

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DU 20 AOÛT 1955 SKIKDA
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE



THÈSE

En vue de l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : AUTOMATIQUE

THÈME

**Techniques avancées pour la synthèse et l'amélioration
des performances des systèmes de commande adaptative
d'ordre fractionnaire pour les processus incertains**

Présentée Par : **Khatir KHETTAB**

SOUTENUE LE : 05/06/2016, DEVANT LE JURY :

Président	LASHAB Mohamed	<i>Maître de Conférence 'A', Université de Skikda</i>
Rapporteur	LADACI Samir	<i>Professeur, Ecole Nationale Polytechnique de Constantine</i>
Examineurs	BOUKABOU Abdelkrim	<i>Professeur, Université de Jijel</i>
	CHAREF Abdelfatah	<i>Professeur, Université Mentouri Constantine</i>
	GHERBI Sofiane	<i>Maître de Conférence 'A', Université de Skikda</i>
	ZENNIR Youcef	<i>Maître de Conférence 'A', Université de Skikda</i>

Code : **D012116011D**

أعوذ بالله من الشيطان الرجيم :

" وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا " الآية 114 من سورة طه

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم :

" اللَّهُمَّ انْفَعْنِي بِمَا عَلَّمْتَنِي ، وَعَلِّمْنِي مَا يَنْفَعُنِي ، وَزِدْنِي عِلْمًا

وارزقني علماً تنفعني به " أخرجه الترمذي في صحيحه.

Dédicaces

À la mémoire de ma Mère,

À mon Père,

À toute ma grande famille,

À ma femme, pour la patience et le soutien dont elle a fait preuve pendant toute la durée de cette thèse,

À mes enfants **Mouad** et **Sadja**,

je dédie ce modeste travail.

Zoubir...

Avant-propos

Je remercie ALLAH le tout puissant pour la volonté et la patience qu'il m'a donné tout au long de mes études.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur **Samir LADACI**, Professeur à l'ENP de Constantine pour la proposition du sujet de cette thèse et pour son soutien tout au long de ce travail. Merci Monsieur pour vos conseils et la confiance que vous m'avez accordée au cours de ces années d'encadrement.

Je tiens à remercier chaleureusement, Monsieur **Mohamed LASHAB**, Maître de conférence à l'université de Skikda, d'avoir accepté la présidence du jury de ma soutenance, ainsi que Messieurs **Abdelfatah CHAREF**, Professeur à l'université de Constantine, **Abdelkrim BOUKABOU**, Professeur à l'université de Jijel, **Sofiane GHERBI** Maître de conférence à l'université de Skikda et **Youcef ZENNIR** Maître de conférence à l'université de Skikda, qui ont accepté d'examiner mon manuscrit de thèse.

J'adresse un grand merci à mes amis et collègues **Adel BELLOUTI**, **Abdelouaheb BOUKHALFA**, **Ridha ZIANI**, **Yassine BENSALIA**, **Salim MEHADI**, **Bachir BOUROUBA** et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin durant ces années de recherche et d'études.

À tous mes enseignants tout le long de ma formation, mes enseignants et mes amis des universités : de Ferhat Abbas-Sétif, de 20 août 1955-Skikda et de Mohamed Boudiaf-M'sila.

K.Khettab ...

ملخص - إن الهدف من هذا البحث يركز أساسا على مشاركتين اثنتين : في الأولى، تصميم مخطط التحكم المتكيف الغامض الكسرية (أو الجزئية) و المقواة بمنهجية تحكم H^∞ و وضع الانزلاق لفئة من أنظمة الفوضى (الشاوشة) غير الخطية الجزئية غير المعروفة. أما في الثانية، يتم تطوير مخططات للتحكم المتكيف الغامض غير المباشر مع إشارة معامل التحكم معروفة و/أو غير معروفة، لنفس الفئة من الأنظمة غير الخطية المدروسة سابقا. تستخدم الأنظمة الغامضة لتقريب (أو تقدير) غير-خطية الأنظمة المجهولة المذكورة أعلاه. وبالإضافة إلى ذلك، يتم إجراء تحليل للاستقرار ومثانة (قوة) التحكم في الأنظمة من فرضية ليبينوف (Lyapunov) و امتداد هذه الفرضية في حالة الكسور الجزئية. يتم التحقق من صحة النتائج النظرية بأمثلة المحاكاة العددية.

الكلمات المفتاحية - التحكم الجزئي المتكيف الغامض، وضع انزلاق الجزئي، الأنظمة التحكم الجزئية، تزامن الفوضى، دالة نوزبوم (Nussbaum) الجزئية، الاستقرار غير الخطي.

Résumé - L'objectif de cette thèse consiste principalement en deux contributions : *i*). concevoir une conception d'un schéma de commande adaptative floue d'ordre fractionnaire robustifié par H^∞ et mode glissant, pour une classe de systèmes non linéaires inconnus chaotiques d'ordre fractionnaire, en utilisant un régulateur PI^λ dans la commande pour éviter le phénomène de Chattering. *ii*). Concevoir des schémas de commande adaptative floue indirecte avec signe de gain de commande connu et/ou inconnu, pour la même classe des systèmes non linéaires précédemment sont évoqués. Les systèmes flous sont utilisés pour approximer (ou estimer) les non-linéarités inconnues des systèmes étudiés. De plus, l'analyse de la stabilité et de la robustesse est effectuée par l'approche de Lyapunov et l'extension de cette approche au cas fractionnaire. Les résultats théoriques sont validés par des exemples de simulation.

Mots-clés - Commande fractionnaire adaptative floue, Mode glissant d'ordre fractionnaire, systèmes d'ordre fractionnaire, synchronisation du chaos, fonction de Nussbaum d'ordre fractionnaire, Stabilité non linéaire.

Abstract – The objective of this thesis consists mainly of two contributions : *i*). in the first, design of the robustification fractional order fuzzy adaptive control scheme by the H^∞ approach and sliding mode control for a class of fractional order unknown nonlinear chaotic systems, using the fractional adaptive PI^λ regulator in the control law to avoid or eliminate the chattering phenomenon. *ii*). in the second, design an indirect fuzzy adaptive control schemes with a sign to gain control known and/or unknown, for the same class of nonlinear systems are developed. The fuzzy systems are used to approximate (or estimate) the unknown nonlinearities of the systems studied. In addition, the stability analysis and the robustness are performed by the approach of Lyapunov and extension of this approach in the fractional case. The theoretical results are validated by simulation examples.

Keywords - fuzzy adaptive fractional control, fractional sliding mode, fractional order systems, synchronization of chaos, fractional Nussbaum function, nonlinear stability.

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Objectifs de la thèse, contributions et motivations	4
1.2	Organisation et présentation de la thèse :	6
2	Éléments de théorie de base	9
2.1	Introduction	9
2.2	Historique du calcul fractionnaire	10
2.2.1	Commande des systèmes d'ordre fractionnaire	11
2.2.2	Calcul fractionnaire et ses applications	11
2.2.2.1	Calcul fractionnaire	11
2.2.2.2	Domaines d'application	13
2.3	Opérateurs d'ordre non entier	15
2.3.1	Quelques définitions fondamentales	15
2.3.1.1	Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire	16
2.3.1.2	Définition de Riemann-Liouville	17
2.3.1.3	Définition de Caputo	17
2.3.1.4	Définition de Grünwald-Leitnikov	18
2.3.2	Propriétés des opérateurs d'ordre non entier	19
2.3.3	Évaluation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire	19
2.3.3.1	Approximation des formules de Riemann-Liouville	20
2.3.3.2	Approximation des formules de Grünwald-Leitnikov	20
2.4	Systèmes de commande d'ordre fractionnaire	21
2.4.1	Représentation d'état d'ordre fractionnaire	21
2.4.2	Stabilité des processus fractionnaires	24
2.4.3	Performances des systèmes d'ordre fractionnaire	24

2.5	Systèmes de logique floue	25
2.5.1	Description des systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S)	26
2.5.2	Théorème des approximateurs universels	27
2.6	Synchronisation de chaos et systèmes chaotiques	28
2.6.1	Caractérisation du chaos	28
2.6.2	Applications du chaos	29
2.6.3	Domaines d'application du chaos	29
2.6.4	Système chaotique fractionnaire de Duffing-Holmes	30
2.6.5	Synchronisation	32
2.6.5.1	Synchronisation des systèmes chaotiques	32
2.7	Commande robuste	33
2.7.1	Théorie de la commande par mode glissant	34
2.7.1.1	Technique de commande par mode glissant	34
2.7.1.2	Synthèse de loi de commande par mode glissant	35
2.7.1.3	Phénomène de réticence ou broutement	35
2.7.2	Théorie de la commande Robuste H^∞	36
2.8	Notion de base sur la stabilité	36
2.8.1	Définitions et Stabilité de Lyapunov	37
2.8.2	Méthode directe de Lyapunov	37
2.8.3	Extension au cas fractionnaire de la méthode directe de Lyapunov	38
2.8.4	Lemme de Barbalat	39
2.9	Gain ou fonction de type-Nussbaum	40
2.10	Conclusion	41
3	Commande robuste H^∞ adaptative floue des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire	43
3.1	Introduction	43
3.2	Définitions	44
3.2.1	Contrôleur flou	44
3.2.2	Rappel sur les systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S)	45
3.2.3	Commande adaptative	45
3.2.4	Commande adaptative floue	46
3.3	Problématique et conception de la commande adaptative floue robuste H^∞	46

