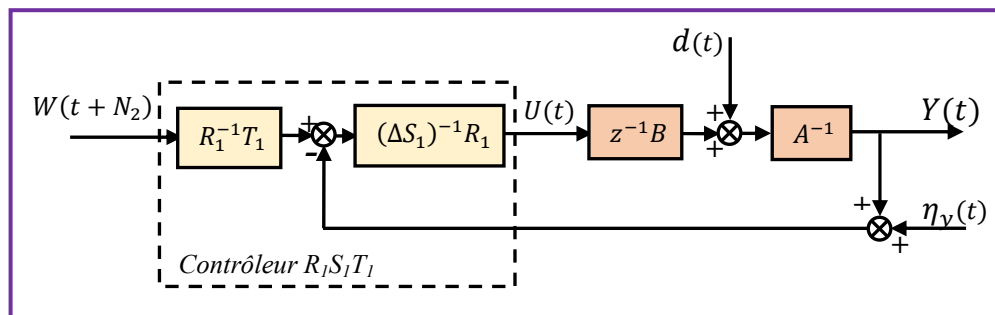


Figure.3.1 : Contrôleur GPC robustifié à 2-DOF reformulé selon la forme standard

L'objectif ici est de conserver, par le contrôleur robustifié, le même comportement d'entrée-sortie fournie par le contrôleur prédictif primaire dans lequel les marges de la stabilité robuste et les performances nominales doivent être augmentées et ce en dépit de la présence des incertitudes de modélisation non structurées, des effets de bruits de mesures et des effets non souhaités causés par la dynamique négligée du système réel en hautes fréquences. Pour atteindre les objectifs susmentionnés, la robustification sera basée sur la

paramétrisation de Youla dans laquelle les transferts décrivant le modèle de synthèse ainsi que le contrôleur primaire seront factorisés en utilisant la factorisation fractionnaire co-première.

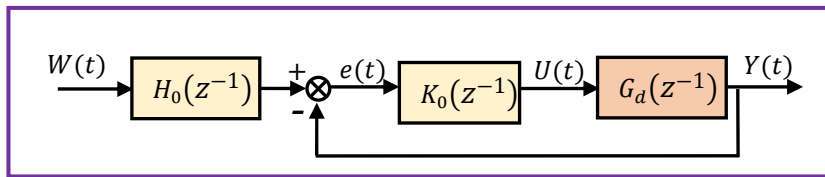
### 3.3. Paramétrisation de Youla :

#### 3.3.1. Principe :

Pour un problème de commande, on est souvent amené à définir des ensembles de solutions. Pour les décrire de la meilleure manière possible, il est nécessaire de choisir une paramétrisation conduisant à une représentation simple. La stabilité pour un problème de commande est fondamentale. C'est pourquoi, la paramétrisation des correcteurs stabilisants a intéressé le milieu des automaticiens. Les premières approches connues sont apparues dans les années 50 mais ce n'est que dans les années 70 que le formalisme actuel a pris réellement forme [YJ76]. Une théorie complète est disponible dans [CB01, TS11, RP03].

#### 3.3.2. Factorisation co-première des transferts modèle/contrôleur primaire :

Soit le comportement de poursuite du système bouclé par un contrôleur prédictif primaire présenté par la **Figure.3.2** comme suit [TM93, MD90]. :



*Figure.3.2 : Boucle fermée classique*

Rappelons ici que, la factorisation co-première de la matrice de transfert du modèle  $G_d(z^{-1})$  a été décrite, dans le premier chapitre, par l'équation (1.5), où  $G_d(z^{-1}) = N_r(z^{-1}).D_r^{-1}(z^{-1})$  représente la factorisation co-première droite de  $G_d(z^{-1})$ , tandis que  $G_d(z^{-1}) = D_\ell^{-1}(z^{-1}).N_\ell(z^{-1})$  représente la factorisation co-première gauche de  $G_d(z^{-1})$ .

##### 3.3.2.1. Factorisation co-première du contrôleur $K_0(z^{-1})$ :

De la même façon, si le transfert  $K_0(z^{-1})$  est celui qui représente le post-compensateur stabilisant le système  $G_d(z^{-1})$ , où, la factorisation co-première droite et gauche de ce dernier est exprimée, respectivement, comme suit [GK89, DM07, CR96]:

$$K_0(z^{-1}) = Y_{r_0}^{-1}(z^{-1})X_{r_0}(z^{-1}) \quad (3.1)$$

$$K_0(z^{-1}) = X_{\ell_0}(z^{-1})Y_{\ell_0}^{-1}(z^{-1}) \quad (3.2)$$

Sachant que,  $Y_{r_0}(z^{-1})$  est une matrice polynomiale de dimensions  $m \times m$ . Cette dernière doit être non singulière. De plus,  $X_{r_0}(z^{-1})$  est une matrice polynomiale de dimensions  $m \times n$ . En outre,  $Y_{\ell_0}(z^{-1})$  est une matrice polynomiale non singulière de dimensions  $n \times n$ , et  $X_{\ell_0}(z^{-1})$  est une matrice polynomiale de dimensions  $m \times n$ . Nous verrons, dans la suite de ce travail, que cette factorisation jouera un rôle important lorsqu'il s'agit de synthétiser le transfert du contrôleur robustifié.

### 3.3.2.2. Factorisation co-première du pré-compensateur $H_0(z^{-1})$ :

Dans cette section, le pré-compensateur  $H_0(z^{-1})$  du système bouclé peut être factorisé comme suit [GK89, DM07, CR96]:

$$H_0(z^{-1}) = X_{r_0}^{-1}(z^{-1})Z_r(z^{-1}) \quad (3.3)$$

$$H_0(z^{-1}) = Z_\ell(z^{-1})X_{\ell_0}^{-1}(z^{-1}) \quad (3.4)$$

où  $Z_r(z^{-1})$  et  $Z_\ell(z^{-1})$  représentent, respectivement, la matrice polynomiale de dimensions  $n \times n$ , et celle de dimensions  $m \times m$ . La double factorisation (gauche et droite) du modèle de synthèse  $G_d(z^{-1})$  peut assurer l'existence des matrices  $Y_{r_0}(z^{-1})$ ,  $X_{r_0}(z^{-1})$ ,  $Y_{\ell_0}(z^{-1})$  et  $X_{\ell_0}(z^{-1})$  qui doivent satisfaire l'identité de Bézout généralisée [GK89]. Cette dernière est exprimée sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} Y_{r_0} & X_{r_0} \\ N_\ell & -D_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & X_{\ell_0} \\ N_r & -Y_{\ell_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0 \\ 0 & I_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

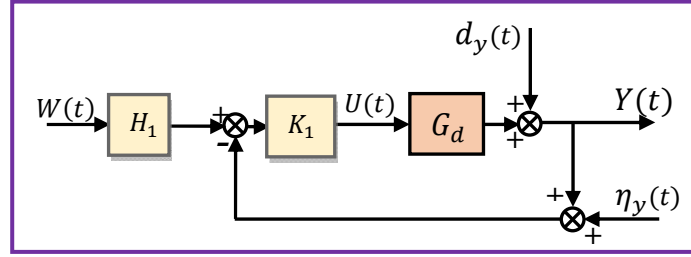
De l'équation (3.5), on peut définir les égalités matricielles ci-après:

$$\begin{cases} D_\ell Y_{\ell_0} + N_\ell X_{\ell_0} = I_{n \times n} \\ Y_{r_0} D_r + X_{r_0} N_r = I_{m \times m} \\ Y_{r_0} X_{\ell_0} - X_{r_0} Y_{\ell_0} = 0_{n \times m} \\ N_\ell D_r - D_\ell N_r = 0_{n \times m} \end{cases} \quad (3.6)$$

Nous verrons, dans la suite de ce travail, que le système d'équation (3.6) permet de simplifier le calcul de la matrice de Youla.

### 3.3.3. Paramétrisation de Youla basée sur la factorisation co-première:

Dans la théorie de la commande robuste, la paramétrisation de Youla appliquée sur le pré-compensateur et le post-compensateur du contrôleur prédictif primaire produit le nouveau système bouclé illustré par la **Figure.3.3** comme suit [RP03]:



**Figure.3.3** : Système bouclé par le contrôleur (2-DOF) robustifié

A partir de la **Figure.3.3**, le transfert du post-compensateur ainsi que celui de pré-compensateur du contrôleur robustifié sont respectivement définis comme suit:

$$K_1(z^{-1}) = Y_{r_1}^{-1}(z^{-1})X_{r_1}(z^{-1}) = X_{\ell_1}(z^{-1})Y_{\ell_1}^{-1}(z^{-1}) \quad (3.7)$$

$$H_1(z^{-1}) = X_{r_1}^{-1}(z^{-1})Z_r(z^{-1}) = Z_\ell(z^{-1})X_{\ell_1}^{-1}(z^{-1}) \quad (3.8)$$

avec  $Y_{r_1}(z^{-1}) \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times m}$ ,  $X_{r_1}(z^{-1}) \in \mathcal{RH}_\infty^{m \times n}$ ,  $X_{\ell_1}(z^{-1}) \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times m}$  et  $Y_{\ell_1}(z^{-1}) \in \mathcal{RH}_\infty^{n \times n}$  qui sont des matrices polynomiales co-premières définies comme suit [YJ76, CB01, APG98]:

$$\begin{cases} X_{r_1}(z^{-1}) = X_{r_0}(z^{-1}) + Q(z^{-1})D_\ell(z^{-1}) \\ Y_{r_1}(z^{-1}) = Y_{r_0}(z^{-1}) - Q(z^{-1})N_\ell(z^{-1}) \\ X_{\ell_1}(z^{-1}) = X_{\ell_0}(z^{-1}) + D_r(z^{-1})Q(z^{-1}) \\ Y_{\ell_1}(z^{-1}) = Y_{\ell_0}(z^{-1}) - N_r(z^{-1})Q(z^{-1}) \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $Q(z^{-1})$  est une matrice polynomiale stable. De plus, si les matrices polynomiales  $Y_{r_1}$ ,  $X_{r_1}$ ,  $X_{\ell_1}$  et  $Y_{\ell_1}$  sont choisies de telle sorte que  $Y_{r_1}^{-1}X_{r_1} = X_{\ell_1}Y_{\ell_1}^{-1}$ , alors elles doivent également satisfaire l'identité de Bézout, donnée par la forme matricielle ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} Y_{r_1} & X_{r_1} \\ N_\ell & -D_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & X_{\ell_1} \\ N_r & -Y_{\ell_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0 \\ 0 & I_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

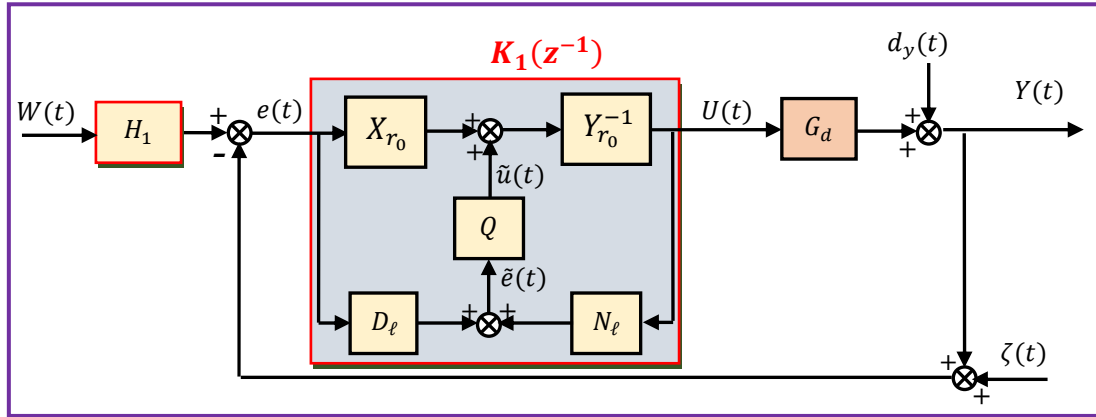
A partir de l'équation (3.10), on peut obtenir le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} D_\ell Y_{\ell_1} + N_\ell X_{\ell_1} = I_{n \times n} \\ Y_{r_1} D_r + X_{r_1} N_r = I_{m \times m} \\ N_\ell D_r - D_\ell N_r = 0_{n \times m} \\ Y_{r_1} X_{\ell_1} - X_{r_1} Y_{\ell_1} = 0_{n \times m} \end{cases} \quad (3.11)$$

Selon le type de factorisation effectuée sur une telle matrice de transfert, on peut distinguer les deux versions de paramétrisation du post-compensateur cité précédemment. On obtient donc :

### 3.3.3.1. Factorisation co-première droite de $K_1(z^{-1})$ :

D'après les équations (3.6) et (3.8), si la factorisation co-première droite est utilisée sur le transfert de  $K_1(z^{-1})$ , le schéma du système bouclé sera alors donnée par la **Figure.3.4** comme suit [KB92] :

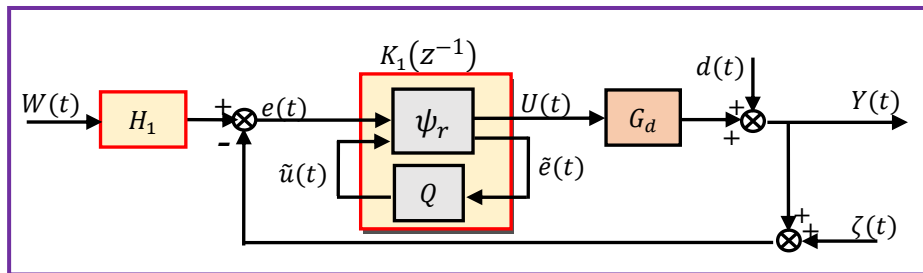


**Figure.3.4** : Système bouclé basé sur la factorisation à droite du transfert de post-compensateur

Dans ce cas, le transfert qui représente le post-compensateur du contrôleur robustifié est obtenu via la transformation linéaire fractionnaire inférieure d'un système d'interconnexion fournissant l'expression suivante (voir la **Figure.3.5**):

$$K_1 = (Y_{r_0} - QN_\ell)^{-1}(X_{r_0} + QD_\ell) \quad (3.12)$$

En tenant compte la condition de singularité suivante  $|I_{n \times n} - QN_\ell Y_{r_0}^{-1}| \neq 0$ , pour  $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ .



**Figure.3.5** : Poste-compensateur fournie par  $LFT_\ell\{\psi_r, Q\}$

#### Preuve :

A partir de la **Figure.3.5**, on peut constater que la matrice polynomiale  $\psi_r(z^{-1})$  représente le transfert entre les deux vecteurs exogènes  $(U, \tilde{e})^T$  et  $(e, \tilde{u})^T$ . En conséquence, le transfert du post-compensateur du contrôleur robustifié représente la transformation linéaire fractionnaire inférieure de l'interconnexion  $\langle \psi_r(z^{-1}), Q(z^{-1}) \rangle$ . On obtient donc la relation ci-dessous :

$$LFT_{\ell}\{\psi_r(z^{-1}), Q(z^{-1})\} = \psi_{r_{11}} + \psi_{r_{12}}Q(I - \psi_{r_{22}}Q)^{-1}\psi_{r_{21}} \quad (3.13)$$

où les transferts constituant la matrice  $\psi_r(z^{-1})$  peuvent être déterminés à partir de la **Figure.3.4** comme suit:

$$\begin{bmatrix} U \\ \tilde{e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{r_{11}}(z^{-1}) & \vdots & \psi_{r_{12}}(z^{-1}) \\ \dots & \vdots & \dots \\ \psi_{r_{21}}(z^{-1}) & \vdots & \psi_{r_{22}}(z^{-1}) \end{bmatrix}}_{\psi_r(z^{-1})} \begin{bmatrix} e \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

sachant que les transferts  $\psi_{r_{ij}}(z^{-1})$  sont donnés par :

$$\psi_r(z^{-1}) = \begin{bmatrix} Y_{r_0}^{-1}X_{r_0} & \vdots & Y_{r_0}^{-1} \\ \dots & \vdots & \dots \\ Y_{\ell_0}^{-1} & \vdots & N_{\ell}Y_{r_0}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

A partir des l'équations (3.13) et (3.15), on obtient :

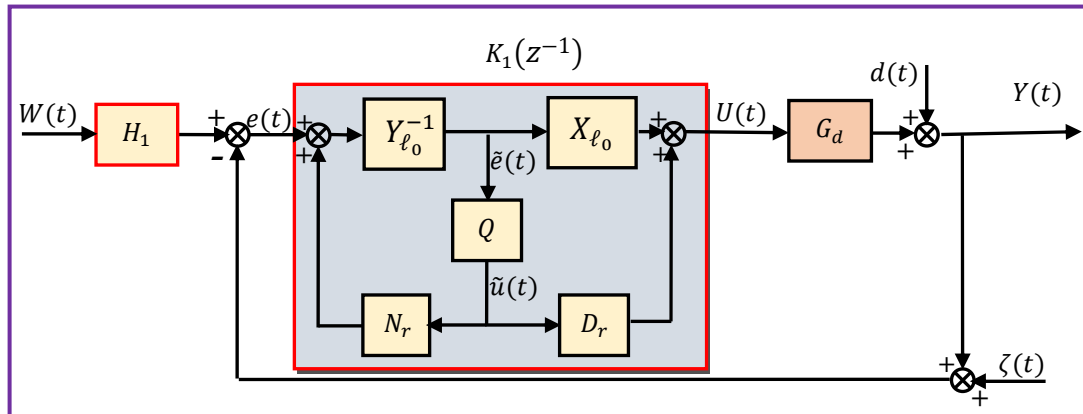
$$K_1 = Y_{r_0}^{-1}X_{r_0} + Y_{r_0}^{-1}Q(I - N_{\ell}Y_{r_0}^{-1}Q)^{-1}Y_{\ell_0}^{-1} \quad (3.16)$$

En effectuant quelques manipulations mathématiques sur l'équation (3.16), on obtient l'expression suivante :

$$K_1 = (Y_{r_0} - QN_{\ell})^{-1}(X_{r_0} + QD_{\ell}) \quad (3.17)$$

### 3.3.3.2. Factorisation co-première gauche de $K_1(z^{-1})$ :

D'après les équations (3.7) et (3.9), la factorisation co-première gauche de  $K_1(z^{-1})$  sur  $\mathcal{RH}_{\infty}$ , produit le schéma présenté par la **Figure.3.6** [KB92] :

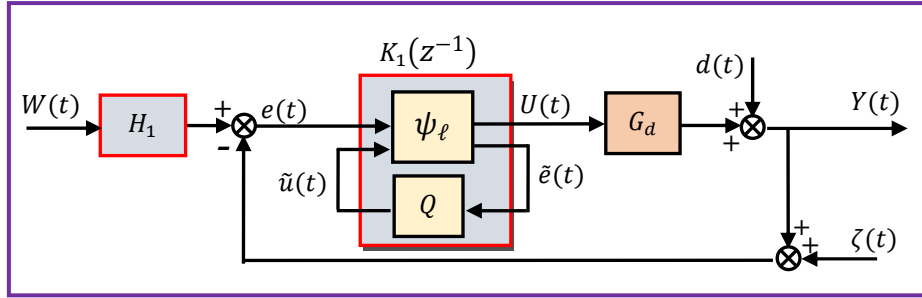


**Figure.3.6** : Contrôleur robustifié selon la factorisation co-première gauche

Dans ce cas, le transfert qui représente le post-compensateur du contrôleur robustifié est obtenu via la transformation linéaire fractionnaire inférieure d'un système d'interconnexion fournissant l'expression suivante (voir la **Figure.3.7**):

$$K_1 = (X_{\ell_0} + D_r Q)(Y_{\ell_0} - N_r Q)^{-1} \quad (3.18)$$

En prenant en considération la condition de singularité suivante  $|I_{m \times m} - Y_{\ell_0}^{-1} N_r Q| \neq 0$ , pour  $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ .



**Figure.3.7 :** Post-compensateur fourni par  $LFT_{\ell}\{\psi_{\ell}, Q\}$

**Preuve :**

A partir de la **Figure.3.6**, on peut constater que la matrice polynomiale  $\psi_{\ell}(z^{-1})$  représente le transfert entre les deux vecteurs exogènes  $(U, \tilde{e})^T$  et  $(e, \tilde{u})^T$ . Ainsi, le transfert du post-compensateur du contrôleur robustifié représente la transformation linéaire fractionnaire inférieure de l'interconnexion  $\langle \psi_{\ell}(z^{-1}), Q(z^{-1}) \rangle$ . On obtient donc la relation ci-dessous :

$$LFT_{\ell}\{\psi_{\ell}(z^{-1}), Q(z^{-1})\} = \psi_{\ell_{11}} + \psi_{\ell_{12}} Q(I - \psi_{\ell_{22}} Q)^{-1} \psi_{\ell_{21}} \quad (3.19)$$

où les transferts constituant la matrice  $\psi_{\ell}(z^{-1})$  peuvent être déterminés à partir de la **Figure.3.6**. On obtient donc:

$$\begin{bmatrix} U \\ \tilde{e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{\ell_{11}}(z^{-1}) & \vdots & \psi_{\ell_{12}}(z^{-1}) \\ \dots & \vdots & \dots \\ \psi_{\ell_{21}}(z^{-1}) & \vdots & \psi_{\ell_{22}}(z^{-1}) \end{bmatrix}}_{\psi_{\ell}(z^{-1})} \begin{bmatrix} e \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

avec  $\psi_{\ell}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} X_{\ell_0} Y_{\ell_0}^{-1} & \vdots & Y_{r_0}^{-1} \\ \dots & \vdots & \dots \\ Y_{\ell_0}^{-1} & \vdots & Y_{\ell_0}^{-1} N_r \end{bmatrix}$ . A partir des équations (3.19) et (3.21), on obtient :

$$K_1 = X_{\ell_0} Y_{\ell_0}^{-1} + Y_{r_0}^{-1} Q(I - Y_{\ell_0}^{-1} N_r Q)^{-1} Y_{\ell_0}^{-1} \quad (3.21)$$

En faisant quelques manipulations mathématiques sur l'équation (3.21), on obtient l'expression suivante :

$$K_1 = (X_{\ell_0} + D_r Q)(Y_{\ell_0} - N_r Q)^{-1} \quad (3.22)$$

Nous verrons, dans la suite de ce travail, que le système d'interconnexion  $\langle \psi_r(z^{-1}), Q(z^{-1}) \rangle$  présenté par la **Figure.3.5** (ou bien  $\langle \psi_\ell(z^{-1}), Q(z^{-1}) \rangle$  présenté par la **Figure.3.7**) permet de faciliter le calcul de la matrice  $Q(z^{-1})$  par des approches utilisant la méthode  $H_\infty$ . Cette méthode est basée sur la formulation du critère de sensibilité mixte dans lequel l'amélioration de robustesse dépend de la minimisation des normes  $H_\infty$  des matrices de sensibilité.

### 3.4. Amélioration de la robustesse fournie par le contrôleur primaire:

La matrice de Youla, qui permet d'améliorer la robustesse de stabilité et des performances, sera déterminée à partir de la matrice de transfert du modèle de synthèse  $G_d(z^{-1})$  et celle du contrôleur prédictif primaire  $K_0(z^{-1})$ . si les performances du système bouclé par le contrôleur prédictif primaire sont assurées avec un certain nombre de spécifications. La question qui va être posée est : comment assurer les performances précédentes avec une marge de sécurité très élevée en présence des incertitudes de modélisation (variation paramétrique du modèle de synthèse), des effets des bruits de mesure ainsi que des effets non souhaités causés par la dynamique négligée du système réel ? [GK88, ZG81, GD14]. Ces objectifs peuvent être atteints via l'analyse des lieux des valeurs singulières maximales des matrices de sensibilité dans le plan fréquentiel.

#### 3.4.1. Amélioration de la sensibilité complémentaire en sortie:

Rappelons ici que la matrice de sensibilité complémentaire en sortie fournie par le contrôleur primaire est notée par  $T_{y_0}(z^{-1})$  (voir l'équation (1.49)). Cette dernière donne l'information sur la stabilité robuste (RS) du système bouclé [GK88, ZG81, OH03, GD14].

Afin d'améliorer la marge de robustesse en présence des incertitudes multiplicatives non structurées amenées à la sortie du modèle, les valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité complémentaire du contrôleur robustifié, notée ici par  $T_{y_1}$ , doivent être minimisées au maximum possible en hautes fréquences. Cette minimisation peut être assurée par un choix optimal de la matrice de Youla  $Q(z^{-1})$ . Cette dernière peut modifier l'allure de  $T_{y_0}(z^{-1})$  suivant l'expression ci-dessous :



$$T_{y_1} = (I_{n \times n} + G_d K_1)^{-1} G_d K_1 = G_d (I_{n \times n} + K_1 G_d)^{-1} K_1 \quad (3.23)$$

Ou bien par l'expression :

$$T_{y_1} = T_{y_0} + N_r Q D_\ell = T_{y_0} (I_{m \times m} + X_{r_0}^{-1} Q D_\ell) \quad (3.24)$$

En examinant l'équation (3.24), on peut constater que la matrice de Youla a la capacité d'améliorer les performances nominales du système bouclé par le contrôleur robustifié.

**Preuve:**

Pour obtenir l'équation (3.24), on substitue les deux matrices :  $G_d = N_r \cdot D_r^{-1}$  et  $K_1 = Y_{r_1}^{-1} X_{r_1}$  dans l'équation (3.23), on obtient donc l'expression suivante :

$$T_{y_1} = N_r D_r^{-1} (I_{n \times n} + Y_{r_1}^{-1} X_{r_1} N_r D_r^{-1})^{-1} Y_{r_1}^{-1} X_{r_1} \quad (3.25)$$

De l'équation (3.25), on obtient  $T_{y_1} = N_r \cdot D_r^{-1} [Y_{r_1}^{-1} (Y_{r_1} D_r + X_{r_1} N_r) D_r^{-1}]^{-1} Y_{r_1}^{-1} X_{r_1}$ , ce qui implique encore  $T_{y_1} = N_r \cdot D_r^{-1} D_r (Y_{r_1} D_r + X_{r_1} N_r)^{-1} Y_{r_1}^{-1} X_{r_1}$ . Cette expression peut encore être simplifiée. En effet, en faisant, on fait ressortir l'expression suivante  $T_{y_1} = N_r (Y_{r_1} D_r + X_{r_1} N_r)^{-1} X_{r_1}$ . Maintenant, en se basant sur l'identité de Bézout suivante  $Y_{r_1} D_r + X_{r_1} N_r = I_{m \times m}$  donnée par l'équation (3.11), on obtient l'expression de la sensibilité complémentaire en sortie, fournie par le contrôleur robustifié, qui sera définie par l'expression ci-dessous :

$$T_{y_1} = N_r X_{r_1} \quad (3.26)$$

Considérons l'équation (3.9). Si on remplace l'expression décrivant la matrice polynomiale  $X_{r_1}$  dans l'équation (3.26), on aura donc :

$$T_{y_1} = N_r (X_{r_0} + Q D_\ell) = N_r X_{r_0} + N_r Q D_\ell \quad (3.27)$$

Notons ici que la matrice de sensibilité complémentaire fournie par le contrôleur prédictif primaire est celle donnée par  $T_{y_0} = N_r X_{r_0}$ . En substituant cette dernière dans l'équation (3.27), on aura donc l'expression suivante :

$$T_{y_1} = T_{y_0} + N_r Q D_\ell = T_{y_0} (I_{m \times m} + X_{r_0}^{-1} Q D_\ell) \quad (3.28)$$

Il est facile de voir dans l'équation (3.28) que les valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité complémentaire  $\sigma_{max}[T_{y_1}(e^{-j\omega})]$  sont obtenues par la somme des deux

matrices  $\sigma_{max}[T_{y_0}(e^{-j\omega})]$  et  $\sigma_{max}[I_{m \times m} + X_{r_0}^{-1}(e^{-j\omega})Q(e^{-j\omega})D_\ell(e^{-j\omega})]$  dans l'échelle logarithmique et cela pour chaque point de la pulsation  $\omega$ . Par conséquent, le lieu de  $\sigma_{max}[T_{y_1}(e^{-j\omega})]$  peut fournir une pente plus abrupte en comparaison à celle fournie par le lieu de  $\sigma_{max}[T_{y_0}(e^{-j\omega})]$  en hautes fréquences. Ceci confirme clairement que la matrice de Youla  $Q(e^{-j\omega})$  a la capacité d'améliorer la robustesse en stabilité si les paramètres sont choisis d'une façon optimale.

### 3.4.2. Amélioration de la sensibilité directe en sortie:

Rappelons ici que la matrice de sensibilité directe en sortie, fournie par le contrôleur primaire  $S_{y_0}(z^{-1})$ , donne une information sur les performances nominales NP du système bouclé [GK88]. L'objectif ici est d'améliorer la marge de robustesse de NP en basses fréquences à travers la minimisation des valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité directe  $S_{y_1}$ , qui est fournie par le contrôleur robustifié. Cet objectif peut être assuré par le choix optimal de la matrice de Youla  $Q(z^{-1})$  en utilisant l'expression ci-dessous :

$$S_{y_1} = (I_{n \times n} + G_d K_1)^{-1} \quad (3.29)$$

La relation reliant la matrice de Youla et la sensibilité directe initiale est donnée par [GD14] :

$$S_{y_1} = (I_{n \times n} - N_r Q Y_{\ell_0}^{-1}) S_{y_0} \quad (3.30)$$

On peut constater dans l'équation (3.30) que la matrice de Youla a la capacité d'améliorer les performances nominales du système bouclé par le contrôleur robustifié.