3.4	Analyse de la stabilité	49
3.5	Algorithme de la technique proposée	51
3.6	Exemple illustratif	52
3.7	Conclusion	59
4	Commande Adaptative floue par mode glissant des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire	61
4.1	Introduction	61
4.2	Schéma de commande adaptative floue indirecte par mode glissant d'ordre fractionnaire	63
4.3	Analyse de la stabilité	69
4.4	Exemple illustratif	71
4.4.1	Etape 1 : Commande par mode glissant d'ordre fractionnaire	72
4.4.2	Etape 2 : Introduction du contrôleur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ	75
4.4.3	Etape 3 : Utilisation de la fonction de saturation "SAT"	79
4.5	Conclusion	82
5	Commande adaptative floue des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire avec gain de commande de signe inconnu	83
5.1	Introduction	83
5.2	Rappels sur le gain de type-Nussbaum	85
5.3	Conception du contrôleur adaptatif flou avec signe du gain de commande connu ou inconnu	86
5.4	Analyse de la Stabilité	90
5.5	Exemple illustratif	92
5.6	Conclusion	97
6	Conclusion générale	99
	Annexes	102
A	Méthodes d'approximation évoluées des systèmes d'ordre fractionnaire	103
A.1	Méthode d'approximation d'Adams-Bashforth-Moulton	103

A.2 Méthode de Grünwald-Letnikov	105
Bibliographie	107

Table des figures

2.1	Trajectoire de phase dans le plan $x - y$ du système Duffing d'ordre entier. . .	31
2.2	Trajectoire de phase (attractrice) dans le plan $x - y$ du système de Duffing d'ordre fractionnaire.	31
3.1	Plan de phase des trajectoires des systèmes chaotiques sans l'action de commande.	53
3.2	Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse. . . .	54
3.3	Trajectoires des états x_1 et y_1	54
3.4	Trajectoires des états x_2 et y_2	54
3.5	Signal de commande $u(t)$	55
3.6	Signal de l'erreur $e_1(t)$	55
3.7	Signal de l'erreur $e_2(t)$	56
3.8	Plan de phase des trajectoires des systèmes chaotiques sans commande. . .	56
3.9	Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse. . . .	57
3.10	Trajectoires des états x_1 et y_1	57
3.11	Trajectoires des états x_2 et y_2	57
3.12	Signal de commande $u(t)$	58
3.13	Signal de l'erreur $e_1(t)$	58
3.14	Signal de l'erreur $e_2(t)$	58
4.1	Portrait de phase des systèmes chaotiques de Duffing (réponse et références) sans action de commande.	72
4.2	Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse. . . .	73
4.3	Trajectoires des états x_1 et y_1	73
4.4	Trajectoires des états x_2 et y_2	74
4.5	Trajectoire de la surface de glissement.	74

4.6	Trajectoire de l'effort de la commande $u(t)$	74
4.7	Signal de l'erreur $e_1(t)$	75
4.8	Signal de l'erreur $e_2(t)$	75
4.9	Performance de synchronisation des systèmes chaotiques de Duffing (ré- ponse et référence).	76
4.10	Trajectoires des états x_1 et y_1	76
4.11	Trajectoires des états x_2 et y_2	77
4.12	Trajectoire de la surface de glissement $s(t)$	77
4.13	Trajectoire de l'effort de la commande $u(t)$	77
4.14	Signal de l'erreur $e_1(t)$	78
4.15	Signal de l'erreur $e_2(t)$	78
4.16	La fonction "SAT".	79
4.17	Performance de synchronisation des systèmes chaotiques de Duffing (ré- ponse et référence).	80
4.18	Trajectoires des états x_1 et y_1	80
4.19	Trajectoires des états x_2 et y_2	80
4.20	Trajectoire de la surface de glissement $s(t)$	81
4.21	Trajectoire de l'effort de la commande $u(t)$	81
4.22	Signal de l'erreur $e_1(t)$	81
4.23	Signal de l'erreur $e_2(t)$	82
5.1	Schéma bloc global de la commande adaptative floue proposée avec signe du gain de commande inconnu.	92
5.2	Plan de phase des systèmes chaotiques de Duffing (sans l'action de la loi de commande).	93
5.3	Performance de synchronisation des systèmes chaotiques de Duffing (réfé- rence et réponse).	94
5.4	Résultats de simulation avec la loi de commande proposée.	95
5.5	Signaux des erreurs.	96
5.6	fonction de Nussbaum $N(\zeta)$ et sa variation $\zeta(t)$	96
5.7	Vecteur des paramètres optimaux $\theta_f(t)$	97

Chapitre 1

Introduction générale

Depuis plus de trois siècles, un grand nombre de chercheurs se sont concentrés sur le sujet mathématique du calcul fractionnaire, portant sur les dérivées et les intégrales d'ordre arbitraire. Par rapport à la théorie classique, les équations différentielles d'ordre fractionnaire décrivent plus précisément le nombre de systèmes dans les domaines interdisciplinaires, tels que les systèmes viscoélastiques, la polarisation diélectrique, électrode-électrolyte polarisation, l'oscillation non linéaire des tremblements de terre, de la mécanique, des systèmes de financement, et des systèmes d'ondes électromagnétiques [36, 90]. Les systèmes de commande intelligente d'ordre fractionnaire ont montré des performances et des propriétés très intéressantes, et à cet effet, de nombreuses applications de ces systèmes ont été signalées dans différents domaines tels que le traitement du signal [91], traitement de l'image [108], le contrôle automatique [69, 71], la robotique [34], et l'énergie renouvelable [18].

Commande d'ordre fractionnaire

La commande d'ordre fractionnaire est une généralisation de la théorie de la commande d'ordre entier classique. Son intérêt majeur est d'améliorer les performances des systèmes de commande en utilisant les concepts de la dérivation non entière et des systèmes d'ordre fractionnaire. Les systèmes dynamiques et les contrôleurs d'ordre fractionnaire, qui sont basés sur le calcul fractionnaire, ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs. Les structures des commandes d'ordre fractionnaire les plus connues sont :

- Commande CRONE (Commande Robuste d'ordre non entier) était proposé par Oustaloup [107].
- Les contrôleurs PI et PID d'ordre fractionnaire, [67]
- Commandes intelligentes au cas fractionnaire (commande adaptative floue, commande par mode glissant [4]).

Dans la dernière décennie, un grand nombre de travaux de recherche ont porté sur les systèmes d'ordre fractionnaire qui affichent un comportement chaotique comme : le circuit de Chua [51], le système de Duffing [7], le modèle de jerk [3], le système dynamique de Chen [89], la caractérisation de Lu [88], le système de Rossler [75] et la formulation de Newton-Leipnik [122].

Sur la synchronisation du chaos

La synchronisation ou la commande de ces systèmes est une tâche difficile, car l'une des caractéristiques principales des systèmes chaotiques est leur grande sensibilité aux conditions initiales, mais ils font objet de recherche en raison de ses applications potentielles dans la communication sécurisée et de traitement de commande [54].

Le problème de la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire a été étudié pour la première fois par Deng et Li [29] qui ont effectué la synchronisation dans le cas du système fractionnaire de Lü. Après, ils ont étudié la synchronisation de chaos du système de Chen avec un ordre fractionnaire d'une façon différente. Des contrôleurs flous et des réseaux neurologiques sont généralement considérés applicables aux systèmes qui sont mathématiquement mal compris et où les opérateurs humains expérimentés sont disponibles pour fournir un principe de base qualitatif [133, 130].

Pour le cas particulier des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, de nombreuses approches ont été proposées pour réaliser la synchronisation du chaos, comme le contrôle de PC [76], méthode d'observateur de l'état non linéaire [135], la commande adaptative [102, 65], et la commande par mode glissant [50] et autres [10].

Sur la commande adaptative floue

Il s'agit de combiner la logique floue avec une loi de commande adaptative afin de concevoir une structure de commande stable et robuste pour une classe de systèmes non linéaires [66, 11, 33, 62].