#### Preuve :

Pour obtenir l'équation (3.30), on substitue les deux matrices :  $G_d = D_\ell^{-1} N_\ell$  et  $K_1 = X_{\ell_1} Y_{\ell_1}^{-1}$  dans l'équation (3.29), on obtient donc l'expression suivante :

$$S_{y_1} = (I_{n \times n} + D_\ell^{-1} N_\ell X_{\ell_1} Y_{\ell_1}^{-1})^{-1} \quad (3.31)$$

A partir l'équation (3.31), on obtient :

$$S_{y_1} = Y_{\ell_1} (D_\ell Y_{\ell_1} + N_\ell X_{\ell_1})^{-1} D_\ell \quad (3.32)$$

Si l'on tient compte l'identité de Bézout suivante  $D_\ell Y_{\ell_1} + N_\ell X_{\ell_1} = I_{n \times n}$ . On aura donc:

$$S_{y_1} = Y_{\ell_1} D_\ell \quad (3.33)$$

Par ailleurs, à partir l'équation (3.9), en substituant la matrice polynomiale  $Y_{\ell_1}$  dans l'équation (3.33), on obtient donc :

$$S_{y_1} = (Y_{\ell_0} - N_r Q) D_\ell = Y_{\ell_0} D_\ell - N_r Q D_\ell = (I_{n \times n} - N_r Q Y_{\ell_0}^{-1}) Y_{\ell_0} D_\ell \quad (3.34)$$

notons ici que la matrice de sensibilité directe fournie par le contrôleur prédictif primaire est définie par  $S_{y_0} = Y_{\ell_0} D_\ell$ . En la substituant dans l'équation (3.34), on aura :

$$S_{y_1} = (I_{n \times n} - N_r Q Y_{\ell_0}^{-1}) S_{y_0} \quad (3.35)$$

Finalement, il est facile de constater dans l'équation (3.35) que  $\sigma_{max}[S_{y_1}(e^{-j\omega})]$  représente la somme de  $\sigma_{max}[S_{y_0}(e^{-j\omega})]$  et  $\sigma_{max}[I_{n \times n} - N_r(e^{-j\omega})Q(e^{-j\omega})Y_{\ell_0}^{-1}(e^{-j\omega})]$  à l'échelle logarithmique et cela pour chaque pulsation  $\omega$ . Par conséquent, le lieu de  $\sigma_{max}[S_{y_1}(e^{-j\omega})]$  peut fournir une pente très prononcée comparée a celle fournie par le lieu de  $\sigma_{max}[S_{y_0}(e^{-j\omega})]$  en basse fréquences. Ceci confirme clairement que la matrice de Youla  $Q(e^{-j\omega})$  a la capacité d'améliorer les performances nominales du système bouclé par le contrôleur robustifié si et seulement si les paramètres de  $Q$  sont bien choisis.

### 3.4.3. Amélioration de la sensibilité directe en entrée :

Cette matrice de sensibilité représente le transfert reliant le vecteur d'entrée  $U + d_u$  avec celui des perturbations  $d_u$  affectant l'entrée du post-compensateur  $K_1$ . Elle est définie selon la paramétrisation de Youla et la factorisation co-première du contrôleur  $K_1 = Y_{r_1}^{-1} X_{r_1}$  (respectivement le modèle  $G_d = N_r D_r^{-1}$ ), par l'expression suivante [ZG81, OH03, GD14] :

$$S_{u_1} = (I_{m \times m} + K_1 G_d)^{-1} \quad (3.36)$$

Cette expression peut être reformulée en fonction de la sensibilité initiale  $S_{u_0}$  et la matrice  $Q$  comme suit :

$$S_{u_1} = S_{u_0} (I_{m \times m} - Y_{r_0}^{-1} Q N_\ell) \quad (3.37)$$

Il est clair de constater dans l'équation (3.37) que la matrice  $Q$  à la capacité de modifier l'allure des valeurs singulières maximales de la matrice de sensibilité  $S_{u_0}$ .

**Preuve:**

Pour obtenir l'équation (3.37), on substitue les deux matrices :  $G_d = N_r D_r^{-1}$  et  $K_1 = Y_{r_1}^{-1} X_{r_1}$  dans l'équation (3.22). On obtient donc l'expression suivante :

$$S_{u_1} = (I_{m \times m} + Y_{r_1}^{-1} X_{r_1} N_r D_r^{-1})^{-1} = [Y_{r_1}^{-1} (Y_{r_1} D_r + X_{r_1} N_r) D_r^{-1}]^{-1}$$

$$S_{u_1} = D_r (Y_{r_1} D_r + X_{r_1} N_r)^{-1} Y_{r_1} = D_r Y_{r_1} \quad (3.38)$$

Considérons à présent, de l'équation (3.9). En remplaçant la matrice polynomiale  $Y_{r_1}$  dans l'équation (3.38), on obtient donc :

$$S_{u_1} = D_r (Y_{r_0} - Q N_\ell)$$

$$S_{u_1} = S_{u_0} - D_r Q N_\ell = S_{u_0} (I_{m \times m} - Y_{r_0}^{-1} Q N_\ell) \quad (3.39)$$

notons ici que la matrice de sensibilité directe en entrée fournie par le contrôleur prédictif primaire est celle donnée par  $S_{u_0} = D_r Y_{r_0}$

**3.4.4. Amélioration de la sensibilité complémentaire en entrée :**

Le transfert décrivant la sensibilité complémentaire amenée à l'entrée du modèle est similairement défini comme celui donné par l'équation (1.50). On obtient donc l'expression ci-dessous [ZG81, OH03, GD14] :

$$T_{u_1} = K_1 G_d (I_{m \times m} + K_1 G_d)^{-1} \quad (3.40)$$

En substituant les deux matrices polynomiales  $K_1 = X_{\ell_1} Y_{\ell_1}^{-1}$  et  $G_d = D_\ell^{-1} N_\ell$  dans l'équation (3.40), on obtient l'expression finale suivante :

$$T_{u_1} = (I_{n \times n} + D_r Q X_{\ell_0}^{-1}) T_{u_0} \quad (3.41)$$

Il est clair de constater dans l'équation (3.41) que le choix optimal de la matrice  $Q$  peut modifier l'allure du lieu des valeurs singulières maximales de  $S_{u_0}$ .

**Preuve :**

Sachant que l'expression (3.40) est équivalente à celle donnée par :

$$T_{u_1} = K_1 (I_{n \times n} + G_d K_1)^{-1} G_d \quad (3.42)$$

En substituant les deux matrices polynomiales  $K_1 = X_{\ell_1} Y_{\ell_1}^{-1}$  et  $G_d = D_\ell^{-1} N_\ell$  dans l'équation (3.42), on aura donc :

$$T_{u_1} = X_{\ell_1} Y_{\ell_1}^{-1} (I_{n \times n} + D_\ell^{-1} N_\ell X_{\ell_1} Y_{\ell_1}^{-1})^{-1} D_\ell^{-1} N_\ell \quad (3.43)$$

Or, l'expression (4.43) peut encore être simplifiée comme suit :

$$T_{u_1} = X_{\ell_1} Y_{\ell_1}^{-1} [D_\ell^{-1} (D_\ell Y_{\ell_1} + N_\ell X_{\ell_1}) Y_{\ell_1}^{-1}]^{-1} D_\ell^{-1} N_\ell \quad (3.44)$$

ce qui implique les expressions ci-dessous :

$$T_{u_1} = X_{\ell_1} Y_{\ell_1}^{-1} Y_{\ell_1} (D_\ell Y_{\ell_1} + N_\ell X_{\ell_1})^{-1} D_\ell D_\ell^{-1} N_\ell \quad (3.45)$$

$$T_{u_1} = X_{\ell_1} (D_\ell Y_{\ell_1} + N_\ell X_{\ell_1})^{-1} N_\ell = X_{\ell_1} N_\ell \quad (3.46)$$

A présent, en combinant les équations (3.9) et (3.46), on obtient les expressions suivantes :

$$T_{u_1} = (X_{\ell_0} + D_r Q) N_\ell \quad (3.47)$$

$$T_{u_1} = (I_{n \times n} + D_r Q X_{\ell_0}^{-1}) X_{\ell_0} N_\ell \quad (4.48)$$

Sachant que la sensibilité initiale  $T_{u_0}$  est définie par  $T_{u_0} = X_{\ell_0} N_\ell$ , d'où :

$$T_{u_1} = (I_{n \times n} + D_r Q X_{\ell_0}^{-1}) T_{u_0} \quad (3.49)$$

### 3.4.5. Conservation de la dynamique de poursuite :

Lors de la paramétrisation, la dynamique de poursuite fournie par le contrôleur prédictif primaire reste inchangée. Autrement dit, le comportement d'entrée-sortie initial est toujours conservé pour tout choix effectué sur la matrice  $Q(z^{-1})$ . En conséquence, la relation ci-dessous reste toujours vérifiée [GD14] :

$$G_{cl_1} = G_{cl_0} = N_r Z_r \quad (4.50)$$

#### Preuve :

La dynamique de poursuite des trajectoires de référence assurée par le contrôleur robustifié est définie comme suit :

$$G_{cl_1} = G_d K_1 (I_{n \times n} + G_d K_1)^{-1} H_1 \quad (3.51)$$

Cette dynamique de poursuite peut encore être donnée, en fonction de la sensibilité complémentaire en sortie, par l'expression ci-dessous :

$$G_{cl_1} = T_{y_1} H_1 \quad (4.52)$$

En remplaçant les deux matrices polynomiales  $H_1 = X_{r_1}^{-1} Z_r$  et  $T_{y_1} = N_r X_{r_1}$  dans l'équation (4.52), on obtient l'expression suivante :

$$G_{cl_1} = N_r X_{r_1} X_{r_1}^{-1} Z_r = N_r Z_r \quad (3.53)$$

En tenant compte du transfert décrivant la dynamique de poursuite fournie par le contrôleur primaire :

$$G_{cl_0} = G_d (I_{m \times m} + K_0 G_d)^{-1} K_0 H_0 = T_{y_0} H_0 = N_r X_{r_0} X_{r_0}^{-1} Z_r = N_r Z_r \quad (3.54)$$

A partir des équations (3.53) et (3.54), on peut conclure l'égalité suivante  $G_{cl_1} = G_{cl_0}$ . Conformément à toutes les preuves précédentes, le problème de la robustification du contrôleur primaire s'articulera sur la détermination optimale des paramètres de la matrice polynomiale  $Q(z^{-1})$  assurant un transfert d'ordre très réduit et réalisant tous les objectifs suscités. Cette étape sera détaillée dans la section suivante pendant laquelle un nouveau problème de sensibilité mixte sera reformulé en fonction de la matrice polynomiale inconnue  $Q(z^{-1})$ .

### 3.5. Détermination de la matrice polynomiale $Q(z^{-1})$ :

Dans la théorie de la commande robuste, la synthèse de la matrice polynomiale de Youla est souvent effectuée par deux méthodes existantes dans la littérature [RP03, RP08, ZG81, OH03, GD14]. La première méthode est basée sur la détermination du modèle généralisé à partir de la configuration standard donnée par la **Figure.3.5** (ou bien la **Figure.3.7**). Ensuite, un problème  $H_\infty$  est formulé via le système d'interconnexion de ce modèle avec le transfert de  $Q(z^{-1})$  à optimiser. Finalement, un algorithme d'optimisation est appliqué afin de résoudre ce problème dont la solution optimale obtenue assure la représentation d'état de la matrice  $Q(z^{-1})$ .

Toutefois pour certaines applications industrielles, cette méthode de synthèse peut fournir de bons résultats quant à la garantie des marges acceptables de la stabilité robuste et/ou les performances nominales. Néanmoins, lorsque le nombre des performances (à satisfaire) est

très élevé, cette méthode peut présenter plusieurs anomalies à savoir, la présence des commandes très fluctuantes provoquant l'instabilité du système bouclé, l'obtention d'un transfert d'ordre très élevé de la matrice  $Q(z^{-1})$  conduisant, par conséquent, un transfert d'ordre immense pour le contrôleur robustifié. Ceci peut produire plusieurs problèmes d'implémentation et de maintenance. Pour remédier à ces anomalies, la synthèse de la matrice polynomiale de Youla est effectuée via l'optimisation quadratique sous contraintes.

Cette idée consiste à évaluer le critère  $H_\infty$  dans une fourchette de fréquences contenant un nombre important de pulsations. Ensuite, la fonction objective à plusieurs variables est minimisée. La solution optimale fournie par cette minimisation permet de définir les coefficients de la matrice de Youla. Cette méthode présente plusieurs avantages notamment l'inclusion des contraintes fréquentielles et temporelles dans le problème d'optimisation à résoudre. Néanmoins, leur efficacité dépend fortement de la convergence de l'algorithme utilisé lors la résolution du problème d'optimisation [TM93, SMG12, GD14]. Notre objectif étant plus précis, nous allons synthétiser le transfert de Youla mais avec un ordre très réduit. Ce transfert est obtenu via l'application séparée de la méthode  $H_\infty$  afin de faire ressortir des sensibilités satisfaisant toutes les contraintes du cahier de charges. Ensuite, les paramètres de la matrice de Youla sont déterminés systématiquement via l'application de l'approche de l'identification fréquentielle où le critère est préalablement imposé par l'utilisateur. A cet effet, dans la suite de ce travail, nous allons détailler le principe des deux méthodes de synthèse citées précédemment ensuite on présentera notre proposition qui constituera notre contribution dans ce travail.

### 3.5.1. Solution basée sur l'application explicite de la méthode $H_\infty$ :

L'idée adoptée pour le calcul de la matrice polynomiale  $Q(z^{-1})$  est basée sur la détermination, *a priori*, de la matrice de transfert du modèle augmenté généralisé  $M(z^{-1})$ , qui est illustré par la **Figure.3.8** suivante [GD14, SMG12, AMS16, AMS18] :

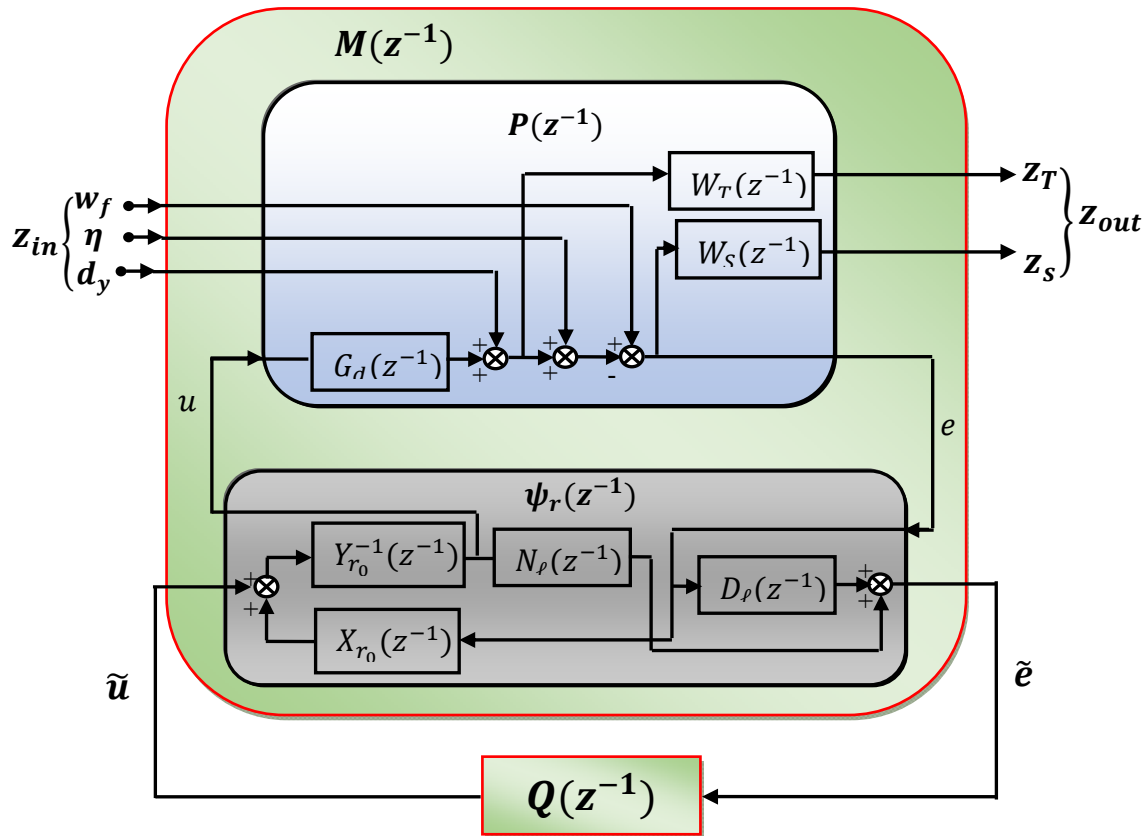


Figure.3.8 : Système d'interconnexion  $LFT_1(M,Q)$

D'après la **Figure.3.8**, le vecteur d'entrée exogène et de sortie exogène du modèle augmenté généralisé  $M(z^{-1})$  sont respectivement représentés par  $z_{in}$  et  $z_{out}$ . En outre, la détermination de la matrice polynomiale  $Q(z^{-1})$  est assurée via la minimisation de la norme  $H_\infty$  de la Transformation Fractionnaire Linéaire inférieure  $LFT_\ell$  appliquée sur le système d'interconnexion  $\langle M(z^{-1}), Q(z^{-1}) \rangle$ . Sachant que la représentation d'état de la matrice polynomiale  $M(z^{-1})$  peut être calculée en appliquant la fonction `dlinmod(*)` qui est disponible dans la bibliothèque du `MATLAB/Toolbox/Simulink`. Cette représentation d'état est ensuite utilisée pour synthétiser la représentation d'état de la matrice  $Q(z^{-1})$  en utilisant la fonction `dhinsyn(*)` qui est disponible dans la bibliothèque du `MATLAB/Toolbox/Robust`.

### 3.5.2. Solution basée sur l'optimisation sous contraintes :

L'idée, adoptée pour déterminer la matrice polynomiale  $Q(z^{-1})$ , est basée sur la minimisation de la norme  $H_\infty$  de  $LFT_\ell\{M(z^{-1}), Q(z^{-1})\}$  (voir la **Figure.3.8**). Cette dernière est obtenue comme suit [MJ89, GD14]:



$$\min_{Q \in \mathcal{RH}_\infty} J(Q(z^{-1})) = \min_{Q \in \mathcal{RH}_\infty} \|LFT_\ell\{M(z^{-1}), Q(z^{-1})\}\|_\infty \quad (3.55)$$

sachant que,

$$LFT_\ell\{M(z^{-1}), Q(z^{-1})\} = M_{11} + M_{12}Q(I - M_{22}Q)^{-1}M_{21} \quad (3.56)$$

De plus, la relation d'entrées-sorties exogènes, est donnée par la forme matricielle ci-dessous:

$$\begin{bmatrix} z_T \\ z_S \\ \dots \\ \tilde{e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_{11}(z^{-1}) & \vdots & M_{12}(z^{-1}) \\ \dots & \vdots & \dots \\ M_{21}(z^{-1}) & \vdots & M_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix}}_{M(z^{-1})} \begin{bmatrix} w_f \\ d_y \\ \eta \\ \dots \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Ainsi que la commande stabilisant la boucle est donnée par :

$$\tilde{u} = Q(z^{-1})\tilde{e} \quad (3.58)$$

D'après la **Figure.3.8**, on obtient les équations suivantes:

$$\begin{cases} z_T = W_T T_{y_0} w_f + W_T S_{y_0} d_y - W_T T_{y_0} \eta + W_T S_{y_0} G_d Y_{r_0}^{-1} \tilde{u} \\ z_S = W_S S_{y_0} w_f + W_S S_{y_0} d_y - W_S T_{y_0} \eta + W_S S_{y_0} G_d Y_{r_0}^{-1} \tilde{u} \\ \tilde{e} = D_\ell w_f + D_\ell d_y - D_\ell G_d Y_{r_0}^{-1} X_{r_0} \eta \end{cases} \quad (3.59)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} S_{y_0} = (I_{n \times n} + G_d Y_{r_0}^{-1} X_{r_0})^{-1} \\ T_{y_0} = (I_{n \times n} + G_d Y_{r_0}^{-1} X_{r_0})^{-1} G_d Y_{r_0}^{-1} X_{r_0} \end{cases} \quad (3.60)$$

A partir des équations (3.57) à (3.60), on obtient la matrice  $M(z^{-1})$  exprimée comme suit:

$$\begin{bmatrix} z_T \\ z_S \\ \dots \\ \tilde{e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} [W_T T_{y_0} & W_T S_{y_0} & -W_T T_{y_0}] & \vdots & [W_T S_{y_0} G_d Y_{r_0}^{-1}] \\ [W_S T_{y_0} & W_S S_{y_0} & -W_S T_{y_0}] & \vdots & [W_S S_{y_0} G_d Y_{r_0}^{-1}] \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ [D_\ell & D_\ell & -D_\ell G_d Y_{r_0}^{-1} X_{r_0}] & \vdots & 0 \end{bmatrix}}_{M(z^{-1})} \begin{bmatrix} w_f \\ d_y \\ \eta \\ \dots \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

où chaque transfert de celle-ci est donné comme suit:

$$\begin{cases} M_{11} = \begin{bmatrix} W_T T_{y_0} & W_T S_{y_0} & -W_T T_{y_0} \\ W_S T_{y_0} & W_S S_{y_0} & -W_S T_{y_0} \end{bmatrix} \\ M_{12} = \begin{bmatrix} W_T S_{y_0} G_d Y_{r_0}^{-1} \\ W_S S_{y_0} G_d Y_{r_0}^{-1} \end{bmatrix} \\ M_{21} = [D_\ell \quad D_\ell \quad -D_\ell G_d Y_{r_0}^{-1} X_{r_0}] \\ M_{22} = 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

Dans ce cas, le critère à minimiser est défini par:

$$\min_{Q \in \mathcal{RH}_\infty} J(Q(z^{-1})) = \min_{Q \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{bmatrix} J_{11}(Q(z^{-1})) & J_{12}(Q(z^{-1})) & J_{13}(Q(z^{-1})) \\ J_{21}(Q(z^{-1})) & J_{22}(Q(z^{-1})) & J_{23}(Q(z^{-1})) \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (3.63)$$

$$\text{sachant que } \begin{cases} J_{11}(Q(z^{-1})) = W_T [I - S_{y_0} (I - G_d Y_{r_0}^{-1} Q D_\ell)] \\ J_{12}(Q(z^{-1})) = W_T S_{y_0} [I + G_d Y_{r_0}^{-1} Q D_\ell] \\ J_{13}(Q(z^{-1})) = -W_T [I - S_{y_0} (I + G_d Y_{r_0}^{-1} Q D_\ell G_d Y_{r_0}^{-1} X_{r_0})] \\ J_{21}(Q(z^{-1})) = W_S [I - S_{y_0} (I - G_d Y_{r_0}^{-1} Q D_\ell)] \\ J_{22}(Q(z^{-1})) = W_S S_{y_0} [I + G_d Y_{r_0}^{-1} Q D_\ell] \\ J_{23}(Q(z^{-1})) = -W_S [I - S_{y_0} (I - G_d Y_{r_0}^{-1} Q D_\ell G_d Y_{r_0}^{-1} X_{r_0})] \end{cases} \quad (3.64)$$

La matrice polynomiale  $Q(z^{-1})$  est déterminée par la minimisation du problème donné par l'équation (3.63) en utilisant l'un des algorithmes d'optimisation suivants: optimisation globale, programmation non linéaire sous contraintes ainsi que d'autres algorithmes. Dans ce cas, la matrice de transfert  $Q(z^{-1})$  est supposée ainsi:

$$Q(z^{-1}) = \begin{bmatrix} Q_{11}(z^{-1}) & \cdots & Q_{1n}(z^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{m1}(z^{-1}) & \cdots & Q_{m \times n}(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

De l'équation (3.65), chaque transfert  $\{Q_{ij}(z^{-1})\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$  de la matrice polynomiale  $Q(z^{-1})$  est supposé sous la forme ci-dessous :

$$Q_{ij}(z^{-1}) = \frac{\theta_{ij} \prod_{k=1}^{k_{max}} (z^{-1} - z_{ij_k})}{\prod_{l=1}^{l_{max}} (z^{-1} - p_{ij_l})} \quad (3.66)$$

avec  $k_{max}$ ,  $l_{max}$  représentant, respectivement, le nombre de zéros  $z_{ij_k}$  et le nombre de pôles  $p_{ij_l}$  du transfert  $Q_{ij}(z^{-1})$  choisis *a priori* par l'utilisateur,  $\theta_{ij}$  représente le gain statique correspondant. De plus, tous les pôles ainsi que les zéros  $z_{ij_k}$  de chaque transfert  $Q_{ij}(z^{-1})$  doivent satisfaire les deux conditions  $|z_{ij_k}| < 1$  et  $|p_{ij_l}| < 1$  respectivement. Dans ce cas, le vecteur (à optimiser) est celui donné comme suit [RP03, RP08] :

$$x = \left[ \underbrace{\theta_{11}, z_{11_1}, \dots, z_{11_{k_{max}}}, p_{11_1}, \dots, p_{11_{l_{max}}}}_{Q_{11}}, \dots, \underbrace{\theta_{mn}, z_{mn_1}, \dots, z_{mn_{k_{max}}}, p_{mn_1}, \dots, p_{mn_{l_{max}}}}_{Q_{mn}} \right]^T \quad (3.67)$$

sachant que le critère (3.63) dépend de la pulsation  $\omega$  et du vecteur  $x$ , il vient donc :

$$\min_{Q \in \mathcal{RH}_\infty} J(Q) = \min_x \max_{0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_e} \sigma_{max}} \begin{bmatrix} J_{11}(Q(e^{-j\omega}, x)) & J_{12}(Q(e^{-j\omega}, x)) & J_{13}(Q(e^{-j\omega}, x)) \\ J_{21}(Q(e^{-j\omega}, x)) & J_{22}(Q(e^{-j\omega}, x)) & J_{23}(Q(e^{-j\omega}, x)) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Par ailleurs, la minimisation du critère (3.68) nécessite, *a priori*, la discrétisation du demi-cercle unité de chaque transfert  $\{J_{ij}(Q(e^{-j\omega}, x))\}_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}}$ , d'où, une reformulation du critère précédent en fonction du vecteur  $x$  seul comme suit:

$$\min_x \sigma_{max} \begin{bmatrix} J_{11}(Q(e^{-j\alpha_k}, x)) & J_{12}(Q(e^{-j\alpha_k}, x)) & J_{13}(Q(e^{-j\alpha_k}, x)) \\ J_{21}(Q(e^{-j\alpha_k}, x)) & J_{22}(Q(e^{-j\alpha_k}, x)) & J_{23}(Q(e^{-j\alpha_k}, x)) \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\text{avec : } \alpha_k = \frac{\pi(k-1)}{T_e(N-1)} \text{ pour } k = 1, 2, \dots, N \quad (3.70)$$

Il faut noter ici que l'inconvénient majeur de cette méthode de synthèse est la mauvaise convergence de l'algorithme d'optimisation utilisé pour la résolution du problème (3.69). Cette mauvaise convergence est due au nombre élevé des paramètres à optimiser car la solution fournie peut être rapidement rattrapée à des minima locaux produisant, par conséquent, un transfert de Youla inacceptable du point de vue pratique. De plus, cette méthode de synthèse fournie une matrice de Youla d'ordre très élevé qui compliquerait la mise en œuvre du contrôleur 2-DOF-MGPC robustifié, entraînant des coûts élevés et provoquant d'éventuels problèmes de maintenance.

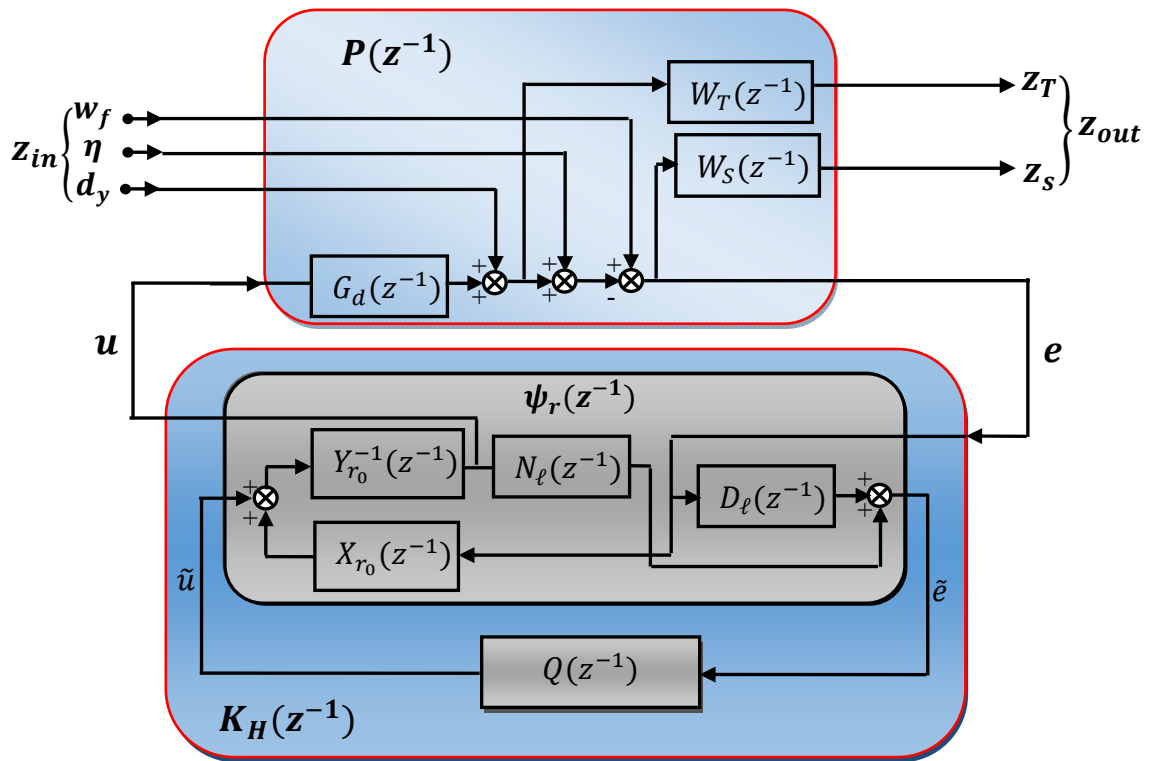
### 3.5.3. Solution basée sur l'application implicite la méthode $H_\infty$ :

Dans cette section, nous avons proposé une nouvelle stratégie de robustification qui est plus simple que celles qui sont citées dans les deux méthodes précédentes [MJ89, GD14]. L'objectif principal de cette stratégie proposée étant d'améliorer les marges de robustesse (RS et NP) du contrôleur prédictif primaire [RP03, SM08].

Cet objectif est atteint en choisissant des formes spécifiques des valeurs singulières maximales de différentes sensibilités fournies par le contrôleur prédictif robustifié. En comparaison avec la synthèse du contrôleur robuste par la méthode  $H_\infty$  citée dans le chapitre précédent, les formes désirées de sensibilité sont assurées par un choix adéquat des matrices de pondération dans le critère de sensibilité mixte correspondant. De ce fait, l'utilisation de cette stratégie de commande dans notre proposition peut assurer l'information *a priori* sur l'allure désirée des matrices sensibilités du contrôleur prédictif robustifié qui sont données en fonction de la matrice de Youla. Par conséquent, le problème de synthèse de cette dernière

revient à minimiser l'écart qui apparaît entre les valeurs singulières maximales des sensibilités fournies par le contrôleur  $H_\infty$  et celles fournies par le contrôleur prédictif robustifié. Cette minimisation est assurée par l'application des approches basées sur l'identification fréquentielle dans laquelle la matrice de Youla peut être élaborée avec un ordre très réduit. D'autre part, notre méthode proposée n'est pas limitée par une information préalable sur la structure de cette matrice. Elle est donc déduite systématiquement par la méthode d'identification fréquentielle.

La synthèse du contrôleur  $H_\infty$ , qui a été mentionné dans le chapitre précédent, est assurée par la minimisation de la norme  $H_\infty$  de  $LFT_\ell$  appliquée sur le système d'interconnexion  $\langle P(z^{-1}), K_H(z^{-1}) \rangle$  présenté par la **figure.3.9** comme suit [MJ89, GD14, AMS16] :



**Figure.3.9** : Système d'interconnexion LFT ( $P, K_H$ )

Selon la **Figure.3.9**, la synthèse du contrôleur robuste  $K_H(z^{-1})$  est effectuée via la résolution d'un critère donné comme suit :

$$\min_{Q \in \mathcal{RH}_\infty} \|LFT_\ell\{P(z^{-1}), K_H(z^{-1})\}\|_\infty \quad (3.71)$$

Dans ce cas, la minimisation du critère (3.71) conduit à la résolution du problème de sensibilité mixte défini comme suit [GK88, OM04]:

$$\min_{K_H \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{bmatrix} W_T(z^{-1})T_H(z^{-1}) \\ W_S(z^{-1})S_H(z^{-1}) \end{bmatrix} \right\|_\infty \Rightarrow \min_{K_H \in \mathcal{RH}_\infty} \max_{\omega \in \left[0, \frac{\pi}{T_e}\right]} \left\{ \sigma_{\max} \begin{bmatrix} W_T(e^{-j\omega}).T_H(e^{-j\omega}) \\ W_S(e^{-j\omega}).S_H(e^{-j\omega}) \end{bmatrix} \right\} \quad (3.72)$$

Le critère (3.71) est numériquement équivalent à l'inégalité ci-dessous :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_T(z^{-1})T_H(z^{-1}) \\ W_S(z^{-1})S_H(z^{-1}) \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (3.73)$$

où  $\gamma$  désigne le niveau de performance  $H_\infty$  à atteindre.  $W_S(z^{-1})$  et  $W_T(z^{-1})$  représentent les matrices de pondération qui pénalisent  $S_H(z^{-1})$  et  $T_H(z^{-1})$  respectivement. L'inverse de chaque pondération représente l'allure désirée de la sensibilité correspondante. Notons ici que, si les pondérations précédentes sont bien sélectionnées, le problème d'optimisation (3.73) serait résolu par la fonction *dhinflmi* du Matlab. Cette dernière fournit la représentation de l'état du contrôleur robuste  $K_H(z^{-1})$  avec lequel un compromis optimal de robustesse entre NP et RS est toujours atteint.

### 3.5.3.1. Détermination directe de la matrice de Youla :

Il s'agit de déterminer la matrice de Youla par la comparaison directe entre les matrices de sensibilités fournies par le contrôleur  $K_H(z^{-1})$  et celles fournies par le contrôleur prédictif robustifié. Afin d'atteindre cet objectif, il suffit d'assurer l'égalité entre les deux sensibilités directes (ou complémentaires) des deux contrôleurs précédents en faisant ressortir la matrice idéale de Youla  $Q_{idéal}(z^{-1})$ . On doit alors satisfaire la condition ci-dessous :

$$T_y(z^{-1}) = T_H(z^{-1}) \quad (3.74)$$

En substituant l'équation (3.24) dans l'équation (3.74), on aura donc l'expression suivante:

$$Q_{idéal} = X_{r_0} (T_{y_0}^{-1} T_H - I_{n \times n}) D_\ell^{-1} \quad (3.75)$$

L'équation (3.75) fournit une matrice de Youla d'ordre très élevé. C'est pour cette raison qu'on doit passer par l'identification fréquentielle afin d'élaborer une nouvelle matrice de Youla mais avec un ordre très raisonnable du point de vue implémentation du contrôleur prédictif robustifié dans la boucle de commande.

### 3.5.3.2. Détermination de la matrice de Youla par l'identification fréquentielle :

Dans ce cas, la synthèse de la matrice de Youla avec un ordre réduit  $Q^*(z^{-1})$  se traduit par la satisfaction de la condition suivante :

$$\min_{Q^* \in \mathcal{RH}_\infty} \xi(x_q) = \min_{Q^* \in \mathcal{RH}_\infty} \left( \left\| \left\| Q^*(x_q, e^{-j\alpha_k}) - Q_{idéal}(e^{-j\alpha_k}) \right\| \right\|_2 \right)^2 \quad (3.76)$$

avec  $x_q$  qui un vecteur contenant contient tous les pôles, les zéros et les gains de la matrice polynomiale  $Q^*(z^{-1})$ . La résolution du problème (3.76) est assurée par un algorithme d'optimisation basé sur l'identification fréquentielle. Dans ce cas, la solution optimale  $x_q^*$  doit assurer la bonne minimisation de la distance (norme quadratique) entre le transfert prédit  $Q^*$  et les données mesurées via le transfert idéal  $Q_{idéal}$ . Pour le traitement d'un grand nombre de données fréquentielles, on est amené à des problèmes de moindres carrés exclusivement. Notons ici que la norme quadratique fréquentielle est particulièrement importante car c'est elle que l'on visualise en superposant les transferts mesurés  $\left\{ Q_{idéal_{ij}} \right\}_{\substack{i=1,2,..,m \\ j=1,2,..,n}}$  avec les transferts identifiés  $\left\{ Q_{ij}^* \right\}_{\substack{i=1,2,..,m \\ j=1,2,..,n}}$ . Dans notre travail, l'identification paramétrique de chaque transfert  $Q_{ij}^*$  est assurée par l'application de la fonction de Matlab *fitfrd*. L'application de cette fonction a pour but d'utiliser la réponse fréquentielle du transfert  $Q_{idéal_{ij}}$  afin de fournir un transfert d'ordre très réduit approximant, en module et en phase, le transfert original. Le principe de cette fonction consiste à évaluer le transfert  $Q_{idéal_{ij}}(e^{-j\alpha_k})$  dans  $k$  points répartis sur la bande fréquentielle  $\omega \in \left[ 0, \frac{\pi}{T_e} \right]$ . Cette évaluation est effectuée par la commande *frd* du Matlab avec laquelle on peut construire les données d'identification  $\left[ \alpha_k, Q_{idéal_{ij}}(e^{-j\alpha_k}) \right]^T$  correspondant au transfert  $Q_{idéal_{ij}}(z^{-1})$ . Ensuite, la commande *fitfrd* est utilisée afin de fournir une représentation d'état du transfert  $Q_{ij}^*(z^{-1})$ . Cette représentation nécessite, le choix préalable d'un ordre fixé par l'utilisateur. Afin d'assurer une représentation optimale de ce transfert, nous allons proposer l'algorithme suivant:

**Algorithme : Choix de l'ordre optimal du transfert  $Q_{ij}^*(z^{-1})$**

**Étape 0:** De l'équation (3.75), on détermine les transferts  $Q_{idéal_{ij}}(z^{-1})$  ainsi que l'ordre  $n_{Q_{ij}}$  correspondant. Pour  $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, n$ , on détermine la réponse fréquentielle du transfert  $Q_{idéal_{ij}}(z^{-1})$  puis on construit, via la fonction `frd`, les données d'identification  $[\alpha_k, Q_{idéal_{ij}}(e^{-j\alpha_k})]^T$ . On choisit l'ordre  $n_{Q_{ij}}^*$  qui doit satisfaire la condition  $n_{Q_{ij}}^* \leq n_{Q_{ij}}$  et la précision (à atteindre)  $\zeta_{mod_{ij}}^*$  puis on passe à l'étape suivante.

**Étape 1:** On applique la fonction du Matlab `fitfrd` sur les données d'identification  $[\alpha_k, Q_{idéal_{ij}}(e^{-j\alpha_k})]^T$  afin de faire ressortir la représentation d'état de  $Q_{ij}^*(z^{-1})$  puis on passe à l'étape suivante.

**Étape 2:** On calcule la réponse fréquentielle  $Q_{ij}^*(e^{-j\alpha_k})$  puis on compare le module de cette réponse avec celui de  $Q_{idéal_{ij}}(e^{-j\alpha_k})$ . On obtient donc l'erreur en module  $\zeta_{mod_{ij}}$ .

**Étape 3:** si  $\zeta_{mod_{ij}} < \zeta_{mod_{ij}}^*$ , on fait décroître progressivement l'ordre  $n_{Q_{ij}}^*$  avec  $n_{Q_{ij}}^* = n_{Q_{ij}}^* - 1$ , on remplace  $[\alpha_k, Q_{ij}^*(e^{-j\alpha_k})]^T$  par  $[\alpha_k, Q_{idéal_{ij}}(e^{-j\alpha_k})]^T$  puis on passe à l'étape 1, sinon, on arrête le programme.

Cet algorithme est achevé par l'obtention d'une représentation optimale de  $Q_{ij}^*(z^{-1})$  assurant l'ordre réduit  $n_{Q_{ij}}^*$ .

**3.6. Simulations et interprétation des résultats**

La validation de la robustification proposée est effectuée sur le même système physique cité précédemment. Dans ce cas, le système bouclé utilisé dans cette simulation est celui donné par la configuration présentée dans la **Figure.3.1**. A cet effet, la factorisation de tous les transferts est choisie comme suit :

$$\begin{cases} G_d = D_\ell^{-1}N_\ell = (\Delta A)^{-1}z^{-1}\Delta B \\ K_0 = Y_{r_0}^{-1}X_{r_0} = (\Delta S_0)^{-1}R_0 \\ H_0 = X_{r_0}^{-1}Z_r = R_0^{-1}T_0 \end{cases} \quad (3.77)$$

où les transferts  $N_\ell, D_\ell, X_{r_0}, Y_{r_0}$  et  $Z_r$  sont respectivement définis par :

$$\begin{cases} N_\ell = z^{-1}\Delta B \\ D_\ell = \Delta A \\ X_{r_0} = R_0 \\ Y_{r_0} = \Delta S_0 \\ Z_r = T_0 \end{cases} \quad (3.78)$$

à partir des équations (3.9) et (3.67), la paramétrisation de Youla est présentée par le système ci-dessous :

$$\begin{cases} R_1 = R_0 + \Delta QA. \\ S_1 = S_0 - z^{-1}QB \\ T_1 = T_0 \end{cases} \quad (3.79)$$

De même à partir des équations (3.7), (3.8) et (3.79), les transferts représentant le pré-compensateur  $H_1$  ainsi que le post-compensateur  $K_1$  du contrôleur robustifié sont déterminées par :

$$\begin{cases} K_1 = Y_{r_1}^{-1}X_{r_1} = (\Delta S_0 - z^{-1}\Delta QB)^{-1}(R_0 + \Delta QA) \\ H_1 = X_{r_1}^{-1}Z_r = (R_0 + \Delta QA)^{-1}T_0 \end{cases} \quad (3.80)$$

En tenant compte de cela, les matrices de sensibilité initiales fournies par le contrôleur prédictif primaire sont données par :

$$\begin{cases} S_{y_0} = (I_{n \times n} + G_d(\Delta S_0)^{-1}R_0)^{-1} \\ T_{y_0} = [I_{n \times n} + G_d(\Delta S_0)^{-1}R_0]^{-1}G_d(\Delta S_0)^{-1}R_0 \end{cases} \quad (3.81)$$

ainsi que les deux sensibilités complémentaires  $T_H$  et  $T_{y_1}$  :

$$\begin{cases} T_H = G_d K_H (I_{m \times m} + G_d K_H)^{-1} \\ T_{y_1} = T_{y_0} (I_{m \times m} + R_0^{-1} \Delta QA) \end{cases} \quad (3.82)$$

D'où la matrice de transfert idéale de Youla qui est déduite par l'expression ci-dessous :

$$Q_{idéal} = X_{r_0} (T_{y_0}^{-1} T_H - I_{m \times m}) D_\ell^{-1} = R_0 (T_{y_0}^{-1} T_H - I_{m \times m}) (\Delta A)^{-1} \quad (3.83)$$

La synthèse du contrôleur robustifié à deux degrés de liberté  $(H_1(z^{-1}), K_1(z^{-1}))$  est effectuée par les trois étapes suivantes:

- ✓ *Synthèse du contrôleur primaire par la méthode GPC pluridimensionnelle* : Pendant la synthèse du contrôleur prédictif primaire à deux degrés de liberté  $(H_0(z^{-1}), K_0(z^{-1}))$ , la



bonne dynamique de poursuite du système bouclé a été assurée par le choix des paramètres de réglage qui ont été mentionnés dans le premier chapitre comme suit:

$$(N_1, [N_{2_1}, N_{2_2}], N_u, \lambda_{1,2,3}) = (1, [2, 2], 1, 10^{-2} \cdot [8, 5, 1]).$$

✓ *Synthèse du contrôleur robuste par la méthode  $H_\infty$*  : Lors de la synthèse du contrôleur robuste  $K_H(z^{-1})$ , la bonne dynamique de rejection des incertitudes de modélisation (en particulier les incertitudes multiplicatives non structurées amenées à la sortie du modèle) ainsi que la bonne dynamique d'atténuation de l'effet des bruits de mesure ont été assurées par le choix des deux matrices de pondération qui ont été mentionnées dans le deuxième chapitre comme suit :

$$\begin{cases} M_{S_{ii}} = 2.4975, \omega_{B_{ii}} = 0.182 \times 10^{-2}, \varepsilon_{S_{ii}} = 1.1 \times 10^{-7} \\ M_{T_{ii}} = 2.5, \omega_{BT_{ii}} = 0.33 \times 10^{-2}, \varepsilon_{T_{ii}} = 0.1 \end{cases}$$

✓ *Détermination optimale de la matrice de Youla* : De l'équation (3.83), la matrice polynomiale désirée  $Q^*(z^{-1})$ , est obtenue par l'application de l'algorithme mentionné dans le paragraphe §3.5.3.2 dans lequel on utilise les données suivantes :

- $\alpha_k = \frac{\pi(k-1)}{30(N-1)}$  pour  $k = 1; \dots; 101$ .
- $\zeta_{mod_{ij}}^* = 10^{-2}$ , pour  $i = 1, 2, 3$  et  $j = 1, 2$ .

d'où la matrice polynomiale de Youla est obtenue comme suit :

$$Q^*(z^{-1}) = \begin{bmatrix} Q_{11}^*(z^{-1}) & Q_{12}^*(z^{-1}) \\ Q_{21}^*(z^{-1}) & Q_{22}^*(z^{-1}) \\ Q_{31}^*(z^{-1}) & Q_{32}^*(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

sachant que :

$$Q_{11}^*(z^{-1}) = \frac{-160.78 (1-0.1561z^{-1})(1+0.1405z^{-1}) (1+479 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.438 \times 10^{-7}z^{-2}) (1 + 888.4 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.527 \times 10^{-6}z^{-2})}{(1-z^{-1})(1-802.4 \times 10^{-6}z^{-1})(1 + 479.1 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.439 \times 10^{-7}z^{-2})(1 + 888.7 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.528 \times 10^{-6}z^{-2})}$$

$$Q_{12}^*(z^{-1}) = \frac{829.75 \times 10^{-3} (1-235.1 \times 10^{-6}z^{-1}) (1+1.098 \times 10^{-7}z^{-1}) (1 - 0.4079z^{-1} + 0.8876z^{-2})}{(1-z^{-1}) (1+513.5 \times 10^{-5}z^{-1}) (1-802.3 \times 10^{-6}z^{-1}) (1+1.097 \times 10^{-7}z^{-1})}$$

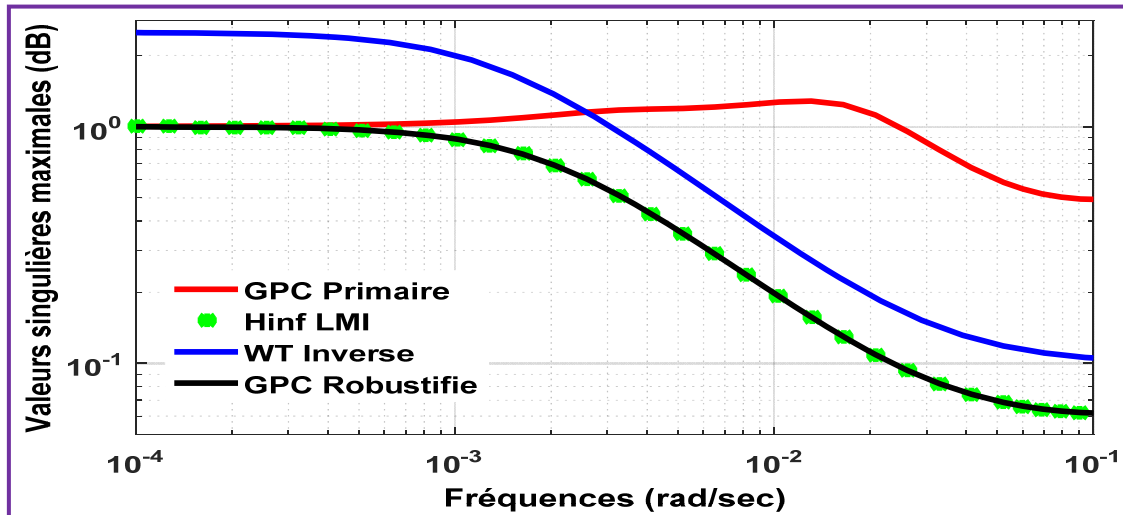
$$Q_{21}^*(z^{-1}) = \frac{1087 (1-0.1868z^{-1}) (1+0.1453z^{-1}) (1 + 479.8 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.44 \times 10^{-7}z^{-2}) (1 + 890.1 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.527 \times 10^{-6}z^{-2})}{(1-z^{-1}) (1-802.4 \times 10^{-6}z^{-1}) (1+479.9 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.44 \times 10^{-7}z^{-2}) (1 + 890.4 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.528 \times 10^{-6}z^{-2})}$$

$$Q_{22}^*(z^{-1}) = \frac{0.044 (1-0.002351z^{-1}) (1+4.441 \times 10^{-7}z^{-1}) (1 + 0.05013z^{-1} + 0.1257z^{-2})}{(1-z^{-1}) (1+5135 \times 10^{-6}z^{-1}) (1-802.3 \times 10^{-6}z^{-1}) (1+4.441 \times 10^{-7}z^{-1})}$$

$$Q_{31}^*(z^{-1}) = \frac{-865.45 (1-0.1584z^{-1}) (1+0.1486z^{-1}) (1 + 478.7 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.437 \times 10^{-7}z^{-2}) (1 + 887.7 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.527 \times 10^{-6}z^{-2})}{(1-z^{-1}) (1-802.4 \times 10^{-6}) (1 + 478.7 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.438 \times 10^{-6}z^{-2}) (1 + 888 \times 10^{-6}z^{-1} + 1.528 \times 10^{-6}z^{-2})}$$

$$Q_{32}^*(z^{-1}) = \frac{-19.982(1-0.002351z^{-1})(1-0.1551z^{-1}+0.2131z^{-2})}{(1-z^{-1})(1+5135 \times 10^{-6}z^{-1})(1-802.3 \times 10^{-6}z^{-1})}$$

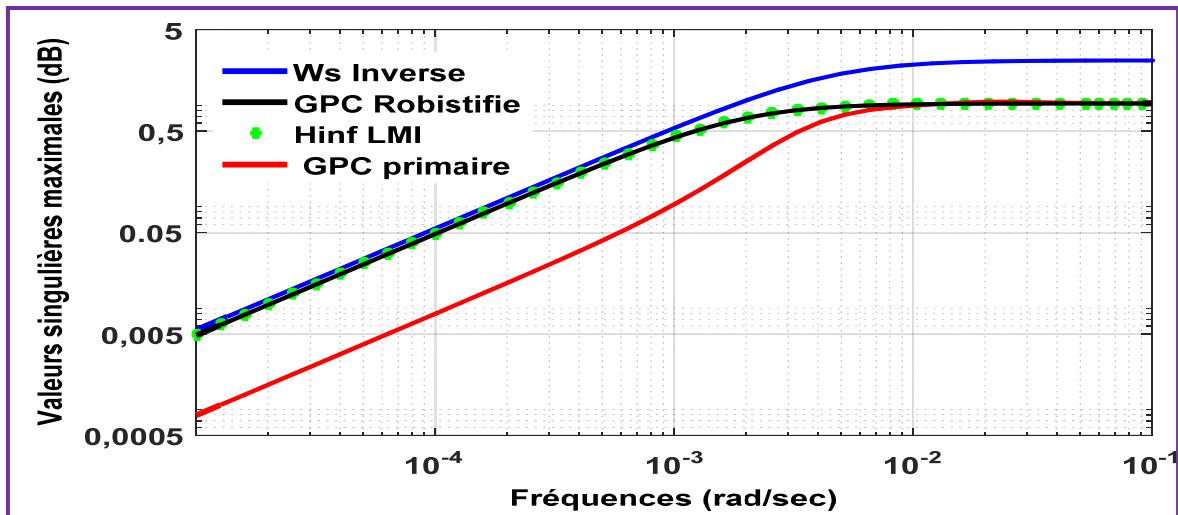
La **Figure.3.10** illustre la vérification de la condition de robustesse sur la stabilité robuste, et cela pour le système bouclé par les trois contrôleurs  $K_H(z^{-1})$ ,  $(H_0(z^{-1}), K_0(z^{-1}))$  et  $(H_1(z^{-1}), K_1(z^{-1}))$ , on obtient donc la figure suivante :



*Figure.3.10 : Vérification de condition sur la stabilité robuste par les trois différents contrôleurs.*

D'après la **Figure.3.10**, on peut constater que la matrice optimale de Youla a la capacité de fournir la même sensibilité complémentaire fournie par le contrôleur robuste  $K_H(z^{-1})$  et cela tout au long de la plage des fréquences. Cette figure présente également la détérioration de la condition par le contrôleur primaire dans la plage de fréquence  $[3 \times 10^{-3}, \omega_{max}]$  radians/seconds. A cet effet, on peut conclure que la robustification proposée permet d'améliorer la marge de robustesse sur la stabilité robuste ce qui implique, dans le plan temporel, une amélioration de la dynamique d'atténuation des bruits de mesures qui affectent la boucle de commande.

Dans la suite de cette simulation, on essaie de vérifier l'impact de cette amélioration sur la condition de robustesse par rapport aux performances nominales. Par conséquent, la **Figure.3.11** illustre la justesse réalité de cette condition de robustesse pour les trois contrôleurs susmentionnés, on obtient donc la **Figure.3.11**



*Figure.3.11 : la condition sur les performances nominales par les trois différents contrôleurs.*

L'examen de la **figure.3.11** fait apparaître que l'écart entre les deux sensibilités directes fournies par les deux contrôleurs  $K_H(z^{-1})$  et  $(H_1(z^{-1}), K_1(z^{-1}))$  sont pratiquement très réduites ce qui confirme l'efficacité de la méthode d'identification citée précédemment. De plus, on peut remarquer que cette condition reste encore vérifiée par le contrôleur prédictif robustifié. Ceci permet de conclure que le compromis de robustesse stabilité robuste /performances nominales est bien réalisé par ce contrôleur.

A partir de ces deux résultats, on peut confirmer que dans le plant temporel, le contrôleur prédictif robustifié peut assurer d'une part, une meilleure dynamique de poursuite fournie par le contrôleur prédictif primaire. D'autre part, il peut assurer une meilleure robustesse fournie par le contrôleur robuste synthétisé par la méthode  $H_\infty$ .

Par conséquent, pour les réponses temporelles, on utilise les mêmes entrées exogènes citées dans les deux chapitres précédents et cela pour obtenir les trois comportements suivants : poursuite des trajectoires de référence, réjection des perturbations et atténuation des effets des bruits de mesure. On obtient donc les trois figures suivantes :

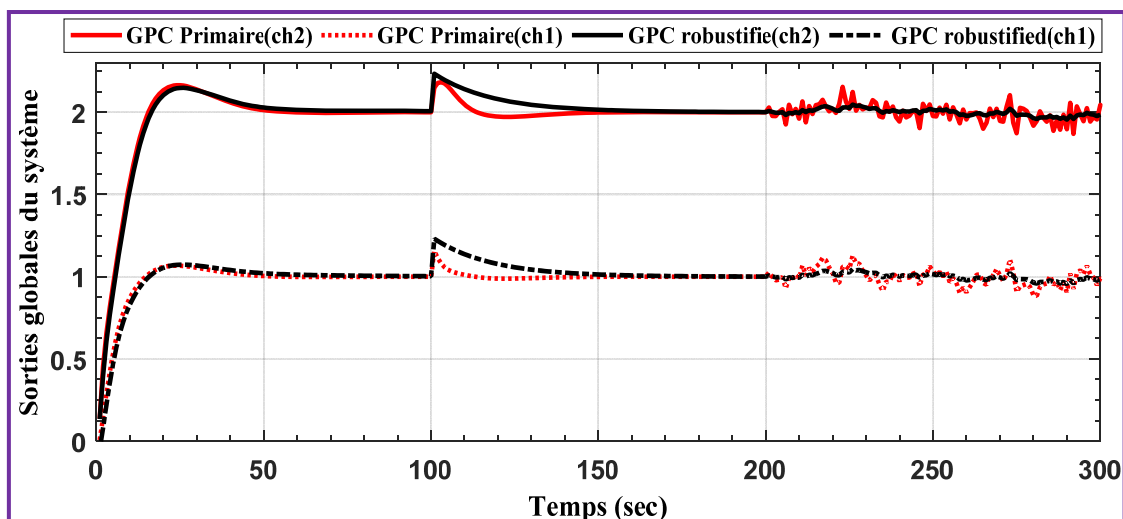


Figure.3.12 : Réponses temporelles fournies par les deux contrôleurs prédictifs : primaire et robuste

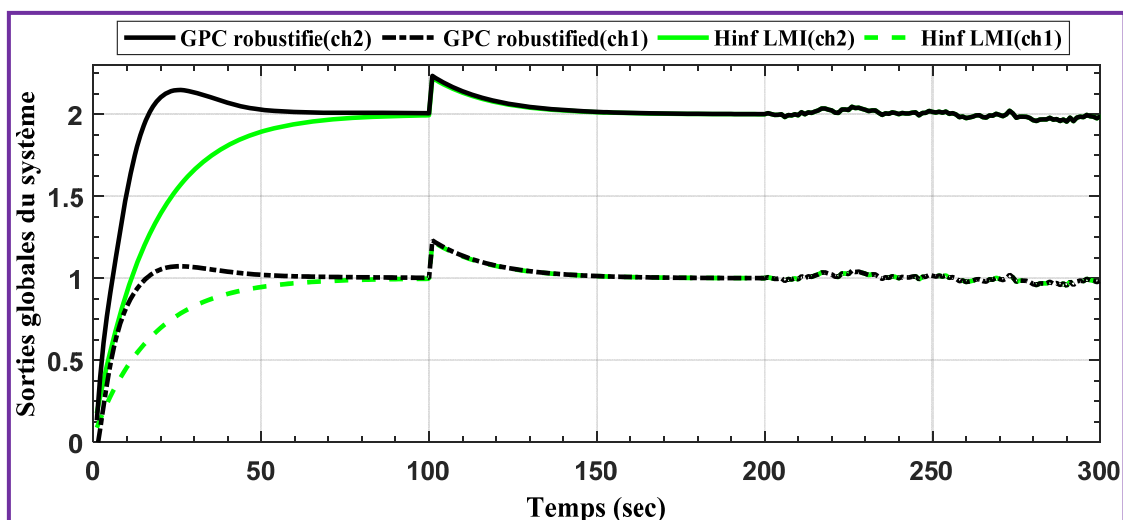


Figure.3.13 : Réponses temporelles fournies par les deux contrôleurs: robuste et prédictif robuste