Après la formulation du problème, nous allons montrer d'une manière constructive la procédure de développement d'un contrôleur adaptatif flou permettant au système d'atteindre les objectifs désirés. La performance des lois de commande développées, sera mise en évidence à travers leur application à des systèmes mono-entrée mono-sortie SISO non linéaires chaotiques d'ordre fractionnaire [83, 82, 28].

Sur la commande par mode de glissement

Etant un cas particulier de la commande à structure variable, la commande par mode glissant (CMG) a été largement utilisée dans la littérature. Ce succès est dû à sa simplicité de mise en œuvre et à sa robustesse vis-à-vis des variations paramétriques et des perturbations externes. La conception de cette commande est basée sur trois étapes dont la première consiste à choisir la surface de glissement qui représente la dynamique désirée [124, 33]. La deuxième établit la condition d'existence du mode de glissement (attractivité) et la dernière étape détermine la loi de commande qui aura pour rôle de garantir le maintien et le glissement le long des trajectoires du système sur cette surface.

Les processus physiques sont le plus souvent non linéaires, mal définis et ont des paramètres variables. Par exemple, dans le cas des robots, les équations dynamiques sont non linéaires, couplées, et les paramètres intervenant dans leur description dépendent de la charge. D'autre part, un modèle mathématique n'est rien d'autre qu'une représentation approximative de la réalité physique. Cependant on ne dispose souvent que de ce modèle pour construire la loi de commande.

La commande par mode glissant permet de répondre à ce problème, cette robustesse se fera au déterminant des performances. De plus, la surface de glissement définie dans le formalisme, réduit l'ordre du système en boucle fermée, ce qui ne permet pas dans certains cas, d'imposer au système un mode de stabilisation [62].

Sur la commande robuste par H^∞

La technique H^∞ est souvent utilisée pour résoudre la problématique de la robustification des systèmes non linéaires. Les performances de poursuite désirées sont exprimées sous forme d'un critère reliant d'une part la norme de l'erreur de poursuite et d'autre part le niveau désiré d'atténuation des perturbations. Ce critère peut être traduit dans l'espace d'état par l'obtention d'une matrice définie positive avec une solution unique de l'équation de Riccati [58].

L'incorporation du critère de la technique de conception de poursuite de H^∞ et de stabilité de Lyapunov constitue l'apport capital du présent travail en proposant un nouvel algorithme de commande indirecte intelligente robuste de telle sorte que non seulement la stabilité du système de commande floue adaptative soit garantie mais, également l'influence de la perturbation externe et d'erreur d'approximation sur l'erreur de poursuite puisse être atténuée à un niveau prescrit par l'intermédiaire de la technique de conception H^∞ [21, 24, 127]. Les travaux présentés dans cette thèse portent essentiellement sur la conception des lois de commande adaptative floue pour les systèmes non linéaires inconnus.

1.1 Objectifs de la thèse, contributions et motivations

Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème de la commande et la synchronisation des systèmes chaotiques incertains d'ordre fractionnaire par la commande adaptative floue robuste (via les modes glissants ou l'approche H^∞), où une méthode d'approximation floue est utilisée pour modéliser et approximer le système incertain d'ordre fractionnaire [64].

En se basant sur le théorème d'approximation universelle [133, 130, 132], les contrôleurs flous sont assez généraux pour effectuer toutes les actions de commande, c'est un intérêt pour des méthodologies de conception systématique pour une classe des systèmes non linéaires utilisant des schémas de commande adaptative floue.

Un système adaptatif flou est un système flou équipé d'un algorithme de formation, dans lequel un contrôleur adaptatif est synthétisé d'une collection de règles floues SI-ALORS (IF-THEN), et les paramètres des fonctions d'appartenance caractérisant les termes linguistiques dans ces règles qui changent selon une certaine loi adaptative afin de

commander un système pour qu'il suive une trajectoire de référence.

Sur la base du théorème de stabilité de Lyapunov, un algorithme efficace de commande adaptative floue est proposé. Il garantit la stabilité du système de commande et atténue l'influence de l'erreur d'approximation et de la perturbation externe sur l'erreur de poursuite à un niveau arbitrairement prescrit par la technique de conception de poursuite robuste via mode glissant.

Une classe particulière de ces systèmes non linéaires représente le problème le plus compliqué de la commande avec des directions de commande inconnues [101, 137]. L'approche de la fonction de type-Nussbaum a été introduite dans les années 1980 [134]. Cette technique a été utilisée pour le contrôle adaptatif des systèmes non linéaires de premier ordre [92]. Plus tard, de nombreuses études sur les systèmes de contrôle adaptatif avec fonction de type-Nussbaum ont été développées avec succès pour les différentes classes de systèmes non linéaires [140, 85, 13].

Néanmoins, dans notre cas, on appliquera l'extension du théorème de cette approche au cas fractionnaire sur la commande des systèmes d'ordre fractionnaire pour estimer le signe inconnu du gain de commande [65].

L'objectif principal de cette thèse est d'apporter à partir de la théorie de commande adaptative des systèmes non linéaires et de la théorie du calcul fractionnaire, des solutions aux problèmes rencontrés dans la synchronisation des systèmes non linéaires à comportement chaotique par :

- a.** L'application de la méthode de Gründwel-lietnikov pour l'approximation numérique et la résolution de ce genre de systèmes d'ordre fractionnaire ;
- b.** L'amélioration de la performance des systèmes de commande d'ordre fractionnaire par le développement de lois de commande adaptatives floues robustes (H^∞ et modes glissants) ;
- c.** L'application de la technique de Nussbaum au cas fractionnaire dans le schéma de commande adaptative floue d'une classe de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire pour estimer le signe inconnu du gain de commande.

Les contributions principales de ce travail sont bâties donc autour :

- d'une extension de l'utilisation de la fonction de type Nussbaum au cas des systèmes d'ordre fractionnaire pour estimer le signe inconnu du gain de commande,
- de l'utilisation d'un régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ dans la loi de com-

mande pour éliminer l'action de chattering dans le signal de commande et de surface.

1.2 Organisation et présentation de la thèse :

Cette thèse est constituée de quatre principaux chapitres :

- **Le premier chapitre** est une introduction aux systèmes d'ordre non entier avec les outils mathématiques utilisés dans les travaux de cette thèse. Un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la transformée de Laplace, la fonction Gamma et la fonction de Mittag-Leffler qui jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Trois approches (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo) liées à la généralisation des notions de dérivation seront ensuite considérées.

- **Le deuxième chapitre** aborde le problème de la commande robuste par H^∞ adaptative floue d'une classe de systèmes non linéaires chaotiques d'ordre fractionnaire. On propose un nouveau algorithme de commande indirecte intelligente (adaptative, floue, robuste H^∞) de telle sorte que non seulement la stabilité du système de commande floue adaptative soit garantie mais, également l'influence de la perturbation externe et de l'erreur d'approximation sur l'erreur de poursuite puisse être atténuée à un niveau prescrit par l'intermédiaire de la technique de conception H^∞ .

- **Le troisième chapitre** mettra en exergue l'une des contributions de ce travail en relation avec la commande adaptative floue par mode glissant d'ordre fractionnaire des systèmes non linéaires chaotiques d'ordre fractionnaire. Une technique de synchronisation améliorée est proposée pour une commande robuste par mode glissant des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire en claquant l'élimination d'une grande incertitude ou une variation inconnue dans les paramètres et les structures du système. La technique donnée combine la technique d'atténuation floue, la méthode d'approximation par logique floue, et l'algorithme de commande adaptative.

L'une des principales contributions de ce chapitre est l'utilisation d'un régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ dans la loi de commande pour éliminer l'action de chattering dans le signal de commande.

- Cette thèse se conclura à travers **le chapitre 4**, qui est centré sur l'objet fondamental de ce travail, Cette dernière porte sur l'application de l'extension de l'approche du gain de

Nussbaum au cas fractionnaire dans la commande adaptative floue pour estimer le signe du gain de cette commande.

Tout au long de ce travail, la stabilité du système de commande proposée est réalisée en utilisant la théorie de Lyapunov. On montre par ailleurs, que l'influence de l'erreur d'approximation et de la perturbation externe de l'erreur de poursuite peut être atténuée à un niveau prescrit arbitrairement via la technique de la conception proposée. La conception de la loi de commande adaptative floue avec la fonction de Nussbaum est appliquée pour les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire non linéaires avec une grande incertitude ou variation inconnue dans les structures et les paramètres du système à commander.

Enfin, on termine par une conclusion générale, dans laquelle on présente les principaux résultats de cette thèse et les perspectives de ce travail de recherche.