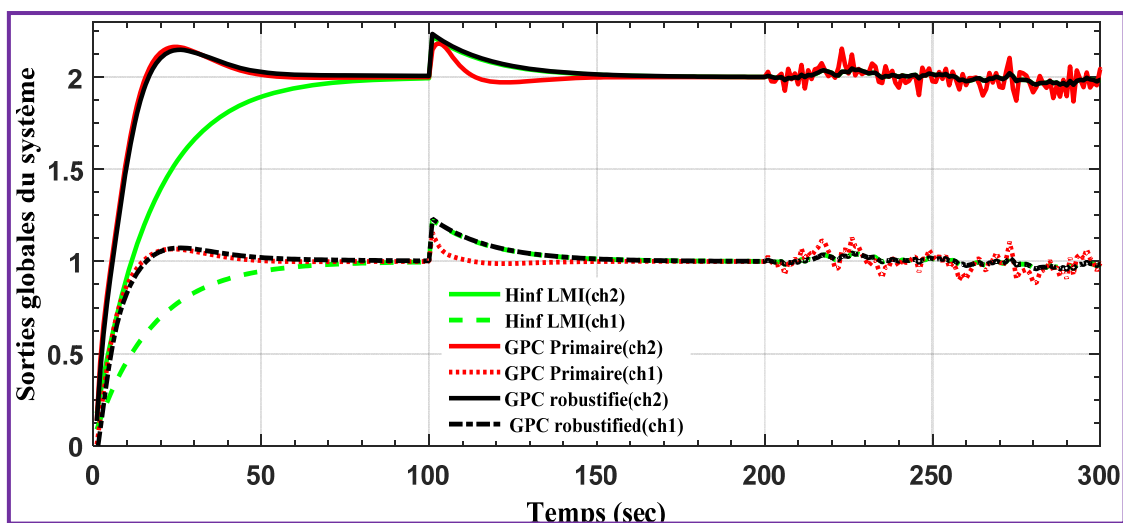
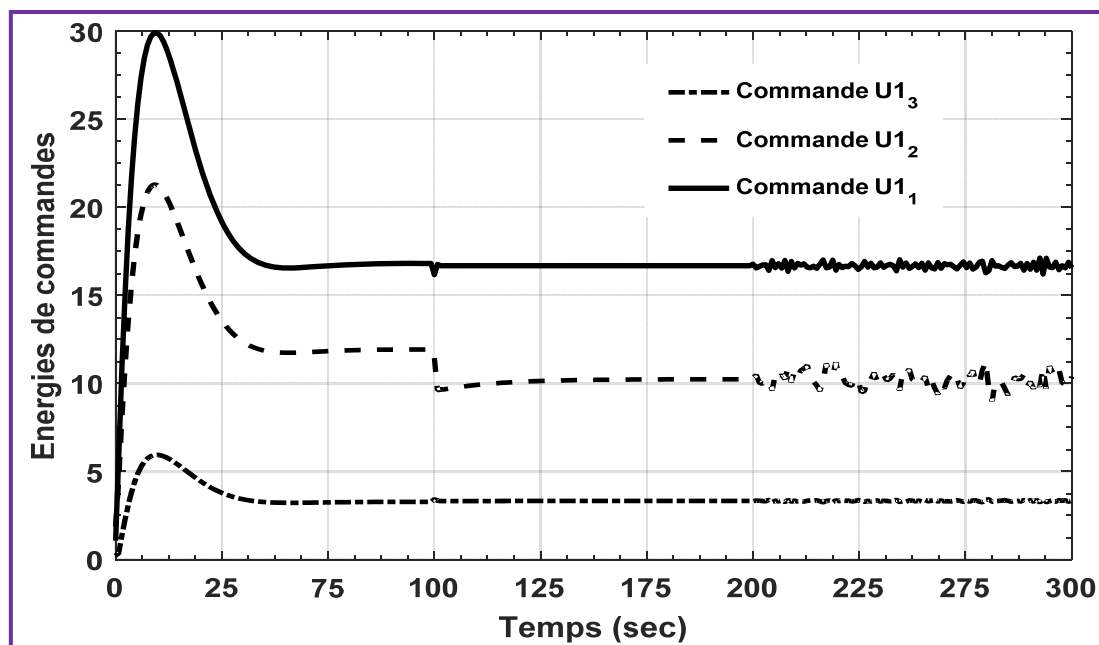


Figure.3.14 : Réponses temporelles fournies par les trois contrôleurs

D'après la **Figure.3.12**, on peut confirmer que l'objectif de la robustification proposée a abouti en raison des dynamiques excellentes fournies par les deux contrôleurs classiques  $K_H(z^{-1})$  et  $(H_0(z^{-1}), K_0(z^{-1}))$ . Ces objectifs sont assurés par les signaux de commandes fournies par le contrôleur prédictif robustifié qui sont présentés en régime stationnaire comme suit :



*Figure.3.15 : Commandes fournies par le contrôleur prédictif robustifié*

### 3.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle stratégie de robustification et cela dans le but de robustifier le contrôleur prédictif primaire. Cette proposition nécessite *a priori* la factorisation co-première de tous les transferts utilisés dans la boucle de commande ainsi que la synthèse *a priori* du contrôleur robuste par la méthode  $H_\infty$ . Cette dernière a été utilisée afin de produire des sensibilités désirées et cela via un choix adéquat des pondérations spécifiques. Ces sensibilités sont ensuite considérées comme référence puis une structure optimale de la matrice de Youla est systématiquement développée via une optimisation basée sur l'identification fréquentielle.

La validation de cette nouvelle stratégie a été montrée sur le même système physique cité dans les chapitres précédents et les résultats fournis par le contrôleur robustifié sont comparés dans les plans fréquentiel et temporel avec ceux fournis par le contrôleur prédictif primaire et celui synthétisé par la méthode  $H_\infty$ . A partir de ces résultats, on a pu conclure que le contrôleur robustifié a la capacité d'améliorer la robustesse du contrôleur primaire

correspondant. Il est également capable d'assurer la même bonne dynamique de poursuite de ce dernier et peut assurer, en outre, la même dynamique de rejection des perturbations et celle d'atténuation de l'effet des bruits de mesure du système bouclé par le contrôleur synthétisé par la méthode  $H_\infty$ . En conséquence, ces améliorations nous ont conduit à atteindre un bon compromis de robustesse ce qui constitue l'objectif de ce travail.

La validité de cette nouvelle stratégie a été montrée sur un modèle incertain présenté par une matrice non carrée et ce, dans l'objectif de confirmer l'efficacité de cette stratégie sur d'autres systèmes. Nous allons appliquer, dans le chapitre suivant, cette robustification sur deux systèmes de dimensions différentes. Le premier est décrit par un modèle incertain mono-variable disponible dans la bibliothèque du logiciel Matlab et le second est un système d'énergie renouvelable présenté par un modèle pluridimensionnel incertain présenté par une matrice de transfert carrée.

# CHAPITRE 4



**Validation de la robustification proposée sur  
les systèmes physique**

*Dans ce chapitre, nous allons validé la nouvelle stratégie de robustification sur deux systèmes modélisés par des modèles mathématiques incertains. Le premier modèle décrivant la dynamique d'un système hydraulique unidimensionnel, avec lequel la synthèse du contrôleur robuste par la méthode  $H_\infty$  a été effectuée afin de satisfaire deux conditions de robustesse sur les performances nominales et la stabilité robuste. Le second modèle est celui qui décrit le comportement réel d'une Machine Asynchrone à Doubles Alimentations (MADA) montée sur un système éolien. Cette dernière a été commandée par un contrôleur synthétisé par la méthode  $H_\infty$  utilisant l'approche LMI's. La synthèse du contrôleur a été effectuée par la résolution d'un critère de sensibilité mixte dans lequel deux pondérations ont été choisies à l'avance afin de borner les sensibilités du système bouclé.*

#### **4.1. Introduction:**

Dans ce chapitre, nous allons validé la nouvelle stratégie de robustification sur deux systèmes physiques modélisés par des modèles mathématiques incertains. Le premier modèle décrivant la dynamique d'un système hydraulique unidimensionnel, avec lequel la synthèse du contrôleur robuste par la méthode  $H_\infty$  a été effectuée afin de satisfaire deux conditions de robustesse sur les performances nominales et la stabilité robuste [GC08]. Cette méthode de synthèse est bien détaillée, dans la bibliothèque du Matlab/Robust [CR88], dans laquelle les deux spécifications fréquentielles ont été imposées de telle manière que l'évolution des valeurs singulières maximales de la matrice de fonction de sensibilité et de sensibilité complémentaire doit toujours être maîtrisée et limitée par un gabarit imposé *a priori* par le synthétiseur du contrôleur robuste.

Le second modèle est celui qui décrit le comportement réel d'une Machine Asynchrone à Double Alimentations (MADA) simulant le fonctionnement d'un système éolien [ZY07, QY11, KS15]. Ce dernier à été commandé par un contrôleur synthétisé par la méthode  $H_\infty$  utilisant l'approche LMI's [ZP09, SMA17]. Ce contrôleur doit assurer des tensions sinusoïdales qui alimentent le réseau public quelque soit la consommation du courant fourni par ce générateur. La synthèse du contrôleur a été effectuée par la résolution d'un critère de sensibilité mixte dans lequel deux pondérations ont été choisies à l'avance afin de borner les sensibilités du système bouclé [BC10].

Notons ici que, la poursuite et la régulation du premier système bouclé par le contrôleur  $H_\infty$  unidimensionnel, ainsi que la poursuite et la régulation du second système bouclé par le contrôleur  $H_\infty$  pluridimensionnel, sont assurées avec des performances plutôt acceptables en termes de rapidité d'annulation des erreurs statiques en régime permanent, de qualité des réponses temporelles à savoir le temps de montée et de réponse caractérisant la sortie globale du système bouclé, de réjection des perturbations qui nécessitent des améliorations afin de les



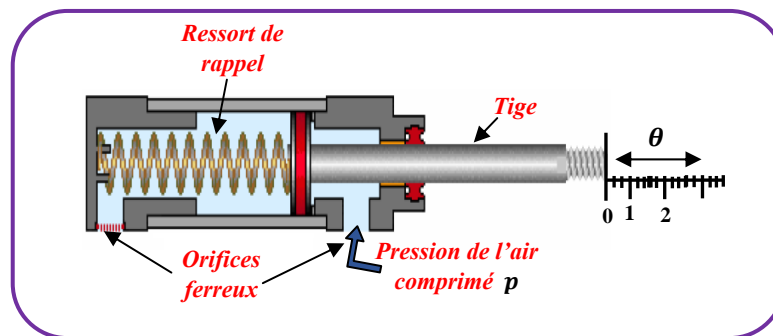
rejeter dans un intervalle du temps très réduit, etc. Par conséquent, les performances fournies par ce type de contrôleurs (de 1-DOF) n'ont pas satisfait les objectifs imposés par le cahier de charges. A cet effet, nous allons substituer la structure précédente par une autre à deux degrés de liberté (2-DOF) avec laquelle on peut ajuster séparément la poursuite et la robustesse des deux systèmes bouclés précédents. Les paramètres de ces structures seront déterminés en utilisant la stratégie de la commande prédictive généralisée dans sa version polynomiale. Cette version est ensuite robustifiée en utilisant la paramétrisation de Youla avec laquelle on peut faire une hybridation avec la stratégie de la commande  $H_\infty$ .

Les résultats de simulation seront comparés dans les deux domaines fréquentiel et temporel avec ceux fournis par les deux contrôleurs standards précédents. Cette comparaison permet de confirmer la validité de notre proposition afin de contrôler d'autres systèmes physiques existants dans l'industrie.

## 4.2. Commande d'un actionneur hydraulique unidimensionnel :

### 4.2.1. Modélisation du système hydraulique :

Le processus sur lequel a été appliquée notre stratégie de robustification représente un actionneur hydraulique présenté par la figure ci-dessous :



*Figure.4.1 : Schéma d'un actionneur hydraulique à simple effet*

Il s'agit d'un système unidimensionnel à une seule entrée, qui représente ici la pression de l'air instrument notée par  $p(t)$ , et une seule sortie, qui représente la position de la tige du vérin notée par  $\theta(t)$ . Cette dernière se déplace sous l'effet de l'air comprimé qui ne fournit un effort que dans un seul sens [GC08]. Par conséquent, le rappel de la tige à la position initiale est assuré par une contre-force produite par un ressort assurant la détente de l'air comprimé à travers des orifices ferreux. Le comportement non linéaire décrivant la dynamique de ce processus peut être modélisé par un modèle linéaire entaché par des erreurs de modélisation

présentées sous forme d'incertitudes multiplicatives non structurées [FM99]. Ce modèle est donné par l'expression ci-dessous [CR88]:

$$\frac{\theta(s)}{P(s)} = G(s) = \frac{9000}{s^3 + 30s^2 + 700s + 1000} \quad (4.1)$$

#### 4.2.2. Synthèse du contrôleur robuste :

Lors de la synthèse du contrôleur robuste par la méthode  $H_\infty$ , le transfert précédent a été discrétisé par un pas d'échantillonnage  $T_e = 0.01$  sec. Ensuite, la représentation d'état de ce contrôleur a été fournie par la méthode  $H_\infty$  utilisant les deux équations discrètes de *Riccati*. Le problème de sensibilité mixte qui découle de cette méthode a été formulé par deux pondérations décrivant deux spécifications fréquentielles à savoir : la spécification sur la stabilité robuste et celle sur les performances nominales du système bouclé. Ces dernières sont déterminées par la discrétisation des deux matrices de pondération diagonales sélectionnées, dans l'espace continu, comme suit :

$$\begin{cases} W_S(s) = \frac{(1+s/30)^2}{0.01(1+s/1)^2} \\ W_T(s) = \frac{1+s/10}{3.16(1+s/300)} \end{cases} \quad (4.2)$$

La norme  $H_\infty$  désirée limitant le critère de sensibilité mixte est choisie pour  $\gamma = 0.8$ . Par conséquent, la représentation d'état discrète du contrôleur est obtenue comme suit :

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.2491 & -0.0018 & 0.0021 & -0.0084 & 0.0011 & -0.0113 \\ -0.0000 & 0.9801 & 0.0018 & -0.0006 & -0.0002 & -0.0011 \\ 0.0000 & -0.0384 & 0.9738 & 0.0886 & 0.0167 & 0.0866 \\ 0.0000 & -0.0925 & 0.0937 & 0.6802 & -0.0605 & -0.3133 \\ 0.0000 & -0.1708 & 0.2664 & -0.4408 & -0.2334 & 0.9037 \\ -0.0000 & 0.0873 & -0.1362 & 0.2254 & -0.0108 & -0.1311 \end{bmatrix}$$

$$B_k = [-0.0928 \quad 7.7716 \quad -2.4045 \quad -6.6029 \quad -12.2917 \quad 6.2863]^T$$

$$C_k = [57.2627 \quad 0.0962 \quad -0.1025 \quad 0.4150 \quad -0.0571 \quad 0.6599], \text{ et } D_k = 5.4338.$$

Nous verrons, dans la suite de ce travail, que la réponse temporelle du système bouclé par ce contrôleur présentera un pic non souhaité induisant la saturation du capteur de position. En revanche, ce système bouclé présente un compromis de robustesse très acceptable notamment en hautes fréquences où l'effet du comportement non linéaire négligé est important. Il faut

noter ici que cette bonne robustesse sera conservée afin d'améliorer la robustesse du système bouclé par le contrôleur prédictif primaire.

#### 4.2.3. Synthèse du contrôleur prédictif primaire :

Le modèle de *CARIMA* assurant la prédiction du comportement du système à commander est celui donné par les deux polynômes ci-dessous :

$$A(z^{-1}) = 1 - 2.68 z^{-1} + 2.422 z^{-2} - 0.7408 z^{-3}$$

$$z^{-1}B(z^{-1}) = 0.001389 + 0.005164 z^{-1} + 0.001196 z^{-2}$$

L'objectif de cette partie est de synthétiser un contrôleur prédictif primaire à deux degrés de liberté assurant une bonne dynamique de poursuite de la trajectoire de référence. Cet objectif est réalisé via le choix des paramètres de réglage suivants :  $N_2 = 6$ ,  $N_u = 1$  et  $\lambda = 0.04$ . La version polynomiale de ce contrôleur est donnée sous la forme  $R_0S_0T_0$  suivante :

$$R_0(z^{-1}) = 155.9 - 365.5 z^{-1} + 295.3 z^{-2} - 81.73 z^{-3}$$

$$S_0(z^{-1}) = 1 + 0.5774 z^{-1} + 0.6543 z^{-2} + 0.1319 z^{-3}$$

$$T_0(z^{-1}) = 2.022 + 1.131 z^{-1} + 0.5199 z^{-2} + 0.1674 z^{-3} + 0.02267 z^{-4}$$

Nous verrons, dans la suite de ce travail, que le système bouclé correspondant présente une sensibilité importante aux effets des bruits de mesure en régime permanent. Ceci est causé par le rigorisme de la condition sur la stabilité robuste. Par conséquent, le compromis de robustesse correspondant n'est pas garanti notamment en hautes fréquences. De ce fait, l'objectif de la robustification est d'augmenter la marge de robustesse de stabilité du système bouclé et cela par la détermination du transfert de Youla assurant les mêmes sensibilités du contrôleur robuste cité précédemment [AMS16].

#### 4.2.4. Synthèse du contrôleur prédictif robustifié:

L'objectif de cette partie est de déterminer un transfert de Youla permettant d'améliorer la stabilité robuste fournie par le système bouclé par le contrôleur prédictif primaire cité précédemment. A cet effet, la fonction de transfert de Youla est obtenue via l'application directe de l'égalité (3.75), qui a été mentionnée dans le chapitre précédent. On obtient donc :

$$Q_{idéal}(z^{-1}) = \frac{Q_N(z^{-1})}{Q_D(z^{-1})}, \text{ sachant que :}$$

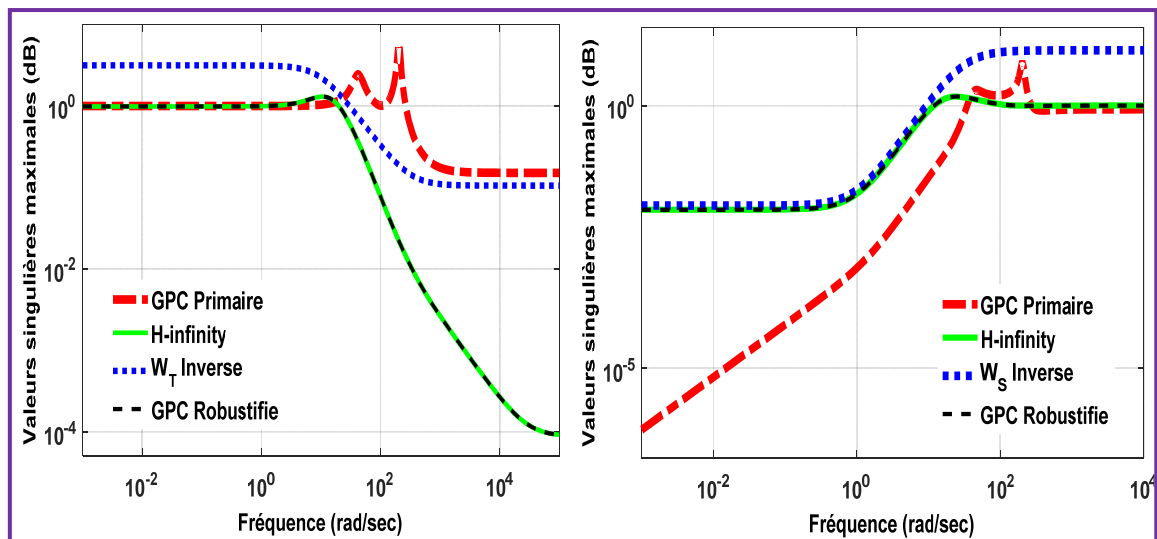
$$Q_N(z^{-1}) = -150.42(1 - 1.98 z^{-1} + 0.98 z^{-2})(1 + 0.5134 z^{-1} + 0.06613 z^{-2})(1 - 1.487 z^{-1} + 5626 z^{-2})(1 - 1.564 z^{-1} + 0.6947 z^{-2})(1 - 5.396 \times 10^{-5} z^{-1})$$

$$Q_D(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 - 0.9849 z^{-1})(1 - 0.7912 z^{-1})(1 + 0.2894 z^{-1})(1 + 0.2491 z^{-1})(1 - 0.002096 z^{-1})(1 - 4.249 \times 10^{-5} z^{-1} + 2.387 \times 10^{-9} z^{-2})(1 - 1.76 z^{-1} + 0.7801 z^{-2})(1 - 1.695 z^{-1} + 0.7522 z^{-2})$$

#### 4.2.5. Réponses fréquentielles et temporelles:

L'analyse de robustesse du système bouclé par les trois contrôleurs cités précédemment est effectuée dans la plage des fréquences  $[10^{-3} \ 10^5]$  radians /sec en utilisant 500 points de fréquence.

La **Figure.4.2** illustre l'examen des deux conditions de robustesse (stabilité robuste et performances nominales) du système bouclé par les trois contrôleurs.

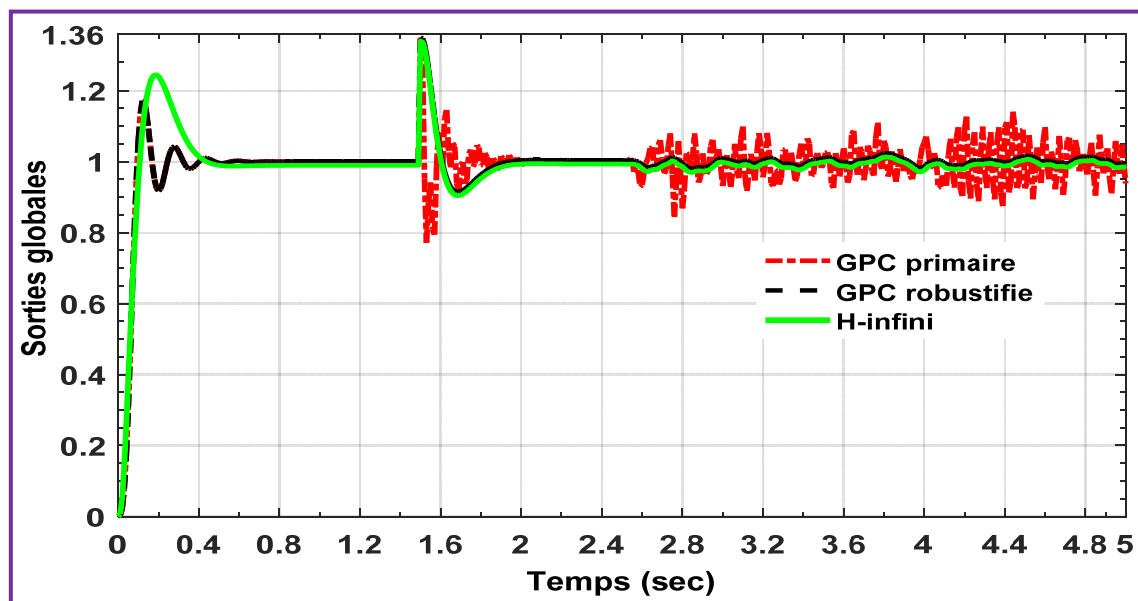


**Figure.4.2 :** Stabilité robuste et performances nominales du système bouclé

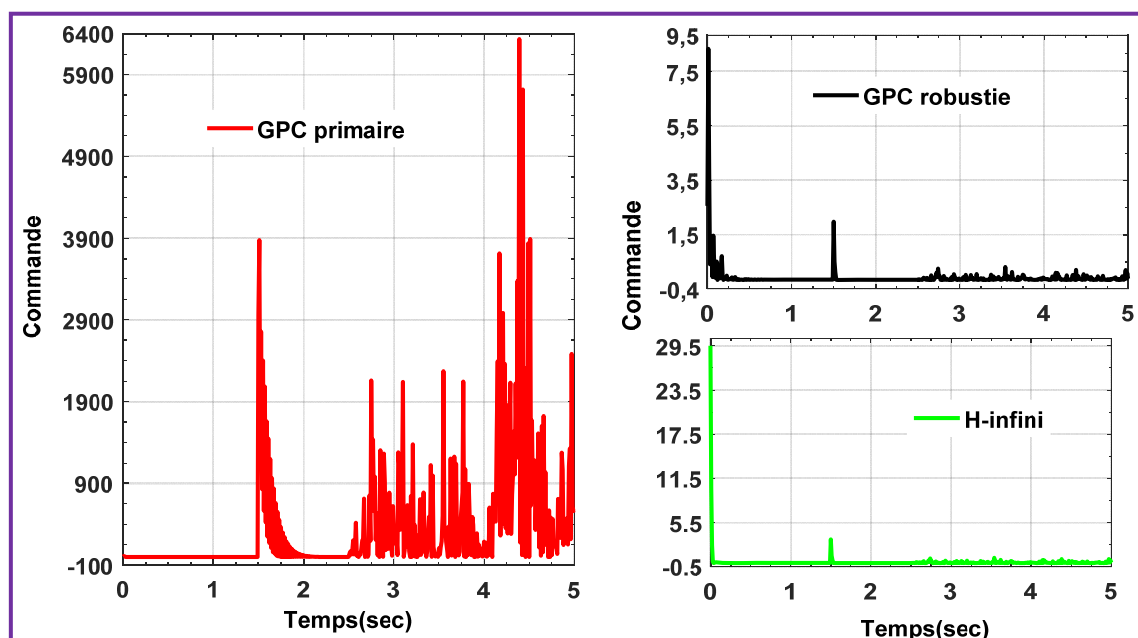
D'après la **Figure.4.2**, il est clair de voir que la robustification proposée a la capacité d'atténuer les deux pics de résonance des deux fonctions de sensibilité du système bouclé par le contrôleur prédictif primaire. La pente la plus descendante survenant dans le module de la fonction de sensibilité complémentaire du système bouclé par le contrôleur robustifié, se traduit par la bonne atténuation de l'effet des bruits de mesure, ainsi que l'insensibilité aux effets de la dynamique non linéaire négligée en hautes fréquences.

Ces résultats sont confirmés dans le plan temporel, par l'excitation du système bouclé par trois entrées exogènes différentes. La première entrée représente la position désirée (à atteindre) par la tige du vérin. Elle est donnée sous forme d'un échelon unitaire appliqué tout au long de l'intervalle de simulation ainsi fixé  $[0, 5]$  secondes.

De plus, les incertitudes non structurées affectant le modèle de synthèse sont présentées par un signal échelon d'amplitude 0.35 (35% de la référence) appliqué à partir de l'instant  $t = 1.5$  seconde. La dernière entrée représente un bruit blanc de moyenne nulle et de variance  $\sigma(\eta) = 0.001$  appliqué à partir de l'instant  $t = 2.5$  seconde. La **Figure.4.3** présente les sorties globales du système bouclé par les trois contrôleurs précédents. Tandis que la **Figure.4.4** représente le signal de commande fourni par chaque contrôleur correspondant.



*Figure.4.3 : Sorties globales du système bouclé*



*Figure.4.4 : Commandes fournies par les trois contrôleurs*

D'après les figures précédentes, la comparaison des réponses temporelles est illustrée par le tableau ci-dessous dans lequel les meilleurs résultats sont mentionnés en gras :

**Tableau.4.1.** Comparaison des réponses temporelles

Contrôleur	<i>GPC primaire</i>	$H_\infty$	<i>GPC robustifie</i>
Régime transitoire:			
temps de montée	<b>0.0545</b>	0.0687	<b>0.0545</b>
temps de réponse	<b>0.3168</b>	0.4214	<b>0.3168</b>
Dépassement	<b>1.1715</b>	1.2443	<b>1.1715</b>
Temps d'annulation de perturbation	0.8910	0.4500	<b>0.4100</b>
Régime permanent:			
Intervalle de fluctuation	$0.8437 \leq  y  \leq 1.141$	$0.9698 \leq  y  \leq 1.013$	<b><math>0.9802 \leq  y  \leq 1.024</math></b>
Erreur à $t \leq 1.5$ sec.	<b>0%</b>	1.04%	<b>0%</b>
Energie de commande maximale	<b>6335</b>	<b>29.53</b>	<b>12.74</b>

### 4.3. Commande de la machine asynchrone à double alimentations MADA

#### 4.3.1. Modélisation de la machine

La production de l'énergie éolienne est souvent basée sur la conversion de l'énergie produite par le vent en énergie électrique. Cela est obtenu grâce à la rotation du champ électrique généré au niveau du rotor de la machine asynchrone, qui est couplé avec une turbine par l'intermédiaire d'un engrenage mécanique [EJ04]. Dans ce cas, la machine est considérée comme un générateur de tension et la puissance produite est injectée dans le réseau électrique à travers un système d'électronique de puissance. A cet effet, la puissance produite par le générateur de tension doit avoir les mêmes qualités en tension et en fréquence, lorsqu'elle est injectée dans le réseau électrique, (i.e., 220Volts, 60 ou 50Hz). La puissance consommée par les clients est souvent classée en deux catégories à savoir : puissance active ou réactive. Cette consommation influe directement sur le courant du stator généré par la machine [DH03, HY14]. De plus, la variation de cette consommation est considérée comme une charge agissant sur la boucle de commande. Par conséquent, l'objectif de notre travail est de trouver la manière d'assurer des tensions stables en amplitude et en fréquence dans le réseau électrique et cela quelque soit l'énergie électrique consommée. Pour atteindre cet objectif, plusieurs approches de commande ont été suggérées ces dernières décennies [SMD12, SJ05, KS15]. La synthèse d'un contrôleur stabilisant la boucle de commande par ces approches est souvent nécessite souvent des modèles linéaires possédant des paramètres invariants dans le temps. Par conséquent, ce type de modèles est pratiquement introuvable dans la pratique, et cela est dû aux erreurs de modélisation commises lors de la linéarisation du comportement réel de la MADA [VJ09]. Notons ici que la synthèse du contrôleur qui tient

en compte des effets des incertitudes, ainsi que de la dynamique non linéaire négligée a été résolue par la méthode  $H_\infty$ , avec laquelle le contrôleur synthétisé peut fournir des tensions statoriques très satisfaisantes au vu des caractéristiques électriques souhaitées. Néanmoins, pour certaines exigences industrielles telles que la sécurité des équipements, la fatigue des instruments de mesure et la consommation énorme de l'énergie électrique,...etc, les performances du système bouclé par ce contrôleur doivent être assurées avec une marge de sécurité très élevée. A cet effet, nous allons synthétiser un autre contrôleur pluridimensionnel à deux degrés de liberté basé sur la stratégie de la commande prédictive généralisée polynomiale [AMS18]. Cette dernière peut fournir une dynamique de poursuite très acceptable de point de vue qualité des performances électriques. Ensuite, ses marges de robustesse sont augmentées en utilisant la robustification proposée dans le chapitre précédent. La boucle de commande de cette machine jusqu'à son raccordement dans le réseau électrique peut être donnée par la figure ci-dessous [SMA17]:

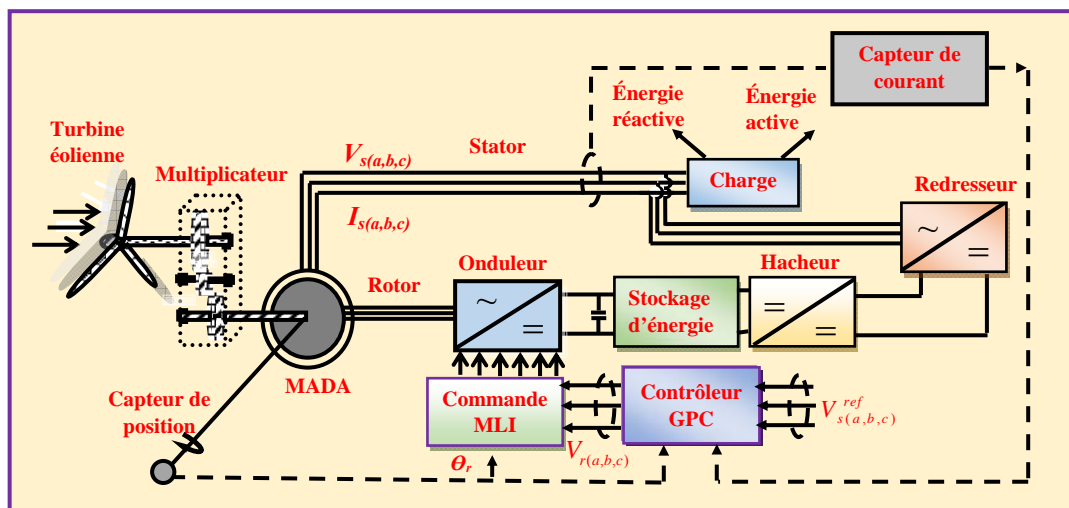


Figure.4.5 : Schéma d'une éolienne à vitesse variable basée sur une MADA.

Le comportement réel de cette machine est décrit par les équations différentielles suivantes [QY11, ZY07, ZP09, KS15, SMA17]:

- ✓ Les équations des composantes du vecteur de tension statorique:

$$\begin{cases} V_{ds} = R_s \cdot I_{ds} + \frac{d\phi_{ds}}{dt} - \omega_s \cdot \phi_{qs} \\ V_{qs} = R_s \cdot I_{qs} + \frac{d\phi_{qs}}{dt} - \omega_s \cdot \phi_{ds} \end{cases} \quad (4.3)$$

- ✓ Les équations des composantes du vecteur tension rotorique :

$$\begin{cases} V_{dr} = R_r \cdot I_{dr} + \frac{d\phi_{dr}}{dt} - \omega_r \cdot \phi_{qr} \\ V_{qr} = R_r \cdot I_{qr} + \frac{d\phi_{qr}}{dt} - \omega_r \cdot \phi_{dr} \end{cases} \quad (4.4)$$

✓ Les équations des composantes du vecteur flux statorique :

$$\begin{cases} \phi_{ds} = L_s \cdot I_{ds} + M \cdot I_{dr} \\ \phi_{qs} = L_s \cdot I_{qs} + M \cdot I_{qr} \end{cases} \quad (4.5)$$

✓ Les équations des composantes du vecteur flux rotorique :

$$\begin{cases} \phi_{dr} = L_r \cdot I_{dr} + M \cdot I_{ds} \\ \phi_{qr} = L_r \cdot I_{qr} + M \cdot I_{qs} \end{cases} \quad (4.6)$$

✓ L'équation du couple électromagnétique :

$$C_e = p \cdot \frac{M}{L_s} (\phi_{ds} \cdot I_{qr} - \phi_{qs} \cdot I_{dr}) \quad (4.7)$$

✓ L'équation mécanique :

$$C_e = C_r + J \cdot \frac{d\psi}{dt} + f \cdot \psi \quad (4.8)$$

Le modèle mathématique linéaire de la MADA comporte deux entrées représentées par le vecteur des tensions rotoriques  $V_r = [V_{dr} \quad V_{qr}]^T$ , et deux sorties représentées par le vecteur des tensions statoriques  $V_s = [V_{ds} \quad V_{qs}]^T$ . De plus, les perturbations agissant sur la boucle de commande sont les charges causées par la consommation de la puissance active  $P_a$  et la puissance réactive  $P_r$  dans le réseau public. Étant donnée que l'objectif de la commande reste toujours le maintien des tensions statoriques constantes en module et en fréquence. C'est pour cette raison que l'on a considéré la consommation précédente comme étant des perturbations extérieures représentées par le vecteur des courants statoriques  $\tilde{I}_s = [\tilde{I}_{ds} \quad \tilde{I}_{qs}]^T$ . En outre, les variables d'état sont représentées par le vecteur des flux rotoriques  $\phi_r = [\phi_{dr} \quad \phi_{qr}]^T$ , d'où l'on obtient la représentation ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{dr} \\ \dot{\phi}_{qr} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{s11} & A_{s12} \\ A_{s21} & A_{s22} \end{bmatrix}}_{A_s} \begin{bmatrix} \phi_{dr} \\ \phi_{qr} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{s11} & B_{s12} \\ B_{s21} & B_{s22} \end{bmatrix}}_{B_s} \begin{bmatrix} V_{dr} \\ V_{qr} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{B}_{s11} & \tilde{B}_{s12} \\ \tilde{B}_{s21} & \tilde{B}_{s22} \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_s} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{ds} \\ \tilde{I}_{qs} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$



$$\begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{s11} & C_{s12} \\ C_{s21} & C_{s22} \end{bmatrix}}_{C_s} \begin{bmatrix} \phi_{dr} \\ \phi_{qr} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{s11} & D_{s12} \\ D_{s21} & D_{s22} \end{bmatrix}}_{D_s} \begin{bmatrix} V_{dr} \\ V_{qr} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{D}_{s11} & \tilde{D}_{s12} \\ \tilde{D}_{s21} & \tilde{D}_{s22} \end{bmatrix}}_{\tilde{D}_s} \begin{bmatrix} \tilde{I}_{ds} \\ \tilde{I}_{qs} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

La matrice de transfert du modèle est déterminée par les données numériques présentées dans le **Tableau.4.2** suivant :

**Tableau.4.2** : Les paramètres de la MADA

Paramètres	Valeurs	Unités
$R_s$	5.0000	$\Omega$
$R_r$	1.0113	$\Omega$
$M$	0.1346	
$L_s$	0.3409	$H$
$L_r$	0.0605	$H$
$w_r$	146.6	$rad/sec$
$w_s$	$2\pi.(50)$	$rad/sec$

### 4.3.2. Résultats des simulations et discussion

Dans cette section, la synthèse des contrôleurs stabilisant le système bouclé est effectuée en absence des perturbations extérieures (i.e.,  $\tilde{I}_s = [0 \ 0]^T$ ). De plus, le modèle linéaire incertain de la machine est développé via la linéarisation autour d'un point de fonctionnement de la machine, dans lequel les courants statoriques sont considérés comme constants, ainsi que leur dérivés qui sont nulles. De plus, la linéarisation est effectuée en négligeant tous les modes qui se situées en hautes fréquences. Les erreurs de modélisation sont présentées sous forme d'incertitudes multiplicatives non structurées amenées à la sortie du modèle nominal de synthèse. La discrétisation de ce dernier par le pas d'échantillonnage  $T_e = 0.01$  seconde permet de déterminer le modèle discret de la machine, avec lequel on synthétisera le contrôleur robuste, en utilisant la méthode  $H_\infty$  basée sur l'approche LMI. Ensuite, ce modèle discret sera une fois encore utilisé, afin de développer le modèle prédictif de *CARIMA*, avec lequel on synthétisera le contrôleur prédictif primaire. Ces deux derniers contrôleurs seront hybridés pour élaborer le contrôleur prédictif robustifié en utilisant la paramétrisation de Youla.

#### 4.3.2.1. Synthèse du contrôleur robuste

Dans cette section, on commence par la synthèse du contrôleur robuste par la méthode  $H_\infty$  basée sur l'approche *LMI*. Le système bouclé par ce contrôleur est illustré par la **Figure.4.6**:

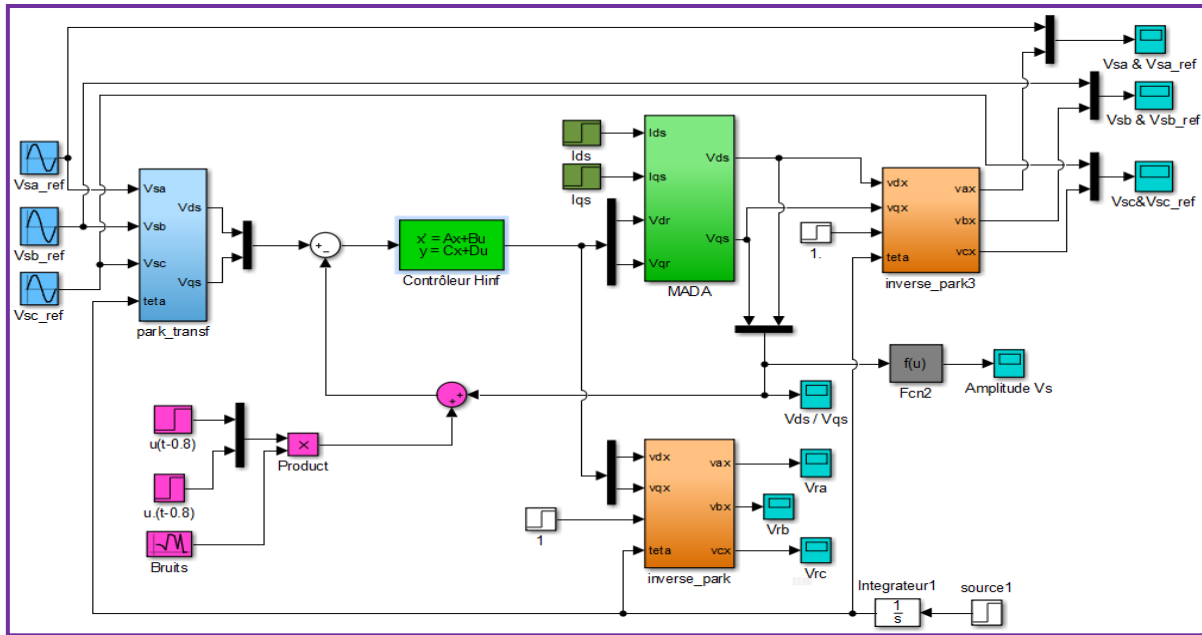


Figure.4.6 : Système bouclé par le contrôleur 1-DOF utilisant les grandeurs de la MADA dans le plan abc

L'objectif ici est d'assurer un bon compromis de robustesse entre la stabilité robuste et les performances nominales. Ce qui se traduit par l'annulation de l'effet des incertitudes de modélisation dans les basses fréquences, ainsi que l'atténuation de l'effet des bruits de mesure. Ce dernier peut être provoqué par la défaillance des instruments de mesure installés dans la boucle de commande. A cet effet, les spécifications imposées par le cahier de charges sont les suivantes :

1. Les spécifications sur les performances nominales : Elles sont présentées par la pondération continue  $W_S(s) = \text{diag}\{W_{S_{11}}(s), W_{S_{22}}(s)\}$ , avec :

$$W_S(s) = \frac{1}{4 \times 10^{-4}} \left( \frac{1 + \frac{s}{7.353}}{1 + \frac{s}{14.706 \times 10^{-4}}} \right) \cdot I_{2 \times 2} \quad (4.11)$$

Sachant que  $M_{S_{ii}} = 2$ ,  $\omega_{B_{ii}} = 3.6765$  et  $\varepsilon_{S_{ii}} = 4 \times 10^{-4}$

2. Les spécifications sur la stabilité robuste : Elles sont présentées par la pondération continue  $W_T(s) = \text{diag}\{W_{T_{11}}(s), W_{T_{22}}(s)\}$ , avec :

$$W_T(s) = \frac{1}{1.5385} \left( \frac{1 + \frac{s}{45.9338}}{1 + \frac{s}{29.8577 \times 10^{-4}}} \right) \cdot I_{2 \times 2} \quad (4.12)$$

sachant que  $M_{T_{ii}} = 1.5385$ ,  $\omega_{B_{T_{ii}}} = 70.6692$  et  $\varepsilon_{T_{ii}} = 23.6692 \times 10^{-5}$

Ces deux pondérations sont discrétisées en utilisant le même pas d'échantillonnage précédent. Ensuite, le modèle augmenté correspondant est obtenu afin de formuler le critère de sensibilité mixte généralisé. La solution optimale de ce critère fournit, systématiquement, la norme désirée  $\gamma = 0.6937$  ainsi que la matrice polynomiale discrète ci-dessous :

$$K_H(z^{-1}) = \begin{bmatrix} K_{H_{11}}(z^{-1}) & K_{H_{12}}(z^{-1}) \\ K_{H_{21}}(z^{-1}) & K_{H_{22}}(z^{-1}) \end{bmatrix}, \text{ sachant que :}$$

$$K_{H_{11}}(z^{-1}) = \frac{0.042741(1+1.015z^{-1})(1+0.1383z^{-1}+0.9679z^{-2})}{(1-z^{-1})^2(1+0.9946z^{-1})(1+0.8464z^{-1}+z^{-2})}$$

$$K_{H_{12}}(z^{-1}) = \frac{0.019552(1-0.7277z^{-1})(1+1.016z^{-1})(1+0.9289z^{-1})}{(1-z^{-2})(1+0.994z^{-1})(1+0.8464z^{-1}+z^{-2})}$$

$$K_{H_{21}}(z^{-1}) = \frac{-0.019551(1-0.7277z^{-1})(1+0.9952z^{-1})(1+1.016z^{-1})(1+0.9278z^{-1})}{(1-z^{-2})(1+0.9946z^{-1})^2(1+0.8464z^{-1}+z^{-2})}$$

$$K_{H_{22}}(z^{-1}) = \frac{0.042741(1+1.015z^{-1})(1+0.1383z^{-1}+0.9679z^{-2})}{(1-z^{-2})(1+0.9946z^{-1})(1+0.8464z^{-1}+z^{-2})}$$

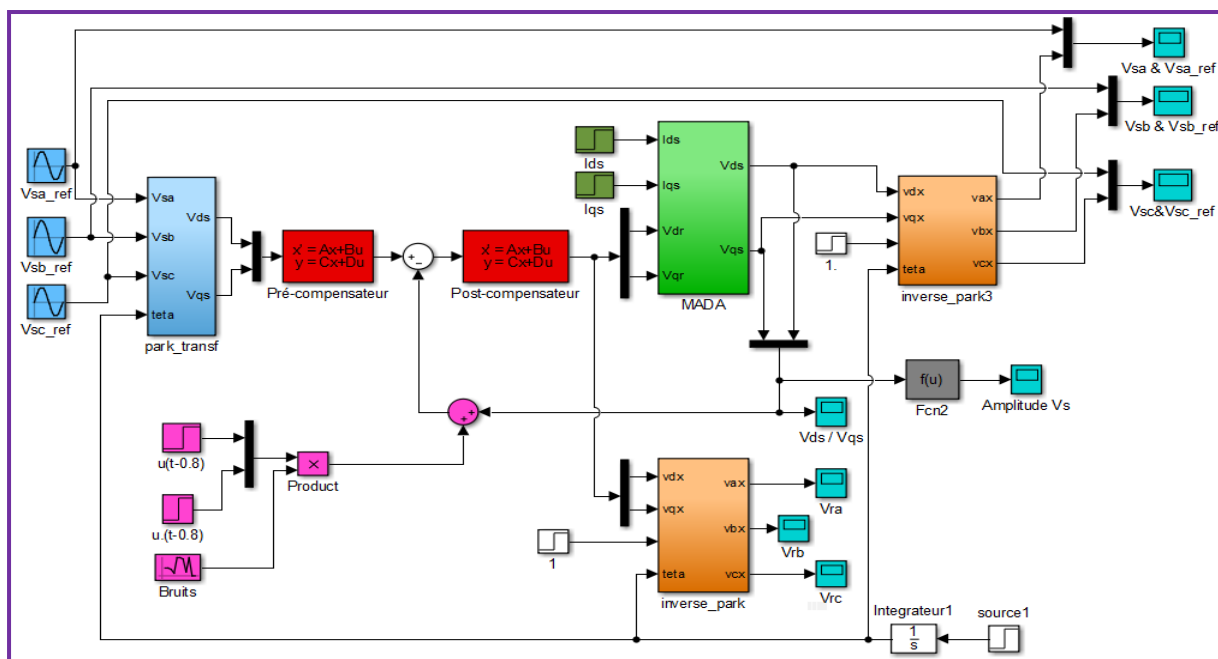
Les réponses fréquentielles et temporelles du système bouclé par le contrôleur  $K_H(z^{-1})$  seront comparées à celles fournies par les deux contrôleurs prédictifs.

#### 4.3.2.2. Synthèse du contrôleur prédictif primaire contrôleur conventionnel

Dans cette section, le système bouclé utilisant le contrôleur prédictif à 2-DOF peut être illustré par la **Figure.4.7**:

L'objectif ici est de synthétiser un contrôleur prédictif assurant une bonne dynamique de poursuite du vecteur des tensions statoriques de référence. Cet objectif peut être obtenu par le choix des paramètres de réglage de GPC suivants :

$$(N_1, [N_{2_1}, N_{2_2}], N_u, [\lambda_1, \lambda_2]) = (1, [2, 2], 2, [0.038, 0.066]).$$



**Figure.4.7 :** Système bouclé par le contrôleur 2-DOF utilisant les grandeurs de la MADA dans le plan abc

La version polynomiale du contrôleur prédictif primaire est donnée sous la forme  $R_0S_0T_0$  suivante :

$$R_0(z^{-1}) = \begin{bmatrix} R_{011}(z^{-1}) & R_{012}(z^{-1}) \\ R_{021}(z^{-1}) & R_{022}(z^{-1}) \end{bmatrix}, \text{ sachant que :}$$

$$R_{011}(z^{-1}) = 1.149 - 1.666z^{-1} + 1.563z^{-2} - 0.857z^{-3} + 0.372z^{-4}$$

$$R_{012}(z^{-1}) = 0.498 - 0.723z^{-1} + 0.679z^{-2} - 0.373z^{-3} + 0.162z^{-4}$$

$$R_{021}(z^{-1}) = -0.486 + 0.711z^{-1} - 0.672z^{-2} + 0.369z^{-3} - 0.162z^{-4}$$

$$R_{022}(z^{-1}) = 1.117 - 1.634z^{-1} + 1.543z^{-2} - 0.848z^{-3} + 0.371z^{-4}$$

$$S_0(z^{-1}) = \begin{bmatrix} S_{011}(z^{-1}) & S_{012}(z^{-1}) \\ S_{021}(z^{-1}) & S_{022}(z^{-1}) \end{bmatrix}, \text{ sachant que :}$$

$$S_{011}(z^{-1}) = 1 - 0.341z^{-1} + 1.371z^{-2} - 0.213z^{-3} + 0.530z^{-4}$$

$$S_{012}(z^{-1}) = -0.033z^{-1} + 0.620z^{-2} - 0.347z^{-3} + 0.484z^{-4}$$

$$S_{021}(z^{-1}) = 0.024z^{-1} - 0.613z^{-2} + 0.339z^{-3} - 0.482z^{-4}$$

$$S_{022}(z^{-1}) = 1 - 0.318z^{-1} + 1.362z^{-2} - 0.203z^{-3} + 0.527z^{-4}$$

$$T_0(z^{-1}) = \begin{bmatrix} T_{0_{11}}(z^{-1}) & T_{0_{12}}(z^{-1}) \\ T_{0_{21}}(z^{-1}) & T_{0_{22}}(z^{-1}) \end{bmatrix}, \text{ sachant que :}$$

$$T_{0_{11}}(z^{-1}) = 0.01352 + 0.548z^{-1}$$

$$T_{0_{12}}(z^{-1}) = 0.006667 + 0.2371z^{-1}$$

$$T_{0_{21}}(z^{-1}) = -0.0103 + 0.228z^{-1}$$

$$T_{0_{22}}(z^{-1}) = 0.02266 + 0.5268z^{-1}$$

Nous allons confirmer, plus tard, que le compromis de robustesse du système bouclé par ce contrôleur ne peut être atteint. Pour cette raison, la robustification proposée dans notre travail sera indispensable pour améliorer ce compromis de robustesse.

#### 4.3.2.3. Synthèse du contrôleur prédictif robustifié

L'objectif de cette partie est d'améliorer le compromis de robustesse fournie par le contrôleur prédictif primaire. A cet effet, la matrice polynomiale de Youla est obtenue via l'identification fréquentielle citée dans le chapitre précédent, en utilisant les données suivantes :

- $\alpha_k = \frac{\pi(k-1)}{30(N-1)}$  pour  $k = 1; \dots; 51$ .
- $\zeta_{mod_{ij}}^* = 10^{-2}$ . pour  $i = 1,2$  et  $j = 1,2$

D'où la matrice polynomiale de Youla qui est obtenue comme suit :

$$Q^*(z^{-1}) = \begin{bmatrix} Q_{11}^*(z^{-1}) & Q_{12}^*(z^{-1}) \\ Q_{21}^*(z^{-1}) & Q_{22}^*(z^{-1}) \end{bmatrix}, \text{ sachant que :}$$

$$Q_{11}^*(z^{-1}) = \frac{1.03(1 - 0.067z^{-1})(1 - 1.267z^{-1} + 0.575z^{-2})(1 - 0.151z^{-1} + 0.489z^{-2})}{(1 - 0.856z^{-1})(1 - 0.0168z^{-1})(1 - 0.547z^{-1} + 0.809z^{-2})(1 - 0.519z^{-1} + 0.802z^{-2})}$$

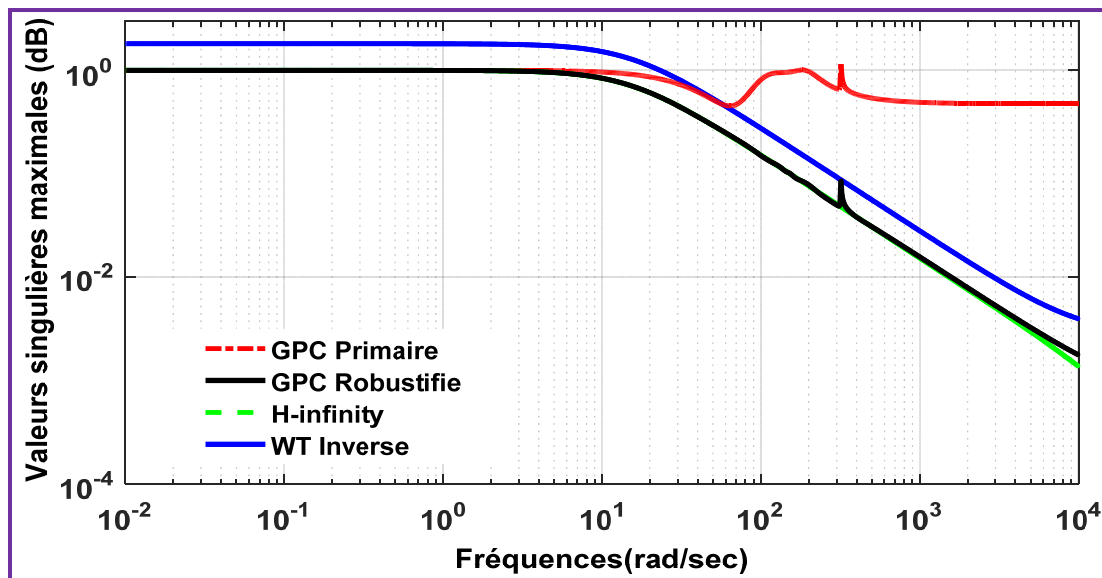
$$Q_{12}^*(z^{-1}) = \frac{-0.444(1 + 0.128z^{-1})(1 - 1.281z^{-1} + 0.585z^{-2})(1 - 0.168z^{-1} + 0.496z^{-2})}{(1 - 0.853z^{-1})(1 + 0.184z^{-1})(1 - 0.560z^{-1} + 0.809z^{-2})(1 - 0.504z^{-1} + 0.801z^{-2})}$$

$$Q_{21}^*(z^{-1}) = \frac{0.432(1 + 0.328z^{-1})(1 - 1.301z^{-1} + 0.603z^{-2})(1 - 0.181z^{-1} + 0.510z^{-2})}{(1 - 0.850z^{-1})(1 + 0.359z^{-1})(1 - 0.567z^{-1} + 0.816z^{-2})(1 - 0.494z^{-1} + 0.799z^{-2})}$$

$$Q_{22}^*(z^{-1}) = \frac{-1.001(1 + 0.006z^{-1})(1 - 1.284z^{-1} + 0.589z^{-2})(1 - 0.161z^{-1} + 0.495z^{-2})}{(1 - 0.855z^{-1})(1 + 0.078z^{-1})(1 - 0.554z^{-1} + 0.811z^{-2})(1 - 0.512z^{-1} + 0.802z^{-2})}$$

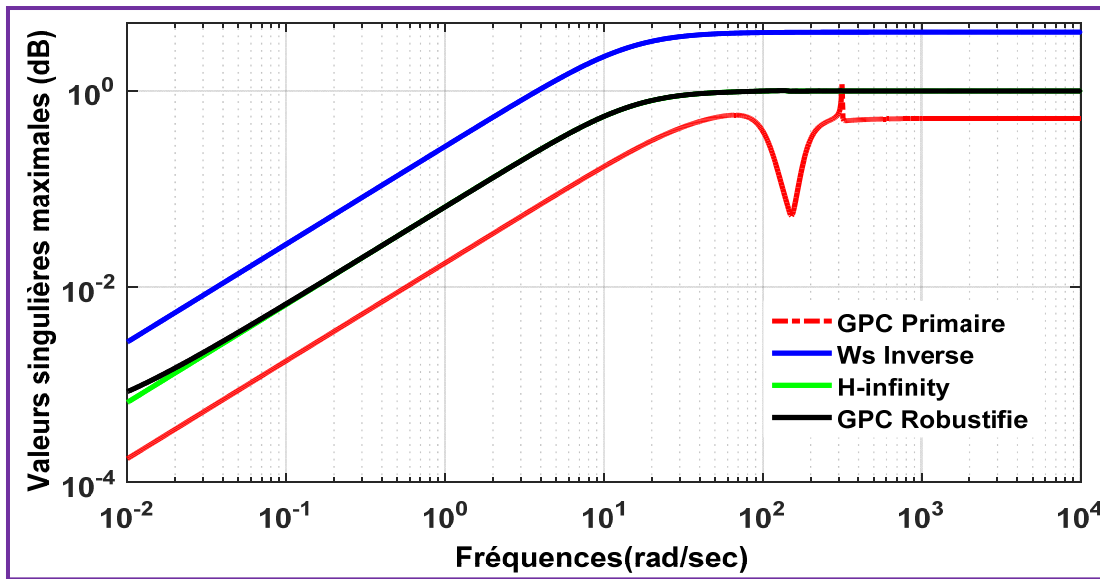
### 4.3. 3. Réponses fréquentielles et temporelles du système bouclé

L'analyse fréquentielle du système bouclé par les trois contrôleurs précédents est effectuée dans la plage fréquentielle  $[\omega_{min}, \omega_{max}] = [10^{-2}, 10^4]$  radian/seconde. La **Figure.4.8** illustre l'examen de la condition sur la stabilité robuste du système bouclé par les trois contrôleurs cités précédemment.