Chapitre 2

Eléments de théorie de base

2.1 Introduction

Les systèmes d'ordre non entier ont reçu un intérêt considérable dans de nombreux domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Ces systèmes sont généralement décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans le domaine fréquentiel, ils sont représentés par des fonctions de transfert irrationnelles. A cause de ces fonctions irrationnelles, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été marginalement étudiés. Comme ils n'ont pas de solutions analytiques exactes, les techniques numériques et d'approximation sont largement utilisées pour leur résolution, analyse et implémentation.

Dans la plupart des cas, l'objectif est d'appliquer une commande d'ordre fractionnaire pour améliorer les performances du système. Par exemple, comme dans la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) [108, 110, 111], le but est la robustesse fractale. La détermination de la plage de fréquences d'intérêt mène à une fonction de transfert d'ordre fractionnaire [109, 112] sur laquelle est basée la synthèse du régulateur CRONE. Dans ce régulateur, l'ingrédient principal est la dérivée d'ordre fractionnaire " s^α ", où " α " est un nombre réel et " s " est le symbole de la transformée de Laplace de la différentiation [67].

Dans ce chapitre, nous allons donner des définitions relatives au calcul fractionnaire et aux opérateurs d'ordre fractionnaires, quelques propriétés principales et aussi la transformée de Laplace des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. Nous allons en particulier présen-

ter quelques méthodes d'approximation des opérateurs et transferts d'ordre fractionnaire. Les méthodes d'approximation pour les systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire sont discutées dans cette partie, ainsi que quelques outils mathématiques qui concernent la démonstration de la stabilité des systèmes en boucle fermée.

Nous aborderons également la classe des systèmes non linéaires chaotiques d'ordre fractionnaire et le problème de commande et de synchronisations associé à ce type de procédés, tels que les systèmes chaotiques de Duffing-Holmes qui seront utilisés dans la partie application de chaque chapitre de cette thèse.

2.2 Historique du calcul fractionnaire

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini au 19^e siècle par Riemann et Liouville. Leur but devait prolonger la dérivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers [73]. L'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Leibniz, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire [99]. Il introduit le symbole de dérivation d'ordre n , $\frac{d^n y}{dx^n}$, où n est un entier positif. Ce fut peut être un jeu simple des symboles qui poussa l'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir n dans \mathbb{Q} . Il posa la question : et si $n = \frac{1}{2}$? En 1695, dans une lettre à l'Hôpital, Leibniz écrivit : « Ainsi il s'ensuit que $d^{1/2}x$ sera égal à ${}^{1/2}\sqrt{dx} : x$, un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ». Sur ces questions, nous retrouvons les contributions de grands mathématiciens tels qu'Euler ou Lagrange au *XVIII^{ième}* siècle, Laplace, Fourier, Liouville (1832; 1837) ou Riemann (1847) au *XIX^{ième}* siècle, ainsi qu'à Grünwald (1867) et Letnikov (1868) dans la seconde moitié du même siècle. Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Pour plus de détails historiques, nous renvoyons à [37, 70, 97].

Pendant ces trois dernières décennies, un intérêt croissant a été prêté au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés. Ainsi, un grand effort a été fait pour

essayer de mettre en pratique les résultats déjà établis, et un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire [67].

2.2.1 Commande des systèmes d'ordre fractionnaire

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) était proposé par Oustaloup [86]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. La synthèse d'une telle commande est effectuée de façon que l'équation différentielle d'ordre fractionnaire qui la décrit, soit de la même forme que celle qui régit la relaxation de l'eau sur une digue poreuse. Il a été remarqué qu'un tel phénomène physique est robuste au sens de l'automaticien. En effet, une observation attentive de la relaxation montre que son amortissement est indépendant de la nature de la digue, fluvial ou côtière, donc d'un certain nombre de paramètres, entre autre la masse d'eau en mouvement. Ce résultat est aussi remarquable que paradoxale dans l'approche entière de la mécanique où toute relaxation présente un amortissement lié à la masse transportée.

Depuis cette initiative, la commande d'ordre fractionnaire captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, Podlubny [114] a proposé le régulateur $PI^\alpha D^\beta$ comprenant une intégration fractionnaire d'ordre α et une dérivation fractionnaire d'ordre β , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande. Dans ce sens, les travaux de cette thèse s'articulent autour de ces deux dernières applications. Intitulé "Contribution à la commande CRONE", ce sujet a pour objectif de développer de nouvelles techniques d'identification des systèmes d'ordre fractionnaire moins sensibles aux bruits et de nouvelles approches de conception plus simples des systèmes de commande robuste d'ordre fractionnaire.

2.2.2 Calcul fractionnaire et ses applications

2.2.2.1 Calcul fractionnaire

L'appellation "calcul fractionnaire" ne signifie pas le calcul des fractions. Il ne signifie pas non plus une fraction de n'importe quel calcul différentiel, intégral ou calcul de

variations. Le calcul fractionnaire est un nom pour la théorie d'intégrales et de dérivées d'ordre arbitraire, qui unifient et généralisent les notions de différentiation d'ordre entier et d'intégration répétées n -fois.

Le calcul fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre fractionnaire) est le champ de l'analyse mathématique et l'application des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et encore nouveau. Ces dernières années l'intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par ses applications dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie.

Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un concept aussi ancien que nouveau. C'est un ancien concept puisque, partant déjà de quelques spéculations de G.W. Leibniz (1695, 1697) et L. Euler (1730), il a été développé jusqu'à nos jours. De nombreux mathématiciens ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé, dont nous pouvons citer une liste non exhaustive [48] comprenant : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822) N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grünwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Love (1938-1996), A. Erdelyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949).

Une équation différentielle fractionnaire est une équation contenant des dérivées fractionnaires ; une équation intégrale fractionnaire est une équation intégrale contenant des intégrales fractionnaires. Un système d'ordre fractionnaire est un système décrit par une équation différentielle fractionnaire ou une équation intégrale fractionnaire ou un système de telles équations.

La représentation mathématique des systèmes fractionnaires dans le domaine fréquentiel donne des fonctions irrationnelles qui, dans le domaine temporel, correspondent à des équations différentielles difficiles à exploiter. Vu l'absence de méthodes mathématiques, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire étaient jusque là étudiés de façon marginale seulement, que ce soit en théorie ou en application. Pour des raisons d'analyse, de synthèse, et de simulation de tels systèmes, l'utilisation des fonctions rationnelles pour l'approximation s'avère d'une grande importance. Alors pour analyser et concevoir les systèmes

de commande d'ordre fractionnaire il faut les approximer par des fonctions rationnelles [56, 67].

2.2.2.2 Domaines d'application

1. En Automatique

En automatique, peu d'auteurs ont utilisé des lois de commande introduisant des dérivées fractionnaires. Podlubny [114, 113], Chen et al. [26] et Caponetto et al [22] ont montré que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs fractionnaires. Ils proposent une généralisation des contrôleurs traditionnels PID. Mbodje et Montseny [96] et Matsuda et Fuji (1993) ont appliqué avec succès des lois de commande fractionnaires à des systèmes à paramètres distribués. Cependant, nous ne pouvons aborder le sujet de contrôle fractionnaire sans invoquer l'approche CRONE, introduite par Oustaloup (1991). La commande CRONE est le travail d'un groupe de chercheurs au Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS) de Bordeaux sous la direction d'Alain Oustaloup. Elle fait l'objet de nombreuses publications et de plusieurs ouvrages.

La méthodologie CRONE permet la synthèse dans le domaine fréquentiel de commandes dynamiques robustes par retour de sortie pour des systèmes linéaires stationnaires (LTI), incertains, mono-variables (SISO) ou multi-variables (MIMO). Les performances auxquelles elle conduit s'expliquent autant par la prise en compte aussi peu pessimiste que possible des incertitudes portant sur les systèmes commandés, que par l'efficacité des paramètres de réglage utilisés. Cette stratégie de contrôle a été appliquée à la suspension automobile, suspension qui porte d'ailleurs le même nom. Cependant, il est utile de souligner que le compensateur implanté est d'ordre entier et synthétisé physiquement par des composants classiques. Le qualificatif non entier est tout de même justifié dans la mesure où le comportement d'un opérateur non entier authentique peut être approché avec un écart arbitrairement petit sur une bande fréquentielle donnée.

2. En génie électrique

Les systèmes d'ordre non entier sont tout particulièrement intéressants pour représenter finement et avec un ordre réduit les dispositifs dont le fonctionnement repose sur la diffusion d'une grandeur (champ, température, etc.). Le lien entre diffusion et modélisation d'ordre non entier est analysé en détail dans [114, 113].