*Figure.4.8 : Robustesse sur la stabilité robuste*

Selon la **Figure.4.8**, on peut voir que la condition sur la stabilité robuste est bien respectée par le contrôleur de la méthode  $H_\infty$  et celui de la méthode GPC robustifiée. Cette figure montre également que  $\sigma_{max}[T_{y_0}(e^{-j\omega})]$  dépasse sa limite supérieure  $\frac{1}{\sigma_{max}[W_{T_d}(e^{-j\omega})]}$  dans la plage des fréquences  $\omega \in [80, 10^4]$  rad/sec. En outre, pour les fréquences supérieures à  $\omega = 62.49$  rad/sec, le lieu des  $\sigma_{max}[T_{y_1}(e^{-j\omega})]$  est inférieur à la valeur de  $-12.407$  dB. Ceci est traduit une amélioration de l'effet des bruits de mesure plus  $10^{+1}$  fois par rapport à celui du système bouclé par le contrôleur prédictif primaire. examinons à présent la robustesse sur les performances nominales qui est illustré par la **Figure.4.9**:



*Figure.4.9 : Robustesse sur les performances nominales*

Selon la **Figure 4.9**, on peut voir que le contrôleur prédictif robustifié garantit toujours la satisfaction de la condition sur les performances nominales mais avec une marge plutôt acceptable. Comme résultat, ce contrôleur atteint un compromis de robustesse acceptable par rapport au celui du contrôleur prédictif primaire. Pour confirmer les résultats dans le plan temporel, on applique maintenant trois excitations sur les systèmes bouclés présentés par la **Figure.4.6** et la **Figure.4.7**. Ces excitations sont les suivantes:

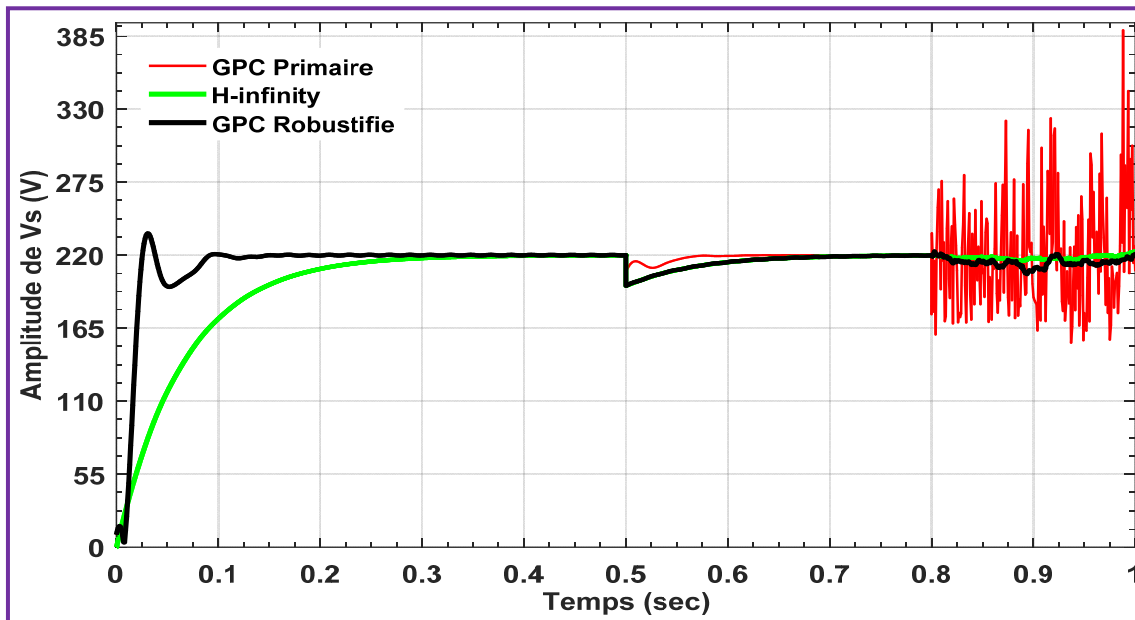
- Le vecteur de consigne représente les tensions statoriques triphasées de référence. Ces dernières sont imposées par l'amplitude 220 volts et la fréquence égale à  $f = 50 \text{ Hz}$  pour chaque phase. Le vecteur de référence est donc donné par l'expression ci-dessous :

$$V_s^{ref} = \begin{pmatrix} V_{s,a}^{ref} = 220 \sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{3}\right) \\ V_{s,b}^{ref} = 220 \sin(2\pi ft) \\ V_{s,c}^{ref} = 220 \sin\left(2\pi ft + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}_{f=50\text{Hz}}$$

- Le courant de perturbation  $\tilde{I}_s$ , qui est considéré par le vecteur  $\tilde{I}_s = \begin{pmatrix} \tilde{I}_{ds} = 30A \\ \tilde{I}_{qs} = 30A \end{pmatrix}$  appliqué à partir de l'instant du temps  $t = 0.5 \text{ sec}$ .
- Le vecteur des bruits de mesure  $\eta$  est considéré comme un bruit blanc présenté sous forme d'une distribution Gaussienne de valeur moyenne nulle et de variance égale 10.

Ce bruit est ajouté dans chaque voie du système bouclé et cela à partir de l'instant du temps  $t = 0.8 \text{ sec}$ .

La **Figure.4.10** présente l'amplitude fournie par les tensions statoriques triphasées fournies par la MADA.



*Figure.4.10 : Comparaison entre les trois réponses du système en présence de perturbations et des bruits de mesure*

D'après cette figure, on peut observer clairement l'amélioration de la dynamique d'atténuation de l'effet des bruits de mesure en régime stationnaire.

La **Figure.4.11**, présente la tension statorique  $V_{s,a}$  fournie par le contrôleur prédictif primaire. Cette tension est comparée à celle de la référence  $V_{s,a}^{ref}$  durant l'intervalle de simulation  $t \in [0, 1]$  seconde. A partir de cette figure, on peut distinguer trois dynamiques qui sont : La dynamique de poursuite de  $V_{s,a}^{ref}$  en régime transitoire, présentée tout au long de l'intervalle du temps  $t \in [0, 0.1]$  seconde, par la **Figure.4.12**, la dynamique de rejection du vecteur des charges présentée tout au long de l'intervalle du temps  $t \in [0.48, 0.6]$  seconde, par la **Figure.4.13** et finalement, la dynamique d'atténuation de l'effet des bruits de mesures en régime stationnaire présentée tout au long de l'intervalle du temps  $t \in [0.8, 1]$  seconde, par la **Figure.4.14**.



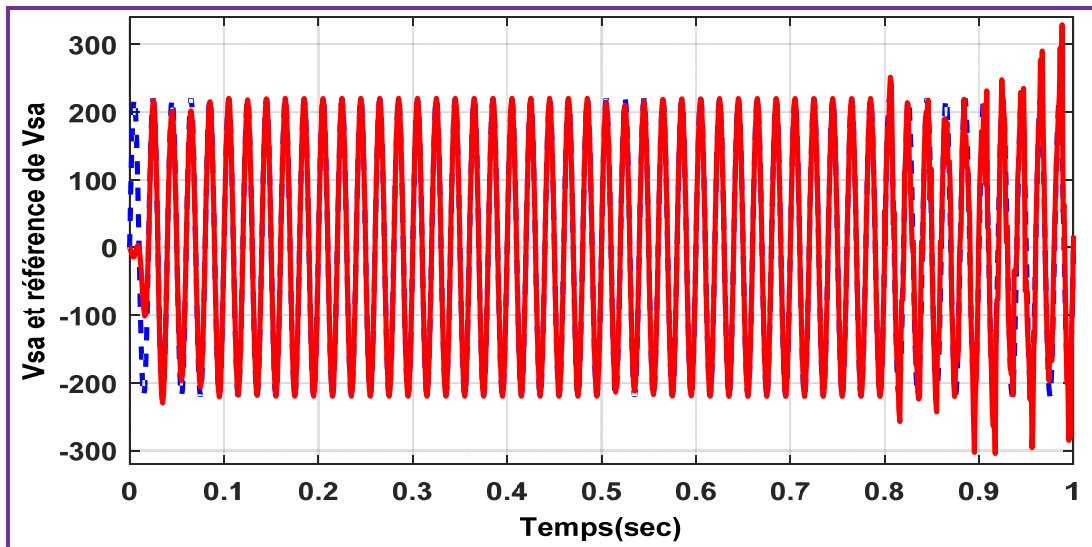


Figure.4.11 : Tension statorique  $V_{sa}$  assurée par le contrôleur prédictif primaire

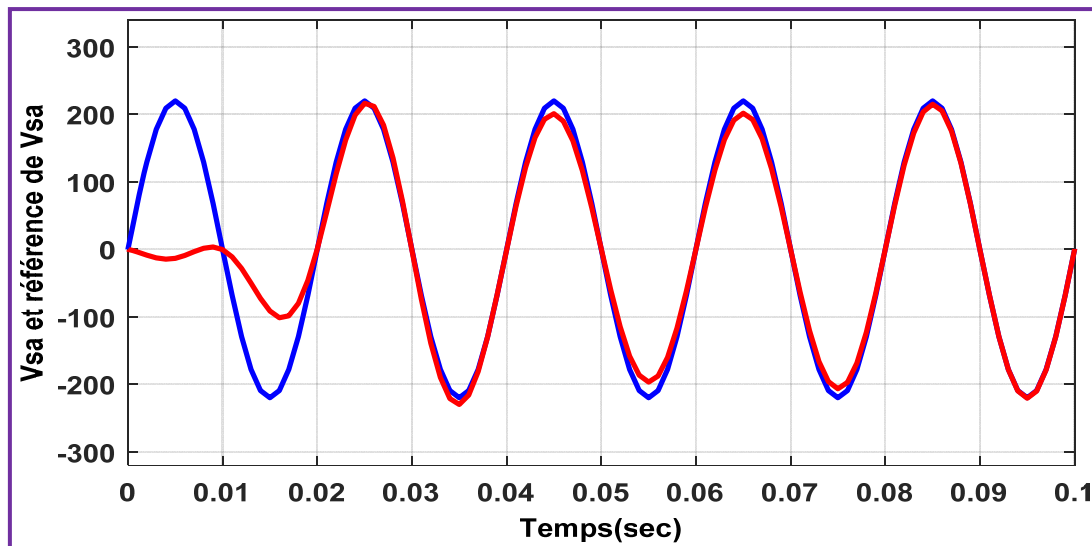


Figure.4.12 : Dynamique de poursuite fournie par le GPC primaire en régime transitoire

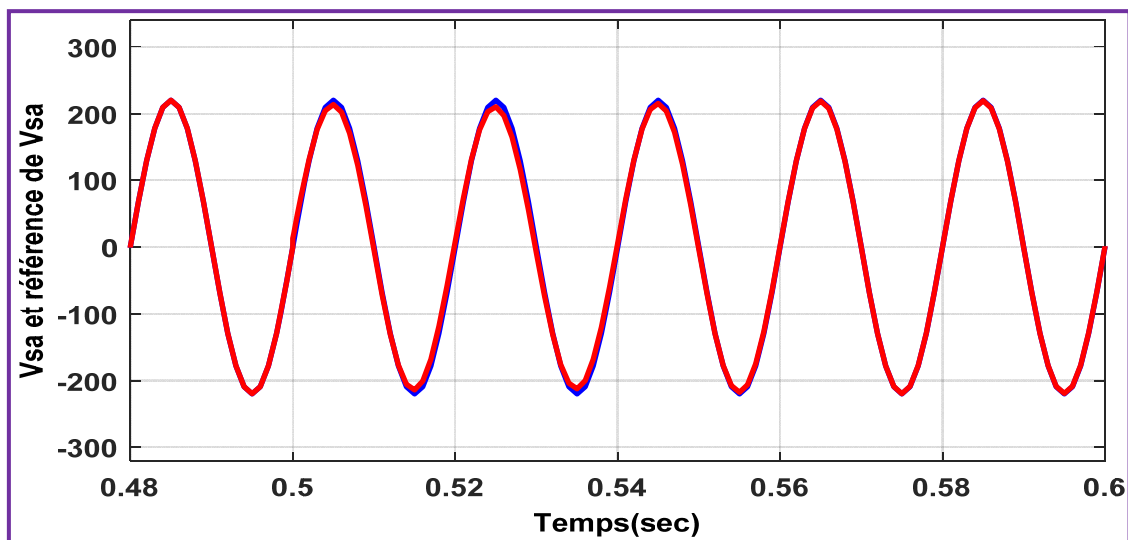
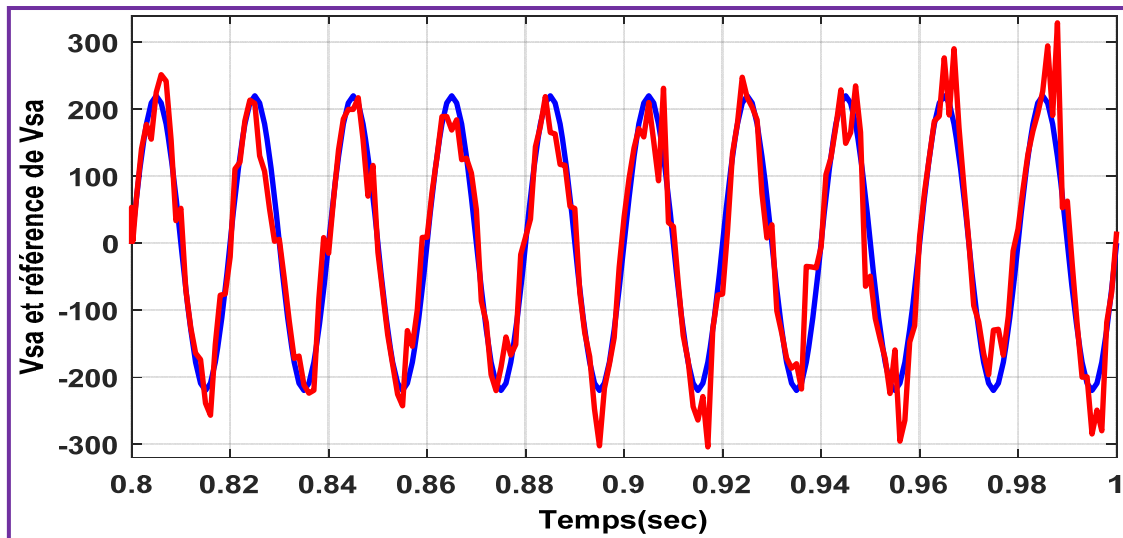


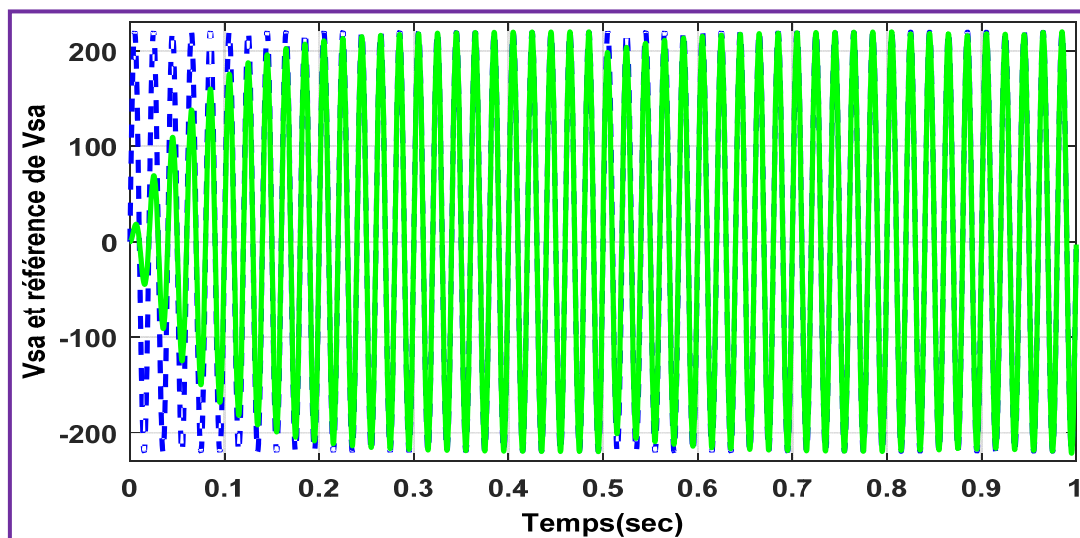
Figure.4.13 : Dynamique de rejection de l'effet des charges par le GPC primaire



*Figure.4.14 : Dynamique d'atténuation des bruits par le contrôleur GPC primaire*

D'après les figures précédentes, on peut voir que la dynamique de poursuite du contrôleur primaire assure des tensions lisses et stables comportant une fréquence constante égale à 50 Hz. La rejection de l'effet de charge est effectuée dans un intervalle de temps très court. En revanche, l'allure du signal sinusoïdal est partiellement déformée en présence des bruits de mesure en régime permanent, chose qui provoque une dégradation remarquable des caractéristiques électriques souhaitées.

La **Figure.4.15**, présente les mêmes tensions précédentes que celles obtenues avec le système bouclé par le contrôleur robuste synthétisé par la méthode  $H_{\infty}$ . On obtient donc les réponses suivantes :



*Figure.4.15 : Tension statorique  $V_{sa}$  assurée par le contrôleur robuste*

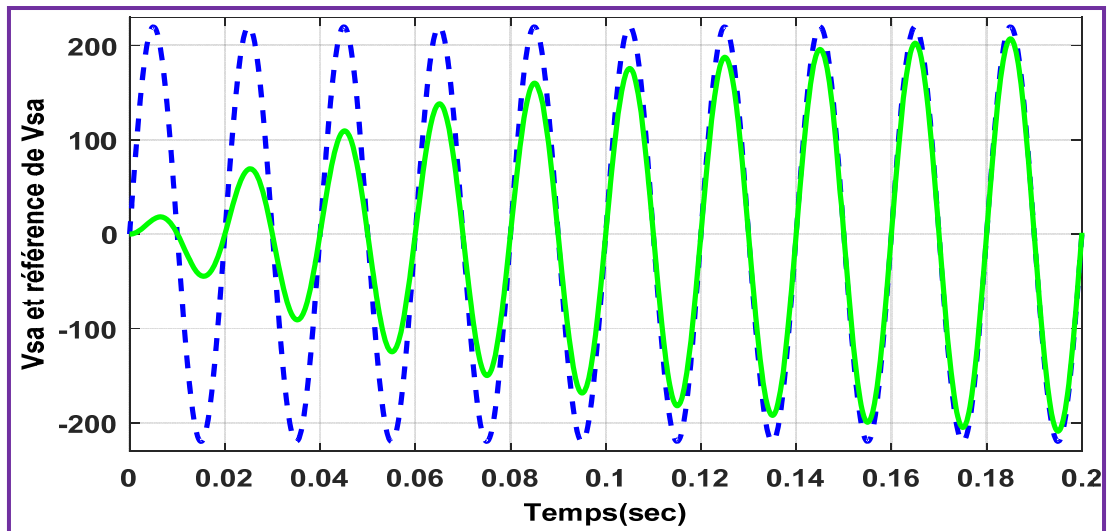


Figure.4.16 : Dynamique de poursuite fournie par le contrôleur robuste en régime transitoire

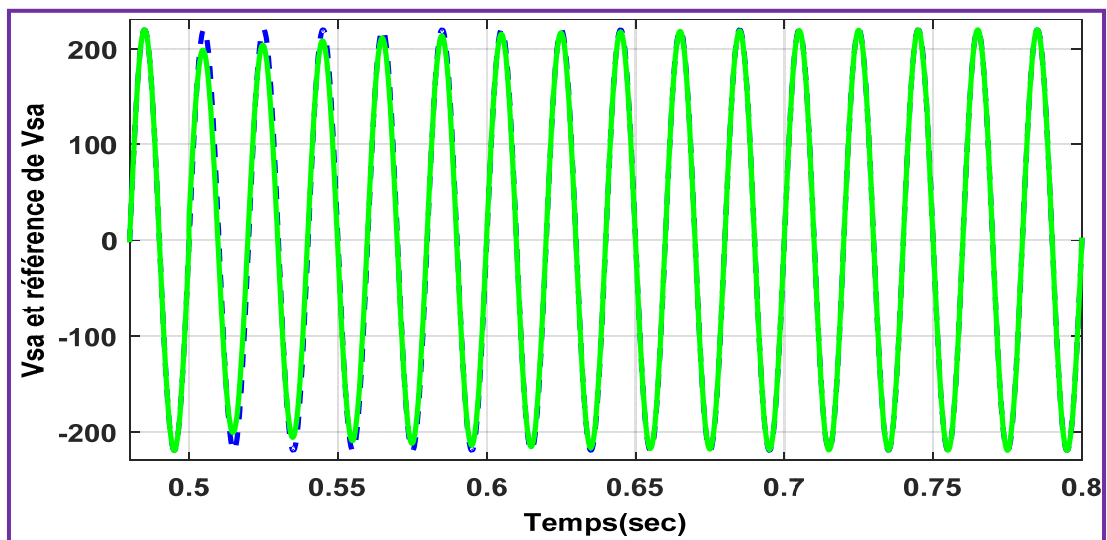


Figure.4.17 : Dynamique de rejection de l'effet de charges par le contrôleur robuste

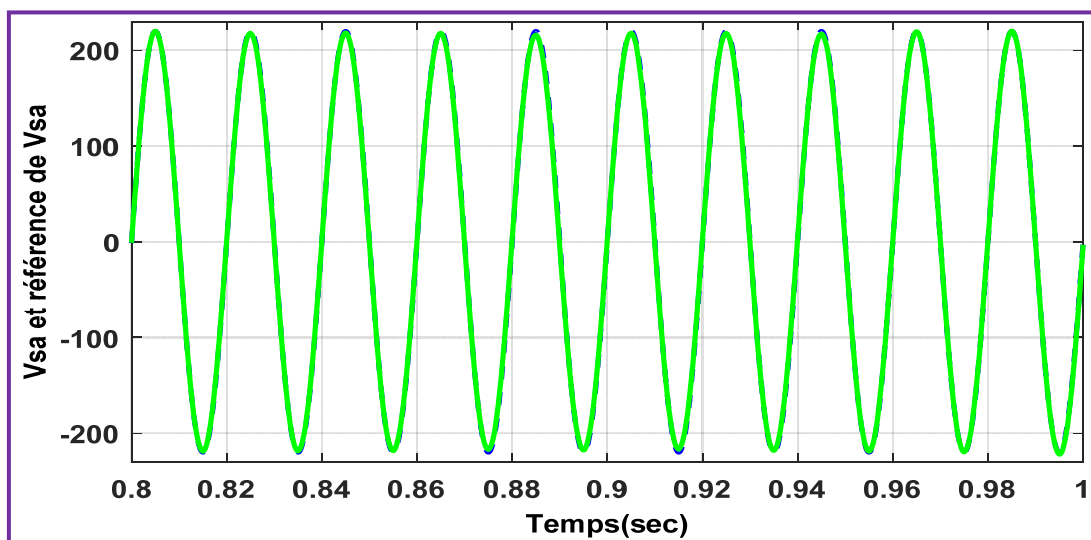


Figure.4.18 : Dynamique d'atténuation des bruits par le contrôleur robuste

D'après les figures précédentes (4.16, 4.17, 4.18), on peut voir clairement une amélioration de la dynamique d'atténuation de l'effet des bruits de mesure (effet presque nul en régime permanent). La dynamique de poursuite est caractérisée par l'obtention d'une tension stable et lisse ayant une fréquence constante, un dépassement presque nul, un temps d'établissement néanmoins lent en comparaison avec celui fourni par le contrôleur prédictif primaire. La dynamique de rejection de l'effet des charges est également acceptable et nécessitant un temps plutôt lent. Pour le contrôleur prédictif robustifié, celui à conserve toujours les meilleures caractéristiques électriques (amplitude, fréquence) fournies en régime transitoire par le contrôleur prédictif primaire. Il conserve également les meilleures robustesses fournies par le contrôleur robuste. Ces deux résultats sont illustrés par les figures ci-dessous :

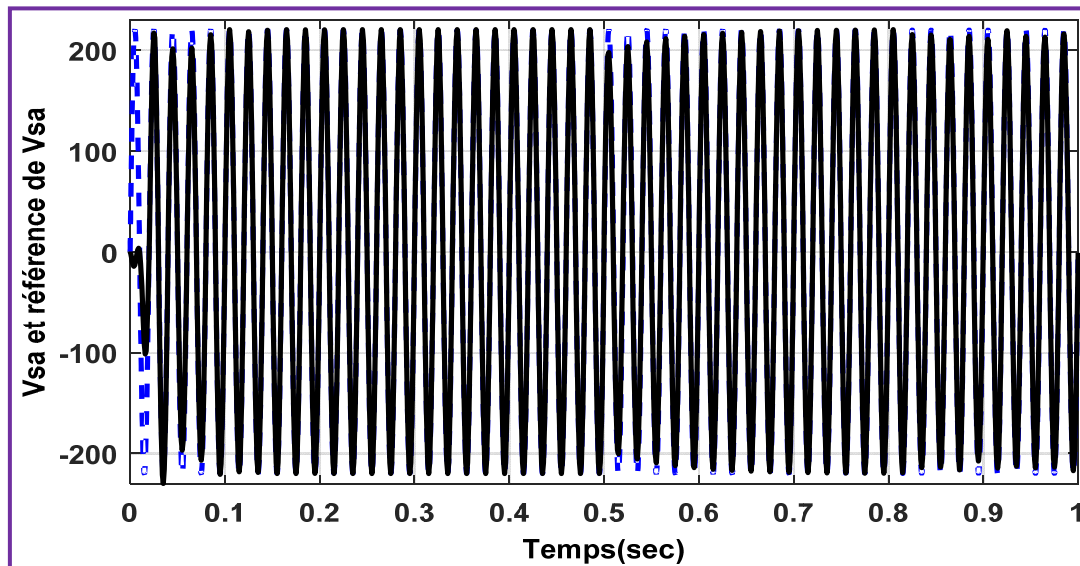


Figure.4.19 : Tension statorique  $V_{sa}$  assurée par le contrôleur par GPC robustifié

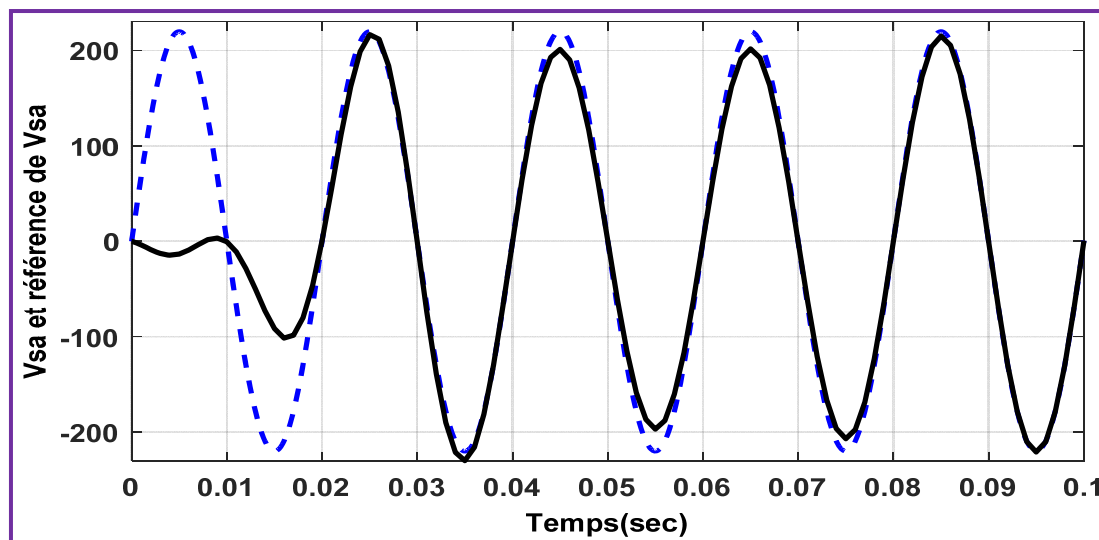
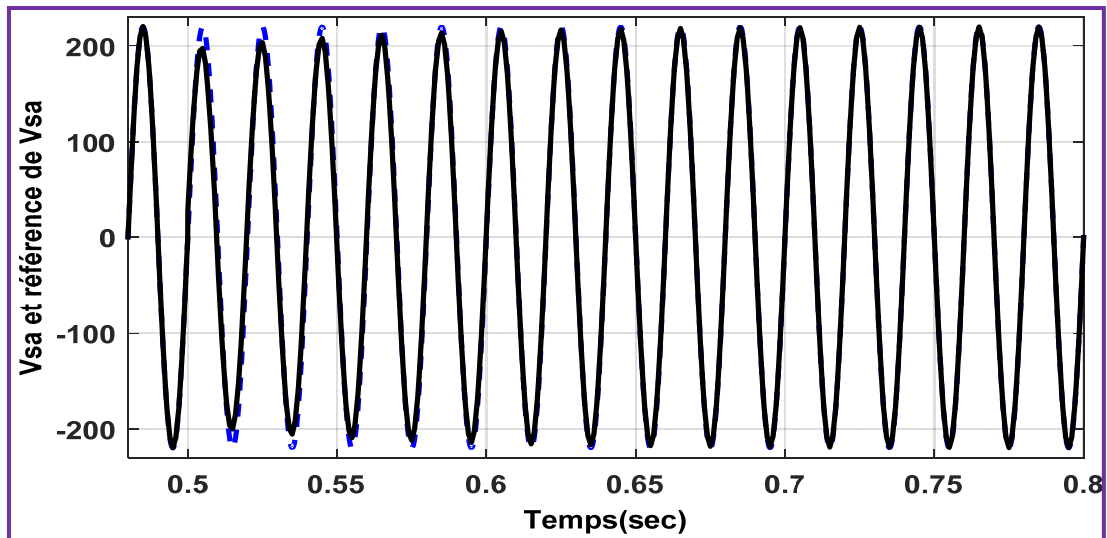
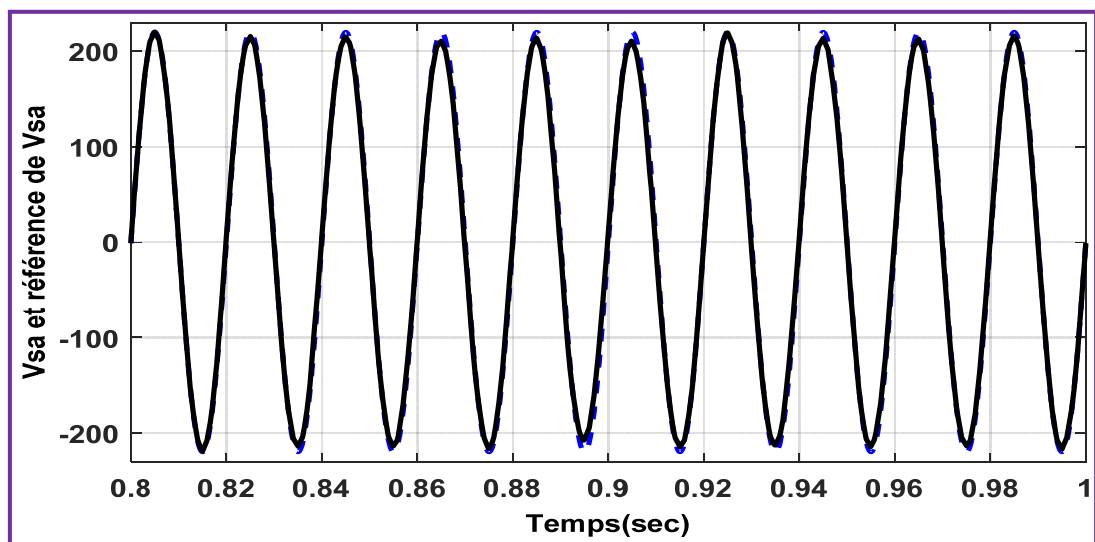