Modélisation des machines synchrones et asynchrones : Les machines électriques sont des composants omniprésents dans les systèmes et réseaux d'énergie électrique, que ce soit pour la génération (centrales électriques) ou pour les usages industriels ou domestiques en incluant le transport. Avec l'électrification croissante des principaux domaines industriels, on trouve des actionneurs électriques dans les réseaux de forte puissance comme ceux de taille plus modeste (réseaux embarqués ou îliens) [59, 60]. Les travaux sur l'utilisation des systèmes d'ordre non entier pour la modélisation des machines électriques ont été commencés dans les années 90 par le professeur M. Ivanès et N. Retière au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, en France. Pendant plus qu'une décade, plusieurs articles sont apparus, traitant de la méthode, son application et l'identification des paramètres des nouveaux schémas équivalent [116]. D'autres travaux en France ont utilisé la modélisation d'ordre non entier pour modéliser les phénomènes transitoires dans les machines électriques.

3. En électricité

3.1. Piles à combustibles : Une pile à combustible produit l'énergie électrique grâce à l'oxydation sur l'anode d'un combustible (hydrogène) couplée à la réduction sur la cathode d'un oxydant (oxygène) Lewandowski (2007). Son principe de fonctionnement repose sur des phénomènes physico-chimiques de nature diffusive (diffusion des espèces gazeuses au niveau des électrodes notamment), ce qui invite à utiliser la modélisation d'ordre fractionnaire à l'instar des machines tournantes.

L'impédance de Warburg décrite en (2.1) est approximée par une impédance (2.2) d'ordre fractionnaire (ici égal à $\frac{1}{2}$), faisant apparaître une dépendance en racine carrée de la fréquence Racewicz (2005).

$$Z_W(\omega) = A_k \cdot \frac{\tanh(\sqrt{j\omega \cdot \tau_k})}{\sqrt{j\omega \cdot \tau_k}} \quad (2.1)$$

avec $\tau_k = \frac{\delta^2}{D_k^{eff}}$

Alors son approximation d'ordre fractionnaire donnée comme :

$$Z_W^{1/2}(\omega) = \frac{A_k}{\sqrt{1 + j\omega \cdot \tau_k}} \quad (2.2)$$

3.2. Batteries électrochimiques : Les dispositifs de stockage sont de plus en plus présents dans les réseaux ou systèmes d'énergie dans la mesure où ils peuvent contribuer à une gestion énergétique plus efficace, du point de vue du producteur, du consommateur ou du distributeur [136] . Les batteries électrochimiques ont un potentiel d'utilisation

considérable dans un contexte de diversification des sources et d'utilisation d'énergies intermittentes.

3.3 Supercondensateur : est un condensateur de très grande capacité par rapport à ses dimensions relativement petites grâce au phénomène de double couche Sutkowski (2007). Il permet ainsi de disposer de densités de puissance beaucoup plus importantes que celles des batteries plus utilisées comme sources d'énergie. Que ce soit pour une batterie ou une supercapacité, il est nécessaire de modéliser finement la porosité au niveau des électrodes où se diffusent les ions de l'électrolyte [128]. De manière similaire aux machines électriques et piles à combustible, ce phénomène peut là encore être modélisé électriquement par des systèmes d'ordre non entier.

3.4 Supercapacité : Il est composé de trois éléments : une résistance interne R_i (qui modélise l'électrolyte et ses connections), une inductance L (qui modélise des connections et qui élimine des erreurs d'identification aux fréquences intermédiaires) et une impédance complexe Z_p modélisant la porosité des électrodes du supercondensateur [17].

$$Z_p(\omega) = \frac{\tau \cdot \coth(\sqrt{j\omega} \cdot \tau)}{C \cdot \sqrt{j\omega} \cdot \tau} \quad (2.3)$$

Riu dans [117] propose une approximation de l'impédance Z_p de (2.3) par un système d'ordre 1/2 décrit par (2.4). Cela permet d'obtenir une très bonne cohérence avec le modèle analytique, en identifiant un minimum de paramètres (4 au lieu d'environ 20 pour le modèle classique).

$$Z_p^{1/2}(\omega) = \frac{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}}{C_0 \cdot j\omega} \quad (2.4)$$

La modélisation d'ordre non entier a permis d'améliorer la précision de la représentation fréquentielle. Néanmoins, d'autres travaux présentent des modèles d'ordre fractionnaire de supercapacités non linéaires [8].

2.3 Opérateurs d'ordre non entier

2.3.1 Quelques définitions fondamentales

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont

équivalentes pour un large panel de fonctions (en particulier pour les fonctions et les calculs considérés dans ce travail) [113].

2.3.1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Les fonctions Gamma et Mittag-Leffler jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire [55].

1. La fonction Gamma :

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ elle est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.5)$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$. Une propriété importante de cette fonction est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.6)$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n + 1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La démonstration est bien détaillée dans [55].

2. La fonction Mittag-Leffler :

La fonction exponentielle, e^z , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [93, 94] et désignée par la fonction suivante [40, 55] :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (2.7)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal [1] et elle est définie par le développement en série suivant [40, 1, 55] :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (2.8)$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (2.7).

A partir de la relation (2.8) on montre que

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.9)$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

2.3.1.2 Définition de Riemann-Liouville

L'intégrale dite de Riemann-Liouville est définie ainsi [67] :

Définition 2.1. Soient C et \mathbf{R} les anneaux des nombres complexes et réels respectivement, $\mathbf{R}(\cdot)$ symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient $\lambda \in C$ avec $\mathbf{R}(\lambda) > 0$, $t_0 \in \mathbf{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty)$.

L'intégrale d'ordre λ de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}_{RL}I_{t_0}^\lambda f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{t_0}^t (t - \xi)^{\lambda-1} f(\xi) d(\xi) \quad (2.10)$$

avec $t \geq t_0$ et Γ la fonction gamma d'Euler.

Définition 2.2. Soient $\mu \in C$ avec $\mathbf{R}(\mu) > 0$, n un entier positif, $t_0 \in \mathbf{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty)$. La dérivée d'ordre μ de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}_{RL}D_{t_0}^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \mu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\mu-1} f(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

Où le nombre μ est tel que $(n - 1) < \mu < n$.

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (2.10) comme suit :

$${}_{RL}D_{t_0}^\mu f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ I_{t_0}^{(n-\mu)} f(t) \right\} \quad (2.12)$$

Remarque 2.1. - Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite I^λ pour I_0^λ , et D^μ pour D_0^μ .

2.3.1.3 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie ainsi :

Définition 2.3.

$${}_C D^\mu f(t) \stackrel{\Delta}{=} I^{n-\mu} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\mu-n+1}} d\tau \quad (2.13)$$

avec n un entier positif vérifiant l'inégalité $n-1 < \mu < n$.

Cette définition peut être formulée également en fonction de la définition de Riemann-Liouville comme suit :

$${}_{RL} D^\mu f(t) = {}_C D^\mu f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\mu}}{\Gamma(k-\mu+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (2.14)$$

Ce qui peut être décrit autrement par :

$${}_C D^\mu f(t) = {}_{RL} D^\mu \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) \quad (2.15)$$

2.3.1.4 Définition de Grünwald-Leitnikov

Définition 2.4. La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $\mu > 0$ de G-L est donnée par :

$${}_{GL} D^\mu f(t) = \frac{d^\mu}{dt^\mu} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\mu} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\mu}{j} f(kh - jh) \quad (2.16)$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients

$$\omega_j^{(\mu)} = \binom{\mu}{j} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\mu-j+1)}$$

avec $\omega_0^{(\mu)} = \binom{\mu}{0} = 1$, sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1-z)^\mu = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\mu}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{(\mu)} z^j \quad (2.17)$$

La définition de Grünwald-Leitnikov de l'intégrale d'ordre fractionnaire est formulée comme suit :

$${}_{GL} I^\lambda f(t) = {}_{GL} D^{-\lambda} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\lambda \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-\lambda}{j} f(kh - jh) \quad (2.18)$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients $\omega_j^{(-\lambda)}$ avec $\omega_0^{(-\lambda)} = \binom{-\lambda}{0} = 1$, sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1-z)^{-\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\lambda}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{(-\lambda)} z^j \quad (2.19)$$

2.3.2 Propriétés des opérateurs d'ordre non entier

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes :

1. Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z et α .
2. Pour $\alpha = n$, où n est un entier, l'opération $D^\alpha f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .
3. Pour $\alpha = 0$ l'opération $D^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité : $D^0 f(z) = f(z)$.
4. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires :

$$D^\alpha af(z) + D^\alpha bg(z) = aD^\alpha f(z) + bD^\alpha g(z)$$

5. La loi additive (propriété du semi-groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z)$$

est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(z)$ (voir [113] pour d'autres propriétés).