Figure.4.20 : Dynamique de poursuite fournie par le GPC robustifié en régime transitoire



*Figure.4.21 : Dynamique de rejection de l'effet de charges par le GPC robustifié*



*Figure.4.22 : Dynamique d'atténuation des bruits par le contrôleur GPC robustifié*

Les dynamiques citées précédemment pour le système bouclé par les trois contrôleurs ont aboutie sur des tensions rotoriques (commandes) présentées, pour chaque contrôleur, comme suit :

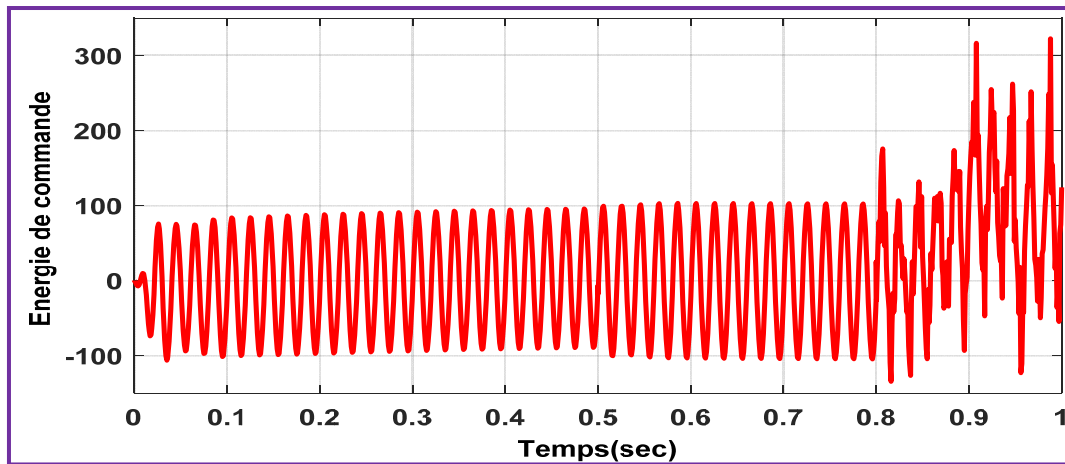


Figure.4.23 : Énergie de commande fournie par le GPC primaire

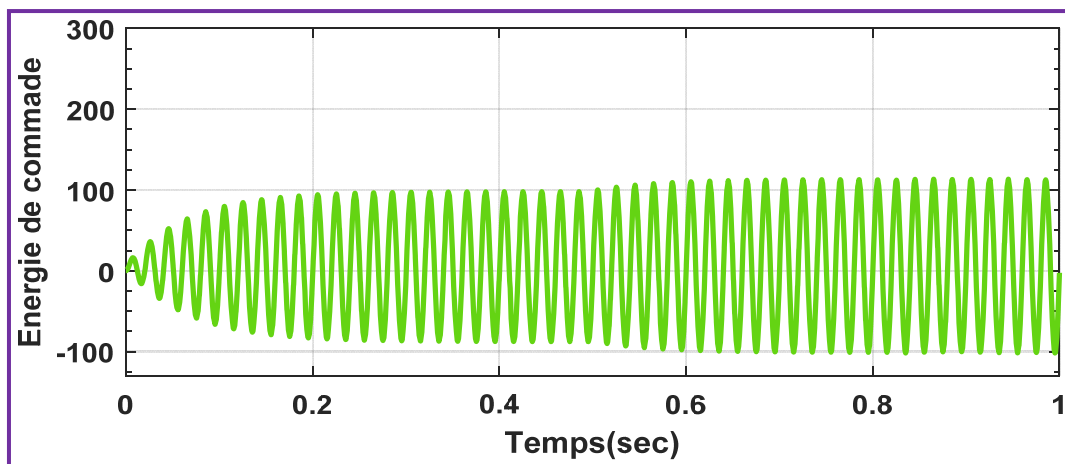


Figure.4.24 : Énergie de commande fournie par le contrôleur robuste

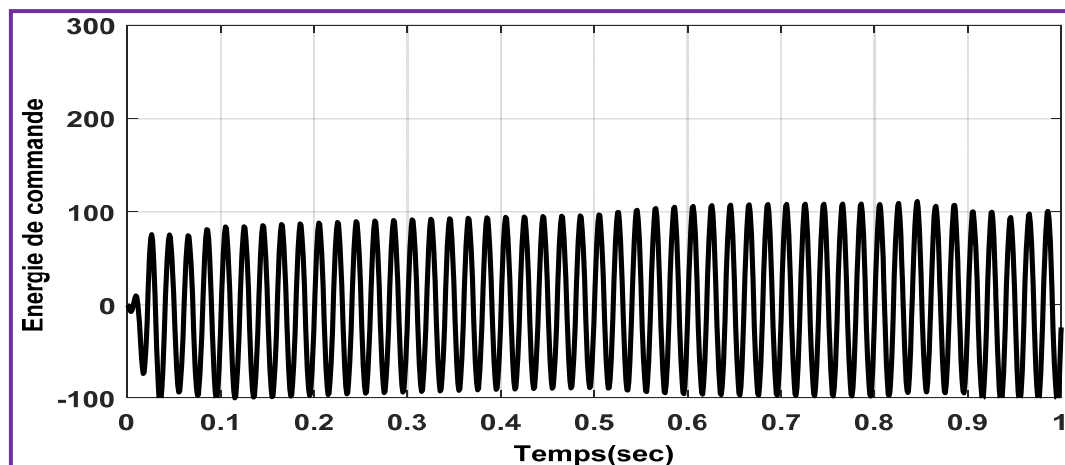


Figure.4.25 : Énergie de commande fournie par le GPC robustifié

#### 4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons validé notre approche de robustification pour améliorer la marge de robustesse de la stabilité robuste du système bouclé par le contrôleur prédictif

primaire, tout en respectant la condition sur les performances nominales. A cet effet, les entrées de perturbation sont bien rejetées, l'effet des bruits de mesure sont bien atténués, ainsi que le compromis de robustesse a été bien réalisé. La robustification était appliquée sur les deux contrôleurs prédictifs primaires. Le premier est conçu pour la commande d'un actionneur hydraulique, tandis que le second contrôleur est synthétisé pour commander une machine asynchrone à double alimentations.

Cette nouvelle stratégie est basée sur la conception *a priori* du contrôleur robuste qui assure des allures souhaitées pour ces matrices de sensibilité à travers le choix adéquat des matrices de pondération utilisées dans son critère de performance. Cette nouvelle idée présente l'avantage de synthétiser, d'une manière systématique, le transfert désiré de Youla où sa structure est assurée par une approche basée sur l'identification fréquentielle. La clé de succès du contrôleur élaboré par notre proposition réside dans sa capacité de conserver la meilleure dynamique de poursuite du contrôleur prédictif primaire en plus du maintien des robustesses du contrôleur robuste.

# Conclusion générale et perspectives



### Conclusion générale:

L'un des moyens employés pour sécuriser un système bouclé face aux incertitudes de modélisation en présence des effets non souhaités causés par, la linéarisation du comportement réel d'un système à commander, la défaillance des instruments de mesure installés dans la boucle de commande et l'existence d'autres grandeurs d'influences,...etc., la robustification qui a été proposée dans ce travail offre la possibilité d'atteindre avec succès tous les objectifs suscités. Elle a la capacité de développer un contrôleur très robuste assurant un compromis de robustesse efficace non seulement pour le régime de fonctionnement nominal du système, mais aussi pour tous les régimes perturbés potentiels qui peuvent apparaître à cause des erreurs commises lors de la phase de modélisation.

La robustification proposée a été appliquée évidemment sur un contrôleur prédictif primaire avec lequel une bonne dynamique de poursuite des trajectoires de référence a été atteinte via un réglage optimal des paramètres par la méthode GPC. Cette bonne dynamique était assurée sans prise en considération de la dégradation de la robustesse du système bouclé en cas de présence des incertitudes de modélisation. Cette dernière présente précisément l'objet principal d'une autre stratégie de commande : la commande robuste par la méthode  $H_\infty$ . Comme cette stratégie de commande destinée à stabiliser les systèmes incertains et cela via la quantification de toutes les grandeurs exogènes par des matrices de pondération avec lesquelles le critère de sensibilité mixte était formulé puis résolu via un algorithme d'optimisation assurant la représentation d'état du contrôleur robuste correspondant.

A présent, le problème d'hybridation des deux contrôleurs précédents est résolu par le développement du transfert de Youla. La détermination de celui-ci faisant l'objet de cette thèse. En effet, le problème majeur mentionné dans plusieurs travaux antérieurs, est la proposition d'une structure adéquate du transfert de Youla assurant la satisfaction de toutes les spécifications imposées par le cahier de charges. En conséquence, l'objectif de notre travail devient plus précis.

Nous avons proposé à cet effet une approche d'optimisation utilisant l'identification fréquentielle pour aboutir, d'une manière automatique, sur la structure optimale de ce transfert. Les étapes requises, pour robustifier le contrôleur prédictif primaire, ont été détaillées et validées dans chacun des chapitres de ce manuscrit. Et cela via la commande d'un système incertain modélisé par un transfert non carré. Les résultats obtenus sont

## Conclusion générale et perspectives

---

présentés dans les deux plans fréquentiel puis temporel dans lesquels les avantages et les inconvénients des contrôleurs standards ont été présentés.

Finalement, le manuscrit est achevé par la validation de l'approche proposée sur deux prototypes très connus dans des revues de renommées internationales. Le premier système est celui de l'actionneur hydraulique dont les détails sont disponibles dans la bibliothèque du Matlab et le second système est un générateur asynchrone à doubles alimentations présenté dans plusieurs travaux antérieurs.

Les résultats de simulation fournis par la robustification proposée sont très encourageants. Les améliorations requises pour perfectionner cette idée peuvent ouvrir une fenêtre à d'autres éventuels candidats dans le futur proche.

### **Perspectives :**

Comme perspective, nous conseillons les futurs candidats intéressés par cet axe de recherche de penser à introduire l'ordre fractionnaire dans le transfert de Youla lors de la phase de robustification du contrôleur prédictif primaire. en outre, d'autres perspectives peuvent être résumées dans les points ci-dessous :

- Tenir compte des incertitudes structurées lors la phase de modélisation et de synthèse du transfert de Youla assurant une marge de sécurité face à ce type d'erreurs de modélisation.
- Introduire les pondérations fractionnaires dans le critère de sensibilité mixte afin de prendre en considération la présence d'un niveau élevé des spécifications fréquentielles et pourquoi ne pas, prendre en compte également les spécifications temporelles.
- Proposer une méthode efficace et simple permettant de résoudre le problème de la synthèse du transfert de Youla par la méthode directe.

# Annexe A

## Introduction :

Nous montrons dans cette partie une méthode de résolution des équations diophantiennes données dans le chapitre I, cette dernière donnée pour le cas où  $C(z^{-1}) \neq I_{n \times n}$  du modèle de *CARIMA*.

## Résolution récursive de l'équation diophantienne:

Soit  $(E_k, F_k)$  l'unique couple solution de l'équation Diophantienne (1.17) avec:

$$C = E_k A \Delta + z^{-k} F_k, \quad (\text{A.1})$$

Avec :

$$A(z^{-1}) = I_{n \times n} + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_{n_a} z^{-n_a} \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta = 1 - z^{-1} \quad (\text{A.3})$$

$$C(z^{-1}) = I_{n \times n} + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_{n_c} z^{-n_c} \quad (\text{A.4})$$

$$E_k(z^{-1}) = E_0^k + E_1^k z^{-1} + \dots + E_{k-1}^k z^{-k+1} \quad (\text{A.5})$$

$$F_k(z^{-1}) = F_0^k + F_1^k z^{-1} + \dots + F_{n_f}^k z^{-n_f^{(k)}} \quad (\text{A.6})$$

Les coefficients des matrices  $A$ ,  $C$ ,  $E_k$  et  $F_k$  sont des polynômes en  $z^{-1}$  qui ont pour degrés respectifs  $n_a$ ,  $n_c$ ,  $k - 1$  et  $n_f^{(k)}$ .

Les matrices  $A_i$ ,  $C_i$ ,  $E_i^k$  et  $F_i^k$  sont à coefficients réels et regroupent les coefficients de ces polynômes.

Le couple des matrices de polynôme  $(E_k, F_k)$  est l'unique solution de cette équation, que l'on peut encore mettre sous la forme :

$$I_{n \times n} + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_{n_c} z^{-n_c} = [E_0^k + E_1^k z^{-1} + \dots + E_{k-1}^k z^{-k+1}] [I_{n \times n} + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_{n_a} z^{-n_a}] [I_{n \times n} - z^{-1}] + F_0^k + F_1^k z^{-1} + \dots + F_{n_f}^k z^{-n_f^{(k)}} \quad (\text{A.7})$$

Le degré de la matrice  $E_k A \Delta$  vaut  $n_a + k$  et le degré de  $z^{-1} F_k$  est  $n_f^{(k)} + k$ . Etant donné que les ordres des deux membres de l'équation (A.7) doivent être identiques, on déduit par identification l'ordre  $n_f^{(k)}$  du polynôme  $F_k$  :

$$\begin{cases} n_c \leq n_a + k \Rightarrow n_a + k = nf^{(k)} + k \\ n_c > n_a + k \Rightarrow nf^{(k)} + k = n_c \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

D'où :

$$nf^{(k)} = \max(n_a, n_c - k) \quad (\text{A.9})$$

Pour l'horizon de prédiction  $k - 1$ , l'équation (A.1) s'écrit :

$$C = E_{k-1}A\Delta + z^{-k+1}F_{k-1} \quad (\text{A.10})$$

A partir de (A.1) et (A.10), on obtient :

$$(E_k - E_{k-1})A\Delta + z^{-k+1}(z^{-1}F_k - F_{k-1}) = 0 \quad (\text{A.11})$$

Etant donné la forme de  $\Delta$  (équation (A.4)), on peut récrire (A.11) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & [(E_0^k - E_0^{k-1}) + (E_1^k - E_1^{k-1})z^{-1} + \dots + (E_{k-2}^k - E_{k-2}^{k-1})z^{-k+2} + E_{k-1}^k z^{-k+1}] \times \\ & [I_{n \times n} + (A_1 - I_{n \times n})z^{-1} + (A_2 - A_1)z^{-2} + \dots + (A_{n_a} - A_{n_a-1})z^{-n_a} - A_{n_a}z^{-n_a-1}] - \\ & z^{-k+1}[F_0^{k-1} + (F_1^{k-1} - F_0^k)z^{-1} + \dots + (F_{nf}^{k-1} - F_{nf}^k)z^{-nf} - F_{nf}^k z^{-nf-1}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

En identifiant les membres de gauche et de droite, on trouve que :

$$E_j^k - E_j^{k-1} = 0 \quad \forall j = 0, \dots, k-2 \quad (\text{A.13})$$

Par conséquent, on a :

$$E_k = E_{k-1} + z^{-k+1}E_{k-1}^k \quad (\text{A.14})$$

On peut simplifier les notations en écrivant que  $E_j^k = E_j \forall j$ . Ainsi l'équation (A.12) devient :

$$\begin{aligned} & z^{-k+1}E_{k-1}[I_{n \times n} + (A_1 - I_{n \times n})z^{-1} + \dots + (A_{n_a} - A_{n_a-1})z^{-n_a} - A_{n_a}z^{-n_a-1}] = \\ & z^{-k+1}[F_0^{k-1} + (F_1^{k-1} - F_0^k)z^{-1} + \dots + (F_{nf}^{k-1} - F_{nf}^k)z^{-nf} - F_{nf}^k z^{-nf-1}] \end{aligned}$$

Et on déduit que :

$$z^{-1}F_k = F_{k-1} - z^{-k+1}E_{k-1}A\Delta \quad (\text{A.15})$$

A partir de ces relations, on peut finalement définir l'algorithme de calcul récursif suivant :

**Initialisation de la récurrence :**

Pour  $k=1$ , l'équation (A.7) s'écrit :

$$I_{n \times n} + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_{n_c} z^{-n_c} = E_0 [I_{n \times n} + (I_{n \times n} + A_1 - I_{n \times n}) z^{-1} + \dots + (A_{n_a} - A_{n_a-1}) z^{-n_a} - A_{n_a} z^{-n_a-1}] + F_0^1 + F_1^1 z^{-1} + \dots + F_{n_f}^1 z^{-n_f-1}$$

Avec  $n_f^{(1)} = \max(n_a, n_c - 1)$ . On en déduit les initialisations suivantes :

$$\begin{cases} E_0 = I_{n \times n} \\ F_i^j = C_1 - E_0(A_{i+1} - A_i) \end{cases} \quad 0 \leq i \leq n_f^{(1)} \quad (\text{A.16})$$

**Calcul récursif de E et F :**

On utilise l'équation (A.15), on déduit la récurrence pour  $i \geq 2$ :

$$\begin{cases} E_{k-1} = F_0^{k-1} \\ F_i^j = F_{i+1}^{j-1} - E_{j-1}(A_{i+1} - A_i) \end{cases} \quad 0 \leq i \leq n_f^{(1)} \quad (\text{A.17})$$

**Résolution récursive de l'équation diophantienne :**

Soit l'équation diophantienne que l'on rappelle ici :

$$E_k \cdot B = C \cdot G_k + z^{-k} H_k \quad (\text{A.18})$$

Dans laquelle :

$$B(z^{-1}) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots + B_{n_b} z^{-n_b} \quad (\text{A.19})$$

$$E_k(z^{-1}) = E_0 + E_1 z^{-1} + \dots + E_{k-1} z^{-k+1} \quad (\text{A.20})$$

$$C(z^{-1}) = I_{m \times m} + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_{n_c} z^{-n_c} \quad (\text{A.21})$$

$$\Delta = \delta = 1 - z^{-1} \quad (\text{A.22})$$

$$G_k(z^{-1}) = G_0^k + G_1^k z^{-1} + \dots + G_{k-1}^k z^{-k+1} \quad (\text{A.23})$$

$$H_k(z^{-1}) = H_0^k + H_1^k z^{-1} + \dots + H_{n_h}^k z^{-n_h} \quad (\text{A.24})$$

Les coefficients des matrices  $B(z^{-1}), E_k(z^{-1}), C(z^{-1}), G_k(z^{-1})$  et  $H_k(z^{-1})$  sont des polynômes en  $z^{-1}$  dont les coefficients sont regroupés dans les matrices réelles  $B(z^{-1}), E_k(z^{-1}), C(z^{-1}), G_k(z^{-1})$  et  $H_k(z^{-1})$ . Les degrés respectifs de ces polynômes sont  $nb, j-1, nc, j-1$  et  $nh$ . Sachant que  $n_h = \max(n_c, n_b) - 1$ .

On suppose que les matrices  $C$  s'écrit sous forme diagonale, *i.e.*,  $C(z^{-1}) = c(z^{-1})I_{m \times m}$  avec  $c(z^{-1})$  est un polynôme de degré  $nc$ .

Le couple des matrices  $(G_k(z^{-1}), H_k(z^{-1}))$  est l'unique solution de cette équation, que l'on peut encore mettre sous forme suivante :

$$\begin{aligned} [E_0 + E_1 z^{-1} + \dots + E_{k-1} z^{-k+1}] \times [B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots + B_{n_b} z^{-n_b}] = [I_{m \times m} + \\ C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_{n_c} z^{-n_c}] \times [G_0^k + G_1^k z^{-1} + \dots + G_{k-1}^k z^{-k+1}] + [H_0^k + H_1^k z^{-1} + \dots + \\ H_{n_h}^k z^{-n_h}] \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

L'ordre des polynômes des deux membres de (A.25) doit être identique. D'où les relations suivantes :

$$Si \begin{cases} \text{ordre}(\mathbf{S1}) \leq \text{ordre}(\mathbf{S2}) & \text{alors } \text{ordre}(\mathbf{S3}) = \text{ordre}(\mathbf{S2}) \\ \text{ordre}(\mathbf{S1}) > \text{ordre}(\mathbf{S2}) & \text{alors } \text{ordre}(\mathbf{S3}) \leq \text{ordre}(\mathbf{S1}) \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} n_b \leq n_c \Rightarrow n_h = n_c - 1 \\ n_b > n_c \Rightarrow n_h = n_b - 1 \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

On en déduit l'ordre  $n_h$  du polynôme  $H$  :

$$n_h = \max(n_c, n_b) - 1 \quad (\text{A.28})$$

On récrit l'équation (A.18) pour l'horizon de prédiction  $k-1$  :

$$E_{k-1} \cdot B = C \cdot G_{k-1} + z^{-k} H_{k-1} \quad (\text{A.29})$$

En faisant la différence entre (A.18) et (A.29), on obtient :

$$C(G_k - G_{k-1}) + z^{-k+1}[z^{-1}H_k - H_{k-1} - z^{-k+1}(E_k - E_{k-1})B] = 0 \quad (\text{A.30})$$

d'après l'équation (A.14) :

$$E_k - E_{k-1} = E_{k-1} z^{-k+1} \quad (\text{A.31})$$

D'où :

$$C(G_k - G_{k-1}) - z^{-k+1}[H_{k-1} - z^{-1}H_k + E_{k-1}B] = 0 \quad (\text{A.32})$$

En récrivant cette équation sous forme étendue on arrive à :

$$\begin{aligned} & [I_{m \times m} + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_{n_c} z^{-n_c}] [(G_0^k - G_0^{k-1}) + (G_1^k - G_1^{k-1})z^{-1} + (G_2^k - \\ & G_2^{k-1})z^{-2} \dots + (G_{k-2}^k - G_{k-2}^{k-1})z^{-k+2} + G_{k-1}^k z^{-k+1}] - [H_0^{k-1} + \dots + (H_{n_h}^{k-1} - H_{n_h-1}^k)z^{-n_h} + \\ & H_{n_h}^k z^{-n_h-1}] + E_{k-1}[B_0 + B_1 z^{-1} + \dots + B_{n_b}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Etant donné que les polynômes de  $C$  ne peuvent pas être factorisé par  $z^{-k+1}$ , on trouve que :

$$G_k^j - G_k^{j-1} = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, j-2 \quad (\text{A.34})$$

Et par conséquent, on a :

$$G_k - G_{k-1} = z^{-k+1} G_k^{k-1} \quad (\text{A.35})$$

L'égalité (A.34) permet de simplifier les notations et d'écrire que  $\forall k, G_k^{k-1} = G_k$ , ainsi l'équation (A.33) devient :

$$C G_{k-1} z^{-k+1} - z^{-k+1}[H_{k-1} - z^{-1}H_k + E_{k-1}B] = 0 \quad (\text{A.36})$$

D'où l'on peut déduire l'équation récursive suivante :

$$z^{-1}H_k = H_{k-1} - C G_{k-1} + E_{k-1}B \quad (\text{A.37})$$

Ces relations permettent de définir l'algorithme de calcul récursif suivant :

**Initialisation de la récurrence :**

Pour  $k = 1$ , l'équation (A.25) s'écrit :

$$E_0[B_0 + B_1 z^{-1} + \dots + B_{n_b}] = [I_{m \times m} + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_{n_c} z^{-n_c}]G_0 + [H_0^1 z^{-1} + \dots + H_{n_h}^1 z^{-n_h-1}] \quad (\text{A.38})$$

On déduit que :



$$\begin{cases} G_0 = E_0 B_0 \\ H_i^1 = E_0 B_{i+1} - C_{i+1} G_0 \end{cases} \quad 0 \leq i \leq n_h \quad (\text{A.39})$$

*Calcul récursif de G et H :*

En récrivant l'équation (A.36) de manière étendue, on obtient :

$$\begin{aligned} [H_0^k z^{-1} + \dots + H_{n_h}^k z^{-n_h-1} = H_0^{k-1} + H_1^{k-1} z^{-1} + \dots + H_{n_h}^{k-1} z^{-n_h} -] [I_{m \times m} + C_1 z^{-1} + \\ C_2 z^{-2} + \dots + C_{n_c} z^{-n_c}] G_{k-1} + E_{k-1} [B_0 + B_1 z^{-1} + \dots + B_{n_b} z^{-n_b}] \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Pour  $K \geq 2$  on a donc :

$$\begin{cases} G_{k-1} = H_0^{k-1} + E_{k-1} B_0 \\ H_i^k = H_{i+1}^{k-1} + E_{k-1} B_{i+1} - C_{i+1} G_{k-1} \end{cases} \quad 0 \leq i \leq n_h \quad (\text{A.41})$$

# Annexe B

**Propriétés de la Transformation fractionnaire linéaire (LFT) :**

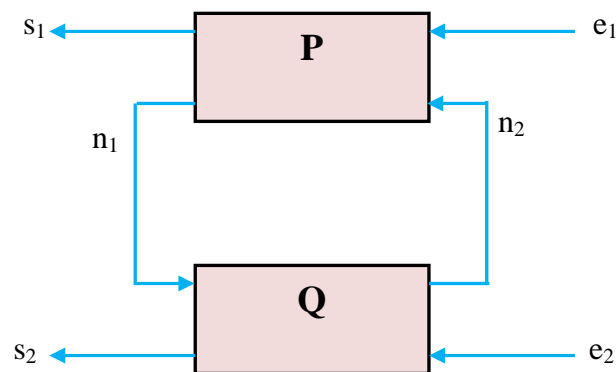
Soient les deux matrices  $P$  et  $Q$  qui sont données comme suit :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \text{ et } Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Le produit de  $P$  et  $Q$  est défini par :

$$S(P, Q) = P * Q = \begin{bmatrix} F_\ell(P, Q_{11}) & P_{12}(I - Q_{11}P_{22})^{-1}Q_{12} \\ Q_{21}(I - P_{22}Q_{11})^{-1}P_{21} & F_u(Q, P_{22}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Le diagramme fonctionnel du produit est donné par la figure (1).



*Figure (1) : Diagramme fonctionnel*

- Ce produit peut être étendu aux cas particuliers des matrices  $P$  ou  $Q$  n'ayant qu'un seul bloc, en adoptant les conventions :

$$P * Q_{11} := F_\ell(P, Q_{11}) \quad \text{et} \quad P_{22} * Q := F_u(Q, P_{22}) \quad (\text{B.3})$$

Par conséquent, les *LFT* sont un cas particulier du produit Star.