2.3.3 Evaluation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les processus de commande industrielle sont en général échantillonnés ou discrétisés, donc nous aurons besoin d'approximations numériques pour les formules analytiques des opérateurs d'ordre fractionnaire. Il y a eu beaucoup de travaux sur les solutions numériques des équations différentielles d'ordre fractionnaire ainsi que sur la discrétisation des systèmes et opérateurs d'ordre fractionnaire [25, 37, 115, 95]; Diethelm [30] a proposé récemment une méthode efficace pour la résolution numérique des équation différentielles d'ordre fractionnaire, basée sur un correcteur-prédicteur de type Adams. Vinagre et al. [26] ont développé une nouvelle méthode pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire en utilisant l'approche de Tustin. Ferdi [42] a récemment présenté une méthode de calcul de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire par le développement en séries de puissances et la modélisation du signal.

Cependant, ces méthodes sont souvent trop compliquées ou d'ordre trop élevé pour être

introduites dans un schéma de commande adaptative simple afin de commander des processus aux paramètres inconnus ou variants dans le temps. Cela peut destabiliser la boucle de commande, par une variation conséquente de l'amplitude du signal de référence, ou simplement pendant la phase transitoire [67].

2.3.3.1 Approximation des formules de Riemann-Liouville

Nous aurons recours parfois à une très simple approximation numérique de l'intégrale de Riemann, basée sur la méthode rectangulaire. Cette approximation est plus pratique dans des algorithmes sensibles au nombre de calculs à effectuer.

En mettant,

$$t = k\Delta$$

Où t est le temps actuel, k un entier et Δ la période d'échantillonnage.

On obtient :

$$\begin{aligned} I_0^\alpha f(k\Delta) &= \frac{\Delta}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\tau=0}^{k-1} (k\Delta - \tau\Delta)^{\alpha-1} f(\tau\Delta) \\ &= \frac{\Delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\tau=0}^{k-1} (k - \tau)^{\alpha-1} f(\tau\Delta) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cette méthode présente l'avantage de sa simplicité et l'inconvénient d'être trop consommatrice de mémoire, à mesure que la fenêtre temporelle de calcul s'élargit. Toutefois nous pouvons remédier à cette contrainte en limitant la "mémoire" de la dérivée d'ordre fractionnaire, ainsi la valeur initiale sera prise à l'instant $t - T_m$ où T_m est la longueur prédéfinie de cette mémoire.

Ainsi, si K_m est le nombre de périodes correspondant au temps T_m ($K_m = \frac{T_m}{\Delta}$), l'approximation numérique de l'intégrale d'ordre fractionnaire peut s'écrire :

$$I_{T_m}^\alpha f(k\Delta) = \frac{\Delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\tau=k-K_m}^{k-1} (k - \tau)^{\alpha-1} f(\tau\Delta) \quad (2.21)$$

2.3.3.2 Approximation des formules de Grünwald-Leitnikov

Pour le calcul numérique des intégrales et dérivées d'ordre fractionnaire on peut utiliser les définitions de G-L des équations (2.18) et (2.16) respectivement.

Pour une fonction causale $f(t)$, et pour $t = kh$, L'intégrale d'ordre fractionnaire est donnée par [114] :

$$\begin{aligned} I^\lambda f(kh) &= D^{-\lambda} f(kh) \\ &\cong h^\lambda \sum_{j=0}^k \omega_j^{(-\lambda)} f(kh - jh) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Où les coefficients $\omega_j^{(-\lambda)}$ sont les coefficients du binome de l'équation (2.19) qui peuvent être calculés par la formule récurrente suivante, pour $j = 1, 2, \dots, k$:

$$\omega_0^{(-\lambda)} = 1$$

et

$$\omega_j^{(-\lambda)} = \left(1 - \frac{1-\lambda}{j}\right) \omega_{j-1}^{(-\lambda)} \quad (2.23)$$

De même pour une fonction causale $f(t)$, et pour $t = kh$, la dérivée d'ordre fractionnaire est donnée par [113] :

$$\begin{aligned} D^\mu f(kh) &= \frac{d^\mu}{dt^\mu} f(t) \\ &\cong h^{-\mu} \sum_{j=0}^k \omega_j^{(\mu)} f(kh - jh) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Où les coefficients $\omega_j^{(\mu)}$ sont les coefficients du binome de l'équation (2.17) qui peuvent être calculés par la formule récurrente suivante, pour $j = 1, 2, \dots, k$:

$$\omega_0^{(\mu)} = 1$$

et

$$\omega_j^{(\mu)} = \left(1 - \frac{1+\mu}{j}\right) \omega_{j-1}^{(\mu)} \quad (2.25)$$

Cependant, Hwang et al. [56] ont montré que la méthode d'approximation de Grünwald-Leitnikov ne donne une réponse transitoire assez précise que si l'intervalle de temps choisi est très petit.

2.4 Systèmes de commande d'ordre fractionnaire

2.4.1 Représentation d'état d'ordre fractionnaire

On considère la fonction de transfert comme suit :

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i s^{\frac{i}{Q}}}{\sum_{j=0}^N a_j s^{\frac{j}{Q}}}, \quad M, N \in \mathbb{N}^*, Q \in \mathbb{N}, a_j, b_i \in \mathbf{R} \quad (2.26)$$

En général une fonction de transfert d'ordre fractionnaire ne peut pas se mettre sous la forme (2.26), mais celles qui le peuvent sont plus faciles à étudier. Les fonctions de transfert d'ordre entier sont souvent des cas particulier de la forme (2.26), quand $Q = 1$.

Les systèmes d'ordre fractionnaire (dont l'ordre fractionnaire est commensurable) permettent aussi une représentation dans l'espace d'état [113, 67] :

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{Q}}x &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.27)$$

où u est le vecteur des entrées, x celui des états et y celui des sorties du système. La représentation d'état des systèmes d'ordre entier est un cas particulier de (2.27) avec $Q = 1$.

Théorème 2.1. *La représentation d'état (2.27) correspond à la matrice de transfert,*

$$y = \left[C \left(s^{\frac{1}{Q}}I - A \right)^{-1} B + D \right] u \quad (2.28)$$

avec l'hypothèse que toutes les conditions initiales sont nulles.

Preuve : A partir de la dernière hypothèse on peut écrire,

$$s^{\frac{1}{Q}}x = Ax + Bu \Leftrightarrow \left(s^{\frac{1}{Q}}I - A \right) x = Bu \Rightarrow x = \left(s^{\frac{1}{Q}}I - A \right)^{-1} Bu$$

En remplaçant x dans la deuxième équation de (2.27), on obtient (2.28).

□

Remarque 2.2. *Comme pour les représentations d'état d'ordre entier, les représentations d'état d'ordre fractionnaire ne sont pas uniques, en d'autres termes plusieurs représentations d'états fractionnaires correspondent à la même fonction de transfert d'ordre fractionnaire.*

Remarque 2.3. *Il faut souligner le fait que la fonction de transfert ne peut être obtenue à partir de la représentation d'état que dans le seul cas où les conditions initiales le permettent ; et si la définition de Riemann-Liouville de la dérivée d'ordre fractionnaire est utilisée, ces conditions initiales peuvent comprendre des dérivées d'ordre fractionnaire de fonctions. Pour cette raison les définitions de Caputo et Grünwald-Leitnikov sont souvent utilisées pour ces calculs.*

Théorème 2.2. *La fonction de transfert,*

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i s^{\frac{i}{Q}}}{s^{\frac{N}{Q}} + \sum_{j=0}^{N-1} a_j s^{\frac{j}{Q}}}, \quad N, Q \in \mathbf{N}, a_j, b_i \in \mathbf{R} \quad (2.29)$$

est équivalente à la représentation d'état suivante, appelée forme canonique commandable, en supposant que les conditions d'application du théorème 2.1 sont vérifiées.

$$D^{\frac{1}{Q}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.30)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_{N-1} - a_{N-1}b_N & b_{N-2} - a_{N-2}b_N & \cdots & b_0 - a_0b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + b_N u$$

Théorème 2.3. *La fonction de transfert (2.29) est équivalente à la représentation d'état suivante, connue sous le nom de la forme canonique observable, en supposant que les conditions d'application du théorème 2.1 sont vérifiées :*

$$D^{\frac{1}{Q}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{N-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0b_N \\ b_1 - a_1b_N \\ \vdots \\ b_{N-2} - a_{N-2}b_N \\ b_{N-1} - a_{N-1}b_N \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} + b_N u \quad (2.31)$$

2.4.2 Stabilité des processus fractionnaires

Les deux résultats suivants peuvent être démontrés comme leurs similaires dans le cas d'ordre entier [129].

Théorème 2.4. *Le système d'ordre fractionnaire (2.27) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité,*

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

(où N est le nombre des états) est une matrice de rang plein [67].

Théorème 2.5. *Le système d'ordre fractionnaire (2.27) est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité,*

$$O = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{N-1}B \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

(où N est le nombre des états) est une matrice de rang plein.

Théorème 2.6. *Le système d'ordre fractionnaire (2.26) est stable (dans le sens où des entrées bornées donnerons toujours des sorties bornées) si et seulement si toutes les racines (complexes) r de son dénominateur vérifient,*

$$|\arg(r)| > \frac{\pi}{2Q} \quad (2.34)$$

2.4.3 Performances des systèmes d'ordre fractionnaire

Plusieurs travaux antérieurs ont montré que les systèmes d'ordre fractionnaire ont de très bonnes performances, en termes de temps de réponse et de stabilité de la dynamique transitoire notamment ([108, 125, 22]). Pour un système SISO de second ordre, représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1\right)^\beta} \quad (2.35)$$

Il faut remarquer à ce niveau que la fonction de transfert donnée dans (2.35) est préférée à la structure du modèle de second degré suivante :

$$G'(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^\beta + 1\right)} \quad (2.36)$$

Bien que cette dernière forme soit plus familière pour les ingénieurs mécaniciens ou physiciens, elle représente toujours un modèle mathématique de processus de second ordre, et vu notre bonne connaissance des propriétés du système présenté dans l'équation (2.35) en termes de l'ordre fractionnaire β et des effets du facteur d'amortissement ξ sur le temps de réponse [22] il est plus pratique de la prendre comme modèle de référence dans une boucle de commande adaptative. De plus, Hartley et al. ont montré [52] qu'un modèle de la forme :

$$G''(s) = \frac{1}{s^{\beta_1} + a s^{\beta_2} + 1}, \quad \beta_1 > \beta_2 > 0 \quad (2.37)$$

qui est une forme plus générale que (2.36), peut entrer en résonance si certaines conditions sur la valeur de la constante réelle a sont vérifiées, et ce même si $\beta_1 = 1$.

2.5 Systèmes de logique floue

La logique floue a été introduite par le professeur Lotfi Zadeh en 1965 comme une généralisation de la logique binaire. L'intérêt de la logique floue réside dans sa capacité à traiter l'imprécis, l'incertain et le vague. Ces dernières années, la logique floue a été appliquée dans divers domaines. Cependant, la commande floue est le domaine qui suscite le plus de curiosité et s'avère être un champ d'application actif à travers le monde [66, 33]. Les systèmes flous offrent une solution potentielle au problème inhérent à la commande adaptative standard. Ils sont des approximateurs universels [133, 131] et fournissent une manière commode pour paramétriser les non-linéarités inconnues. En effet, ils peuvent approcher uniformément n'importe quelle fonction inconnue non linéaire continue sur un ensemble compact avec un degré de précision arbitraire. Notons qu'il existe d'autres approximateurs universels tel que : les réseaux de neurones (RN) multi couches.

Cependant, seuls les systèmes flous qui sont capables d'incorporer d'une manière systématique la connaissance de l'expert. La difficulté liée à la construction de la base des règles floues pour les systèmes dynamiques complexes et le besoin d'améliorer la qualité d'approximation ont motivé Wang à introduire la commande floue adaptative [130, 131, 11].

Dans ces schémas, la propriété d'approximation universelle des systèmes flous a été complètement exploitée, et la stabilité et la robustesse ont été étudiées par l'approche de Lypunov. Depuis plusieurs schémas de commande floue adaptative ont été proposés pour une classe des systèmes mono-entrée mono-sortie (single input single output (SISO)) incertains non linéaires [131, 33]. Ainsi, les travaux présentés dans cette thèse portent essentiellement sur la conception des lois de commande adaptative floue pour les systèmes non linéaires inconnus.

2.5.1 Description des systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S)

L'imprécision des entrées et des sorties des variables du système chaotique d'ordre fractionnaire incertain peut être adressée directement par les systèmes flous en les définissant avec des ensembles flous qui peuvent être exprimés en termes linguistiques (par exemple : Petit, Moyen et Grand) [19]. La configuration de base du système de Takagi-Sugeno (T-S) [126] comprend une base de règles floues, qui se compose d'une collection des règles floues IF-THEN sous la forme suivante :

$R^{(l)}$: IF x_1 is F_1^l , and ..., x_n is F_n^l THEN

$$y_l = \alpha_0^l + \alpha_1^l x_1 + \dots + \alpha_n^l x_n = \theta_l^T [1 \ x^T]^T \quad (2.38)$$

où $(F_1^l, \dots, F_i^l, \dots, F_n^l)$ sont les entrées des ensembles flous et $\theta_l^T = [\alpha_0^l, \alpha_1^l, \dots, \alpha_n^l]$ est le vecteur des facteurs ajustables de la partie conséquence des règles floues. Aussi y_l est une valeur linguistique, et un moteur d'inférence floue pour combiner les règles floues IF-THEN dans la base de règles floues d'un vecteur linguistique d'entrée $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ à une variable de sortie $y \in \mathbf{R}$.

Soit M le nombre de règles floues IF-THEN. La sortie du système flou avec defuzzifier moyenne centrale, produit d'inférence et fuzzifier singleton peut être exprimée sous la forme :

$$y(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{l=1}^M v^l \cdot y_l}{\sum_{l=1}^M v^l} = \frac{\sum_{l=1}^M v^l \theta_l^T [1 \ x^T]^T}{\sum_{l=1}^M v^l} \quad (2.39)$$

Où $v = \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i)$ est la vraie valeur de la l ème implication et $\mu_{F_i^l}(x_i)$ la valeur de la fonction d'appartenance de la variable floue x_i [82]. L'équation (2.39) est réécrite comme :

$$y(\mathbf{x}) = \theta_l^T \xi(\mathbf{x}) \quad (2.40)$$

où $\theta_l^T = [\theta_1^T, \theta_2^T, \dots, \theta_M^T]$ est le vecteur de paramètres ajustables

et $\xi^l(\mathbf{x}) = [\xi^1(x), \xi^2(x), \dots, \xi^M(x)]$ est un vecteur de fonction de base floue défini comme :

$$\xi^l(\mathbf{x}) = \frac{v^l [1x^T]}{\sum_{l=1}^M v^l}$$

Lorsque les entrées sont introduites dans le système T-S, la vraie valeur v^l de lème implication est calculée. L'application de la stratégie de défuzzification commune, la sortie est exprimée comme 2.39.

En se basant sur le théorème d'approximation universelle [133], le système flou ci-dessus (2.40) est capable de rapprocher uniformément une fonction non linéaire bien définie sur un ensemble compact U_c à un degré de précision.

2.5.2 Théorème des approximateurs universels

Deux raisons principales amènent à incorporer les systèmes flous dans un contrôleur adaptatif :

1. Ils ont la propriété d'approximation universelle,
2. La possibilité d'intégrer dans les contrôleurs des informations linguistiques ou mathématiques disponibles issues d'une expertise.

Dans la littérature floue, on dispose d'un nombre important de travaux montrant que les systèmes flous sont bien des approximateurs universels [14, 15, 11].

Dans [133], Wang a montré que les systèmes flous sont des approximateurs universels s'ils respectent certains critères. Il voit son résultat comme un théorème d'existence d'un système flou optimal pour une large variété d'applications.

Remarque 2.4. *Les schémas de commande floue proposés dans cette thèse sont basés sur un théorème dit théorème d'approximateurs universels ci-dessous (Théorème 2.7).*

Théorème 2.7. *Soit $f(\mathbf{x})$ une fonction non linéaire continue définie sur un ensemble compact Ω_x , et pour toute constante positive ϵ , il existe un système flou $y(\mathbf{x})$ de la forme (2.40) tel que :*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_x} |f(\mathbf{x}) - \theta^T \xi(\mathbf{x})| < \epsilon \quad (2.41)$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans [131].

Dans tout les chapitres de cette thèse, nous supposons que la structure du système flou et les fonctions floues de base sont convenablement spécifiées à priori par l'utilisateur. Cela signifie que la décision de l'utilisateur est nécessaire pour déterminer la structure du système flou à savoir : les entrées pertinentes, le nombre de fonctions d'appartenance pour chaque entrée, les paramètres des fonctions d'appartenance et le nombre de règles.