- On démontre également que le produit est associatif, c'est à dire :

$$(P * Q) * R = P * (Q * P) = P * Q * R \quad (\text{B.4})$$

**Composition de LFT :**

La propriété la plus intéressante des *LFT*, est que toute composition de *LFT* est encore une *LFT*. C'est à dire que des connexions en cascade, en parallèle, en boucle fermée...etc.,

préservent la structure d'une *LFT*. Donc la *LFT* est un outil de représentation très intéressant. Pour mettre en évidence sa puissance nous considérons les deux exemples suivants :

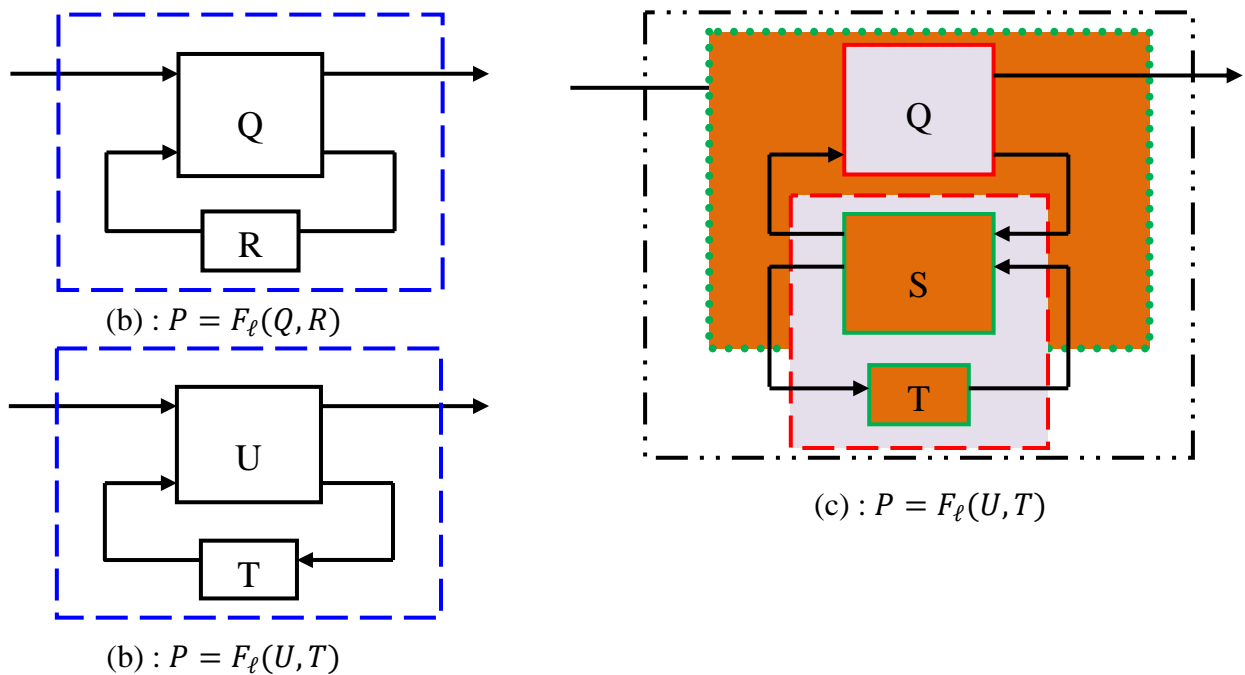
- a) Considérons le cas de la figure (2), où  $P$  est d'écrit sous forme d'une *LFT* inférieure de  $R$  qui est elle-même une *LFT* inférieure de  $T$ .

$$P = F_\ell(Q, R) \text{ et } R = F_\ell(S, T) \quad (\text{B.5})$$

On démontre qu'on peut écrire  $P$  comme une *LFT* faisant intervenir  $T$  sous la forme :  $P = F_\ell(U, T)$ .

avec :

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = Q * S \quad (\text{B.6})$$



**Figure (2) : Composition de LFT**

Des expressions similaires peuvent être déterminées, lorsqu'on utilise des *LFT* supérieures. Si nous supposons que :

$$P = F_u(Q, R) \text{ et } R = F_u(S, T) \quad (\text{B.7})$$

Nous obtenons  $P = F_u(U, T)$ , où  $U$  est donné en fonction de  $Q$  et  $S$  par :

$$U = Q * S \quad (\text{B.8})$$

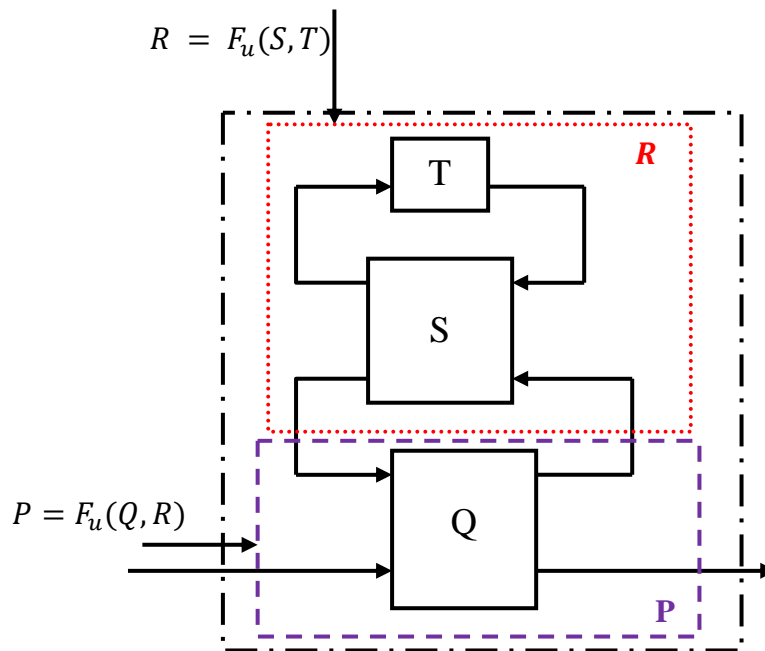


Figure (3) : Connexion de deux LFT supérieures

- b) Nous pouvons également montrer que la connexion cascade de  $P = F_\ell(Q, R)$  et  $P = F_u(M, N)$ , est aussi une LFT : figure(4).

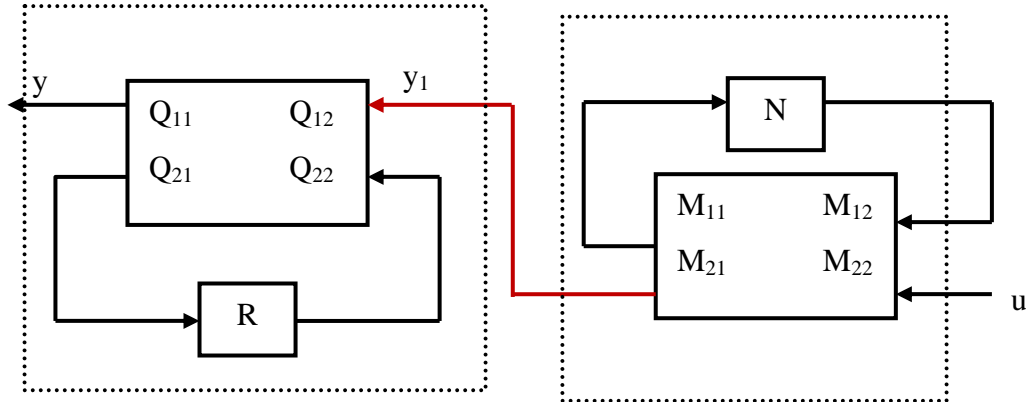


Figure (4) : Connexion en cascade de deux LFT.

$$F_\ell(Q, R) \cdot F_u(M, N) = F_\ell\left(W, \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}\right) \quad (\text{B.9})$$

Avec :

$$W = \begin{bmatrix} Q_{11}M_{22} & Q_{12} & Q_{11}M_{21} \\ Q_{21}M_{22} & Q_{22} & Q_{21}M_{21} \\ M_{12} & 0 & M_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

**LFT inférieure et supérieure :**

Supposons que  $P = F_\ell(Q, R)$ , alors on peut réécrire  $P$  comme une *LFT* supérieure en  $Q$  et  $R$  sous la forme :

$$P = F_u \left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}, R \right) \quad (\text{B.11})$$

**Inverse d'une LFT :**

L'inverse d'une *LFT* est aussi une *LFT*. En supposant que les inverses cités ci-dessous existent, on peut écrire :  $(F_\ell(P, Q))^{-1} = F_\ell(P_{LI}, Q)$  et  $(F_u(P, Q))^{-1} = F_u(P_{UI}, Q)$ .

Si  $P$  est défini comme précédemment, les expressions de  $P_{LI}$  et  $P_{UI}$  sont données par :

$$\begin{cases} P_{LI} = \begin{bmatrix} P_{11}^{-1} & -P_{11}^{-1}P_{12} \\ P_{21}P_{11}^{-1} & P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12} \end{bmatrix} \\ P_{UI} = \begin{bmatrix} P_{22} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21} & P_{12}P_{22}^{-1} \\ P_{22}^{-1}P_{21} & P_{22}^{-1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

**Inverse d'un paramètre K**

Étant donné une *LFT* en  $K$ , on peut l'exprimer en une *LFT* en  $K^{-1}$  à condition que les inverses impliquées, existent.

$$F_\ell(P, K) = F_\ell(\tilde{P}, K^{-1}) \quad (\text{B.13})$$

où  $\tilde{P}$  est donné par :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21} & -P_{12}P_{22}^{-1} \\ -P_{22}^{-1}P_{21} & P_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Ceci découle du fait que :

$$(I + L)^{-1} = I - L(I + L)^{-1}, \quad \forall L \text{ carrée} \quad (\text{B.15})$$

### Relations entre fonctions de transfert caractéristiques et les LFT :

Pour caractériser la stabilité interne, il est plus commode de travailler sur les représentations d'état de  $G$  et  $K$ . Considérons en effet la boucle standard de la Figure (2) et introduisons les réalisations minimales suivantes de  $G(s)$  et  $K(s)$ .

$$\begin{cases} G(s) = D_G + C_G(sI - A_G)^{-1}B_G \\ K(s) = D_K + C_K(sI - A_K)^{-1}B_K \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Les fonctions de transfert mentionnées ci-dessous, peuvent s'écrire en terme de *LFT* comme suit :

$$(I + GK)^{-1} = F_\ell \left( \begin{bmatrix} I & -G \\ I & -G \end{bmatrix}, K \right) \quad (\text{B.17})$$

$$GK(I + GK)^{-1} = F_\ell \left( \begin{bmatrix} 0 & G \\ I & -G \end{bmatrix}, K \right) \quad (\text{B.18})$$

$$K(I + GK)^{-1} = F_\ell \left( \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -G \end{bmatrix}, K \right) \quad (\text{B.19})$$

$$G(I + KG)^{-1} = F_\ell \left( \begin{bmatrix} G & G \\ G & -G \end{bmatrix}, K \right) \quad (\text{B.20})$$

Soient  $x_n$  et  $x_k$  les vecteurs d'état associés à ces réalisations, une réalisation de ces *LFT* est facilement déduite de celle de  $G(s)$ , par exemple :

$$\begin{bmatrix} I & -G \\ I & -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -D_G \\ I & -D_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_G \\ C_G \end{bmatrix} (sI - A_G)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & B_G \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

En utilisant les formules donnant la réalisation d'une *LFT* en fonction des réalisations des arguments, il est facile de montrer que la stabilité des quatre transferts ci-dessus est équivalent à la stabilité au sens des matrices, de  $A_{BF}$ .

$$A_{BF} = \begin{bmatrix} A_G - B_G(I + D_K D_G)^{-1} D_K D_G & -B_G(I + D_K D_G)^{-1} C_K \\ B_K(I + D_G D_K)^{-1} C_G & A_K - B_K(I + D_G D_K)^{-1} D_G D_K \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

# Références bibliographiques



Références:

- [AM02] AYADI, Mounir. Contributions à la commande des systèmes linéaires plats de dimension finie. 2002. Thèse de doctorat. Toulouse, INPT.
- [AMS16] AIDOUD, Mohammed, SEDRAOUI, Moussa, LACHOURI, Abderrazek, et al. Robustified GPC controller based on  $H_\infty$  robust control for an hydraulic actuator. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2016, vol. 38, no 7, p. 2181-2188.
- [AMS18] AIDOUD, Mohammed, SEDRAOUI, Moussa, LACHOURI, Abderrazek, et al. A robustification of the two degree-of-freedom controller based upon multivariable generalized predictive control law and robust  $H_\infty$  control for a doubly-fed induction generator. Journal of Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2018, Vol. 40, no. 3, pp. 1005 – 1017.
- [AP06] APKARIAN, Pierre et NOLL, Dominikus. Nonsmooth  $H_\infty$  Synthesis. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, vol. 51, no 1, p. 71-86.
- [APG98] ANSAY, Pierre, GEVERS, Michel, et WERTZ, Vincent. Enhancing the robustness of GPC via a simple choice of the Youla parameter. European Journal of Control, 1998, vol. 4, no 1, p. 64-70.
- [BC10] BELFEDAL, C., GHERBI, S., SEDRAOUI, M., et al. Robust control of doubly fed induction generator for stand-alone applications. Electric Power Systems Research, 2010, vol. 80, no 2, p. 230-239.
- [BP96] BOUCHER, Patrick et DUMUR, Didier. La commande prédictive. Editions Technip, 1996.
- [BT93] BOURRET, Thierry. Commande robuste des systèmes multivariables discrets soumis à des perturbations paramétriques: application au pilote automatique d'un avion de type Airbus. 1993. Thèse de doctorat. Toulouse, ENSAE.
- [BT97] BASTOGNE, Thierry. Identification des systèmes multivariables par les méthodes des sous-espaces. Application à un système d'entraînement de bande. 1997. Thèse de doctorat. Nancy 1.
- [CB01] CLÉMENT, B., HBAÏEB, S., DUC, G., et al. Paramétrisation de Youla : application à la commande robuste par optimisation convexe. APII Journal

- Européen des systèmes automatisés, 2001, vol. 35, no 1-2, p. 33-48.
- [CD87] CLARKE, David W., MOHTADI, Coorous, et TUFFS, P. S. Generalized predictive control—Part I. The basic algorithm. *Automatica*, 1987, vol. 23, no 2, p. 137-148.
- [CE07] CAMACHO, Eduardo F. et BORDONS, Carlos. Nonlinear Model Predictive Control. In: *Model Predictive control*. Springer, London, 2007. p. 249-288.
- [CE13] CAMACHO, Eduardo F. et ALBA, Carlos Bordons. *Model predictive control*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [CR88] CHIANG, Richard Y. et SAFONOV, Michael George. *Robust Control Toolbox: for Use with MATLAB: User's Guide*, June 1, 1988. MathWorks Incorporated, 1988.
- [CR96] CURTAIN, Ruth, WEISS, George, et WEISS, Martin. Coprime factorization for regular linear systems. *Automatica*, 1996, vol. 32, no 11, p. 1519-1531.
- [CS12] CHENIKHER, Salah, ABDELMALEK, Samir, et SEDRAOUI, Moussa. Control of uncertainly multi-variable system with fractional PID. In : *Electrotechnical Conference (MELECON), 2012 16th IEEE Mediterranean*. IEEE, 2012. P. 1079-1082.
- [DB09] DURMUŞ, Burhanettin, TEMURTAŞ, Hasan, YUMUŞAK, Nejat, et al. A study on industrial robotic manipulator model using model based predictive controls. *Journal of intelligent manufacturing*, 2009, vol. 20, no 2, p. 233-241.
- [DH03] DE BATTISTA, H., MANTZ, R. J., et CHRISTIANSEN, C. F. Energy-based approach to the output feedback control of wind energy systems. *International Journal of Control*, 2003, vol. 76, no 3, p. 299-308.
- [DJ82] DOYLE, John. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. In : *IEE Proceedings D-Control Theory and Applications*. IET, 1982. p. 242-250.
- [DL94] DE LATHAUWER, L., DE MOOR, B., VANDEWALLE, J., et al. Singular value decomposition. In : *Proc. EUSIPCO-94, Edinburgh, Scotland, UK*. 1994. p. 175-178.
- [DM07] DENG, M., INOUE, A., et EDAHIRO, K. Fault detection in a thermal process control system with input constraints using a robust right coprime factorization approach. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal*

- of Systems and Control Engineering, 2007, vol. 221, no 6, p. 819-831.
- [DM10] DABO, Marcelin. Commande prédictive généralisée non linéaire à temps continu des systèmes complexes. 2010. Thèse de doctorat. Université de Rouen.
- [DR82] DE KEYSER, R. M. C. et VAN CAUWENBERGHE, A. R. Simple self-tuning multistep predictors. IFAC Proceedings Volumes, 1982, vol. 15, no 4, p. 991-996.
- [DR85] DE KEYSER, R. M. C. et VAN CAUWENBERGHE, A. R. Extended prediction self-adaptive control", IFAC Symp. *Ident. Syst. Param. Est., York*, 1985.
- [EJ04] EKANAYAKE, Janaka et JENKINS, Nick. Comparison of the response of doubly fed and fixed-speed induction generator wind turbines to changes in network frequency. IEEE Transactions on Energy conversion, 2004, vol. 19, no 4, p. 800-802.
- [FA05] FERRANTE, Augusto. Minimal representations of continuous-time processes having spectral density with zeros in the extended imaginary axis. Systems & control letters, 2005, vol. 54, no 5, p. 511-520.
- [FB84] FRANCIS, Bruce, HELTON, J. W., et ZAMES, George.  $H_\infty$ -optimal feedback controllers for linear multivariable systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1984, vol. 29, no 10, p. 888-900.
- [FM99] FEKI, M., RICHARD, E., et ALMEIDA, F. Gomes. Commande en effort d'un vérin hydraulique par linéarisation entrée/sortie. Journées Doctorales d'Automatiques, JDA, 1999, vol. 99, p. 181-184.
- [GC08] GUAN, Cheng et PAN, Shuangxia. Nonlinear adaptive robust control of single-rod electro-hydraulic actuator with unknown nonlinear parameters. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2008, vol. 16, no 3, p. 434-445.
- [GD14] GU, Da-Wei, PETKOV, Petko H., et KONSTANTINOV, Mihail M. Robust control design with MATLAB®. Springer Science & Business Media, 2014.
- [GJ97] GOSSNER, Jesse R., KOUVARITAKIS, Basil, et ROSSITER, J. Anthony. Stable generalized predictive control with constraints and bounded disturbances. Automatica, 1997, vol. 33, no 4, p. 551-568.
- [GK88] GLOVER, Keith et DOYLE, John C. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $H_\infty$ -norm bound and relations to relations to risk

- sensitivity. *Systems & Control Letters*, 1988, vol. 11, no 3, p. 167-172.
- [GK89] GLOVER, Keith et MCFARLANE, Duncan. Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with  $H_{\infty}$ -bounded uncertainty. *IEEE transactions on automatic control*, 1989, vol. 34, no 8, p. 821-830.
- [GP94] GAHINET, Pascal et APKARIAN, Pierre. A linear matrix inequality approach to  $H_{\infty}$  control. *International journal of robust and nonlinear control*, 1994, vol. 4, no 4, p. 421-448.
- [GS09] GHERBI, Sofiane, YAHMEDI, Said, et SEDRAOUI, Moussa. Robust  $H_{\infty}$  Control of a Doubly Fed Asynchronous Machine. *Informatica (Slovenia)*, 2009, vol. 33, no 2, p. 143-150.
- [GZ15] GUO, Zhenkai et GUAN, Xinping. Nonlinear generalized predictive control based on online least squares support vector machines. *Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 79, no 2, p. 1163-1168.
- [HY14] HAN, Yang et SHEN, Pan. Modeling, control and electromagnetic transient simulation of the doubly fed induction generator-based wind energy generation system. *Simulation*, 2014, vol. 90, no 3, p. 275-289.
- [KA06] KRUSZEWSKI, Alexandre. Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI. 2006. Thèse de doctorat. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis.
- [KB92] KOUVARITAKIS, B., ROSSITER, J. A., et CHANG, A. O. T. Stable generalised predictive control: an algorithm with guaranteed stability. In : *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*. IET Digital Library, 1992. p. 349-362.
- [KS15] KAHLA, Sami, SOUFI, Youcef, SEDRAOUI, Moussa, et al. On-Off control based particle swarm optimization for maximum power point tracking of wind turbine equipped by DFIG connected to the grid with energy storage. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2015, vol. 40, no 39, p. 13749-13758.
- [KV80] KLEMA, Virginia et LAUB, Alan. The singular value decomposition: Its computation and some applications. *IEEE Transactions on automatic control*, 1980, vol. 25, no 2, p. 164-176.
- [LL03] LAVIGNE, Loïc. Outils d'analyse et de synthèse des lois de commande robuste des systèmes dynamiques plats. 2003. Thèse de doctorat. Université Sciences et

Technologies-Bordeaux I.

- [MB05] MANSOURI, Badr. Contribution à la synthèse de lois de commandes en de trajectoire pour les systèmes flous de type Takagi Sugeno incertains. 2005. Thèse de doctorat. Reims.
- [MD90] MCFARLANE, Duncan C. et GLOVER, Keith. Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions. Springer, 1990.
- [MJ06] MARTINEZ, J. M., CAHEN, J., MILLARD, A., et al. Modélisation des incertitudes par polynômes du chaos-Etude d'un écoulement en milieu poreux. CEA Rapport DM2S, 2006, p. 1-80.
- [MJ07] MIKLEŠ, Ján et FIKAR, Miroslav. Predictive Control. In : Process Modelling, Identification, and Control. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. P. 403-444.
- [MJ89] MACIEJOWSKI, Jan Marian. Multivariable feedback design. Electronic Systems Engineering Series, Wokingham, England: Addison-Wesley, c1989, 1989.
- [MM09] MASSIMETTI, Marco, ZACCARIAN, Luca, HU, Tingshu, et al. Linear discrete-time global and regional anti-windup: an LMI approach. International Journal of control, 2009, vol. 82, no 12, p. 2179-2192.
- [MM99] MORARI, Manfred et LEE, Jay H. Model predictive control: past, present and future. Computers & Chemical Engineering, 1999, vol. 23, no 4-5, p. 667-682.
- [NS11] NAIR, Sarath S. Automatic weight selection algorithm for designing H infinity controller for active magnetic bearing. International Journal of Engineering Science and Technology, 2011, vol. 3, no 1, p. 122-138.
- [OH03] OLOOMI, H. et SHAFAI, B. Weight selection in mixed sensitivity robust control for improving the sinusoidal tracking performance. In : Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on. IEEE, 2003. p. 300-305.
- [OK14] OTMANE, Khelifa Khelifi, BALI, Nordine, et NEZLI, Lazhari. Off-line robustification of Generalized Predictive Control for uncertain systems. Archives of Control Sciences, 2014, vol. 24, no 4, p. 499-513.
- [OM04] ORTEGA, M. G. et RUBIO, F. R. Systematic design of weighting matrices for the  $H_\infty$  mixed sensitivity problem. Journal of Process Control, 2004, vol. 14, no 1, p. 89-98.

- [OS06] OLARU, Sorin et AYERBE, Pedro Rodriguez. Robustification of explicit predictive control laws. In : Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on. IEEE, 2006. p. 4556-4561.
- [PD00] PEAUCELLE, Dimitri. Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. 2000. Thèse de doctorat. Université Paul Sabatier-Toulouse III.
- [PL90] POTTIER, Loïc. Solutions minimales des systèmes diophantiens linéaires: bornes et algorithmes. 1990. Thèse de doctorat. INRIA.
- [QY11] QU, Y. B. et SONG, H. H. Energy-based coordinated control of wind energy conversion system with DFIG. International Journal of Control, 2011, vol. 84, no 12, p. 2035-2045.
- [RJ04] RICHALET, Jacques, LAVIELLE, Guy, et MALLET, Joëlle. La commande prédictive: Mise en œuvre et applications industrielles. Eyrolles, 2004.
- [RJ78] RICHALET, Jacques, RAULT, A., TESTUD, J. L., et al. Model predictive heuristic control. Automatica (Journal of IFAC), 1978, vol. 14, no 5, p. 413-428.
- [RJ98] ROSSITER, J. Anthony, KOUVARITAKIS, Basil, et RICE, M. J. A numerically robust state-space approach to stable-predictive control strategies. Automatica, 1998, vol. 34, no 1, p. 65-73.
- [RP02] RODRÍGUEZ, P., DUMUR, D., et FONT, S. Youla parametrization applied to a GPC controlled SISO system. IFAC Proceedings Volumes, 2002, vol. 35, no 1, p. 291-296.
- [RP03] RODRIGUEZ AYERBE, Pedro. Robustification de lois de commande prédictive par la paramétrisation de Youla. 2003. Thèse de doctorat. Paris 11, Orsay.
- [RP08] RODRÍGUEZ-AYERBE, Pedro et OLARU, Sorin. OFF-LINE ROBUSTIFICATION OF EXPLICIT MPC LAWS. ICINCO 2008, 2008, p. 96.
- [RS09] RAO, Singiresu S. et RAO, Singiresu S. Engineering optimization: theory and practice. John Wiley & Sons, 2009.
- [SC08] STOICA, Cristina, RODRIGUEZ-AYERBE, Pedro, et DUMUR, Didier. MIMO<sub>Opt</sub>MPC: A MATLAB™ toolbox for off-line robustification of multivariable MPC. In : Computer-Aided Control Systems, 2008. CACSD 2008.

- IEEE International Conference on. IEEE, 2008. P. 1259-1264.
- [SJ05] SOENS, Joris, DRIESEN, Johan, BELMANS, Ronnie, et al. Equivalent transfer function for a variable speed wind turbine in power system dynamic simulations. *International Journal of Distributed Energy Resources*, 2005, vol. 1, no 2, p. 111-133.
- [SM08] SEDRAOUI, Moussa. Application of the multivariable predictive control on a distillation column using the optimization methods. *Control and Intelligent Systems*, 2008, vol. 36, no 2, p. 111.
- [SM89] SAFONOV, Michael G. et CHIANG, R. Y. A Schur method for balanced-truncation model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, vol. 34, no 7, p. 729-733.
- [SM90] SAFONOV, M. G., CHIANG, R. Y., et LIMEBEER, D. J. N. Optimal Hankel model reduction for nonminimal systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, vol. 35, no 4, p. 496-502.
- [SMA17] SEDRAOUI, M., AMIEUR, T., BACHIR BOUIADJRA, R., et al. Robustified fractional-order controller based on adjustable fractional weights for a doubly fed induction generator. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2017, vol. 39, no 5, p. 660-674.
- [SMD12] SEDRAOUI, Moussa et BOUDJEHEM, Djalil. Robust fractional order controller based on improved particle swarm optimization algorithm for the wind turbine equipped with a doubly fed asynchronous machine. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2012, vol. 226, no 9, p. 1274-1286.
- [SMG12] SEDRAOUI, Moussa, GHERBI, Sofiane, et ABDELMALEK, Samir. A robust controller based on fractional structure for MIMO plant with multiple delays. *Control and Intelligent Systems*, 2012, vol. 40, no 2, p. 83.
- [SMT08] SEDRAOUI, Moussa. Apport des principales méthodes d'optimisation dans la commande prédictive généralisée multivariable sous contraintes. 2008.
- [SR92] SCATTOLINI, R. et SCHIAVONI, N. A note on multivariable generalized predictive control. *International Journal of Control*, 1992, vol. 56, no 1, p. 253-257.

- [SS88] SKOGESTAD, Sigurd, MORARI, Manfred, et DOYLE, John C. Robust control of ill-conditioned plants: High-purity distillation. *IEEE transactions on automatic control*, 1988, vol. 33, no 12, p. 1092-1105.
- [SS92] SAWADOGO, Salam. Modélisation, commande prédictive et supervision d'un système d'irrigation. 1992. Thèse de doctorat. Toulouse 3.
- [TK01] TAN, K. K., LEE, T. H., HUANG, S. N., et al. Adaptive-predictive control of a class of SISO nonlinear systems. *Dynamics and control*, 2001, vol. 11, no 2, p. 151-174.
- [TM14] TSAI, Mi-Ching et GU, Da-Wei. Robust and optimal control. *Advances in Industrial Control*, 2014, vol. 33, no 97, p. 2095-2095 (1).
- [TM93] TSAI, M.-C., TSAI, C.-S., et SUN, Y.-Y. On discrete-time  $H/\infty$  control: a J-lossless coprime factorization approach. *IEEE transactions on automatic control*, 1993, vol. 38, no 7, p. 1143-1147.
- [TS11] THOMSEN, Sven Creutz, NIEMANN, Henrik, et POULSEN, Niels Kjølstad. Robust stability in constrained predictive control through the Youla parameterisations. *International Journal of Control*, 2011, vol. 84, no 4, p. 653-664.
- [VJ09] VIEIRA, J. P. A., NUNES, M. V. A., BEZERRA, U. H., et al. Designing optimal controllers for doubly fed induction generators using a genetic algorithm. *IET generation, transmission & distribution*, 2009, vol. 3, no 5, p. 472-484.
- [VM86] VIDYASAGAR, M. et KIMURA, H. Robust controllers for uncertain linear multivariable systems. *Automatica*, 1986, vol. 22, no 1, p. 85-94.
- [WS01] WANG, Sheng-Guo, YEH, H. Y., et ROSCHKE, Paul N. Robust control for structural systems with parametric and unstructured uncertainties. *Journal of Vibration and Control*, 2001, vol. 7, no 5, p. 753-772.
- [WW91] WANG, Wen-June, SONG, Cheng-Chong, et KAO, Chien-Chung. Robustness bounds for large-scale time-delay systems with structured and unstructured uncertainties. *International Journal of Systems Science*, 1991, vol. 22, no 1, p. 209-216.
- [YB84] YDSTIE, B. E. Extended horizon adaptive control. *IFAC Proceedings Volumes*, 1984, vol. 17, no 2, p. 911-915.



- [YJ76] Youla DC, Jabr H, Bongiorno Jr JJ et al. (1976) Modern wiener-hopf design of optimal controllers–part ii: The multivariable case. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 21(3): 319–338.
- [YT95] YOON, Tae-Woong et CLARKE, David W. Observer design in receding-horizon predictive control. *International Journal of Control*, 1995, vol. 61, no 1, p. 171-191.
- [ZA14] ZDEŠAR, A., DOVŽAN, D., et ŠKRJANC, I. Self-tuning of 2 DOF control based on evolving fuzzy model. *Applied Soft Computing*, 2014, vol. 19, p. 403-418.
- [ZG81] ZAMES, George. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on automatic control*, 1981, vol. 26, no 2, p. 301-320.
- [ZG83] ZAMES, George et FRANCIS, Bruce. Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness. *IEEE transactions on Automatic Control*, 1983, vol. 28, no 5, p. 585-601.
- [ZK96] ZHOU, Kemin, DOYLE, John Comstock, GLOVER, Keith, et al. *Robust and optimal control*. New Jersey : Prentice hall, 1996.
- [ZP09] ZHOU, Peng, HE, Yikang, et SUN, Dan. Improved direct power control of a DFIG-based wind turbine during network unbalance. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2009, vol. 24, no 11, p. 2465-2474.
- [ZW06] ZENGHUI, Wang, ZENGQIANG, C. H. E. N., QINGLIN, S. U. N., et al. Multivariable Decoupling Predictive Control Based on QFT Theory and Application in CSTR Chemical Process1. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 2006, vol. 14, no 6, p. 765-769.
- [ZY07] ZHOU, Y., BAUER, P., FERREIRA, J. A., et al. Control of DFIG under unsymmetrical voltage dip. In : *Power Electronics Specialists Conference, 2007. PESC 2007*. IEEE. IEEE, 2007. P. 933-938.

Travaux  
scientifiques réalisés  
lors de cette thèse

**Revue internationale :**

- **AIDOUD Mohammed, SEDRAOUI Moussa, LACHOURI Abderrazek, et BOUALEG Abdelhalim.** “Robustified GPC controller based on  $H_\infty$  robust control for an hydraulic actuator”. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2016, vol. 38, no 7, p. 2181-2188.
- **AIDOUD Mohammed, SEDRAOUI Moussa, LACHOURI Abderrazek, et BOUALEG Abdelhalim.** “A robustification of the two degree-of-freedom controller based upon multivariable generalized predictive control law and robust  $H_\infty$  control for a doubly-fed induction generator”. *Journal of Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2018, Vol. 40, no. 3, pp. 1005 – 1017.

**Communications internationales :**

- **AMIEUR Toufik, YOUNSI Abdelaziz, AIDOUD Mohammed, et SEDRAOUI Moussa.** « Design of robust fractional order PID controller using fractional weights in the mixed sensitivity problem”. In: *Systems, Signals & Devices (SSD), 2017 14th International Multi-Conference on*. IEEE, 2017. p. 549-553.