2.6 Synchronisation de chaos et systèmes chaotiques

L'une des applications importantes du calcul fractionnaire est la théorie du chaos [105]. Cette partie est ainsi dédiée à l'étude des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire :

2.6.1 Caractérisation du chaos

Il est très délicat de définir ce qu'est un système chaotique, étant donné qu'il n'existe pas une définition précise. En pratique, on peut dire qu'un système chaotique a un comportement borné en régime permanent qui ne correspond pas à un point d'équilibre, qu'il n'est ni périodique, ni quasi-périodique. Parmi les caractéristiques principales permettant d'évoquer un comportement chaotique, on peut retenir les trois suivantes [57, 118, 105, 10] :

1. un système chaotique est un système déterministe.
2. il exhibe une extrême sensibilité aux conditions initiales.
3. il présente un comportement asymptotique apériodique.
4. si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.

En général, les trajectoires d'un système dynamique chaotique sont attirées vers un attracteur étrange. Ce dernier est caractérisé par :

1. un volume nul.
2. une séparation exponentiellement rapide de trajectoires initialement proches.
3. une dimension souvent fractale (non entière) caractérisant le concept de système chaotique fractionnaire.

La naissance d'un attracteur étrange est liée à l'existence de deux processus, à savoir l'étirement, responsable de l'instabilité et de la sensibilité aux conditions initiales, et le repliement, responsable du côté étrange, fractal de l'attracteur.

En pratique, la vérification de quelques propriétés d'un système dynamique suffit pour

pouvoir le considérer comme chaotique :

- vérification de la sensibilité aux conditions initiales.
- trace des trajectoires des états et leur spectre de puissance.
- trace des différents attracteurs.
- trace du diagramme de bifurcation.

2.6.2 Applications du chaos

- Contrôle : Première application du chaos est le contrôle du comportement irrégulier dans les circuits et les systèmes ...
- Synchronisation : Communication sécurisée, cryptage, radio...
- Traitement d'information : Codage, décodage et stockage d'information dans des systèmes chaotiques, tel que les éléments de mémoires et les circuits [10]...

2.6.3 Domaines d'application du chaos

- Engineering : Contrôle de vibration, stabilisation des circuits, réactions chimiques, turbines, et autres ...
- Ordinateurs : Commutation des paquets dans des réseaux informatiques. Cryptage. Contrôle du chaos dans les systèmes robotiques...
- Communications : Compression et stockage d'image. Conception et management des réseaux d'ordinateurs...
- Médecine et biologie : Cardiologie, analyse du rythme du coeur (EEG), et autres ...
- Management et finance : Prévisions économiques, analyse financière, et prévision du marché... [10]

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos. Les nouvelles méthodes d'analyse des systèmes dynamiques qui ont été développées considèrent les systèmes chaotiques comme étant des systèmes non linéaires présentant des trajectoires globalement bornées et localement instables [31].

Définition 2.5. [6, 31] On considère le système dynamique continu suivant :

$$\dot{x} = f(x); \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2.42)$$

Le système 2.42 est dit chaotique s'il existe un ensemble compact $\Omega \in \mathbf{R}$ et un ensemble ouvert Ω_0 tels que toutes les trajectoires $x(t)$ du système 2.42 initialisées à $x(0) \in \Omega_0$ et définies $\forall t \geq 0$ vérifient la condition suivante :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{\omega \in \Omega} |x(t) - \omega| = 0, \quad (2.43)$$

et que toute trajectoire $X(t, 0, X(0))$ commençant dans Ω est instable au sens de Lyapunov.

Pour mettre en évidence les caractéristiques d'un système chaotique, prenons par la suite comme exemple le modèle de Duffing-Holmes avec son extension au cas fractionnaire [10].

2.6.4 Système chaotique fractionnaire de Duffing-Holmes

L'oscillateur de Duffing, introduit en 1918 par G.Duffing, avec une rigidité linéaire négative, d'amortissement et d'excitation périodique est souvent écrit sous la forme [120, 119] :

$$x''(t) - x(t) + \alpha x'(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t) \quad (2.44)$$

Pour obtenir le système de Duffing d'ordre fractionnaire, l'équation (2.44) peut être réécrite sous la forme d'un système de premier ordre des équations différentielles autonomes sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{dt} &= y(t) \\ \frac{y(t)}{dt} &= x(t) - x^3(t) - \alpha y(t) + \delta \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ici, les dérivées conventionnelles dans les équations (2.45) sont remplacées par des dérivées fractionnaires des dérivées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= y(t) \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t) - x^3(t) - \alpha y(t) + \delta \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Où q_1, q_2 sont de deux ordres fractionnaires et α, δ, ω sont des paramètres du système. Une solution numérique du système de Duffing d'ordre fractionnaire (2.46), obtenue par

à l'aide des relations (G-L), a la forme suivante :

$$x(t_k) = y(t_{k-1})h^{q_1} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_1)} .x(t_{k-j}) \quad (2.47)$$

$$y(t_k) = (x(t_k) - x^3(t_k) - \alpha y(t_{k-1}) + \delta \cos(\omega t_k))h^{q_2} - \sum_{j=v}^k c_j^{(q_2)} .y(t_{k-j})$$

Où T_{sim} est le temps de simulation, $k = 1, 2, 3, \dots, N$, pour $N = [T_{sim}/h]$, et $(x(0), y(0))$ est le point de départ (conditions initiales) [120, 119].

Dans la figure(2.1) est représenté attracteur chaotique du système Duffing d'ordre entier (2.45) pour les paramètres suivants $\alpha = 0.15, \delta = 0.3, \omega = 1$ avec les conditions initiales $(x(0), y(0)) = (0.21, 0.13)$ pour la simulation temps $T_{sim} = 200s$ et pas de temps $h = 0.005$.

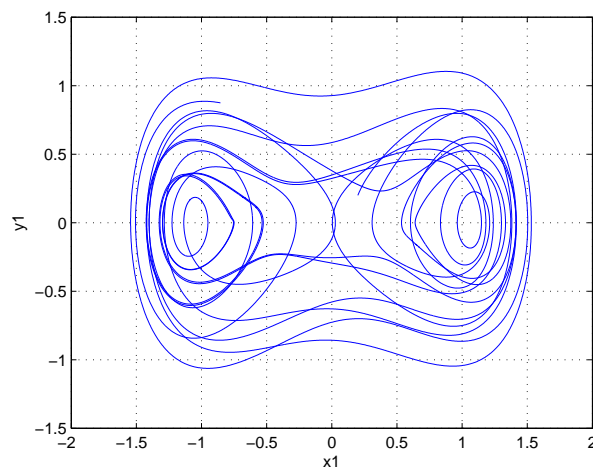


FIGURE 2.1: Trajectoire de phase dans le plan $x - y$ du système Duffing d'ordre entier.

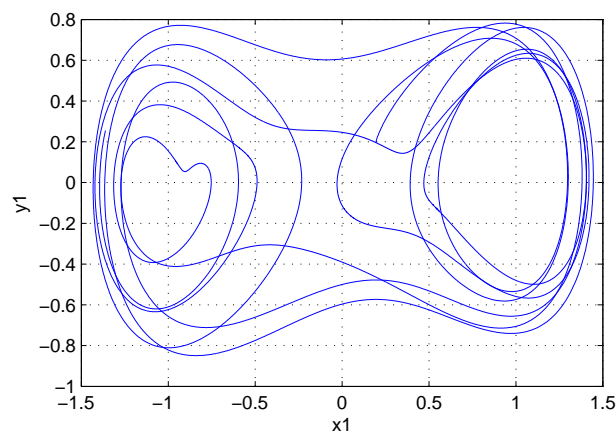


FIGURE 2.2: Trajectoire de phase (attractrice) dans le plan $x - y$ du système de Duffing d'ordre fractionnaire.

Dans la figure (2.2) est représenté à double attracteur défilement du système Duffing d'ordre fractionnaire (2.46) pour les paramètres suivants $\alpha = 0,15, \delta = 0,3, \omega = 1$, ordres-dérivés $q_1 = 0,9, q_2 = 1,0$, avec les conditions initiales $(x(0), y(0)) = (0,21, 0,13)$, pour le temps de simulation $T_{sim} = 200s$ et pas de temps $h = 0,005$.

Remarque 2.5. *On remarque à partir des résultats de simulation que le chaos est assez réduit dans le cas fractionnaire (2.2) par rapport au cas entier (2.1).*

Aussi, on constate concernant la stabilité, que le système d'ordre entier est instable, par contre le système d'ordre non entier ou fractionnaire est stable. Ceci montre en général que les systèmes fractionnaires possèdent des caractéristiques différentes de celles des systèmes d'ordre entier.

2.6.5 Synchronisation

La synchronisation est un phénomène qui caractérise de nombreux systèmes non linéaires. La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.

La théorie de commande des systèmes non linéaires a joué un rôle fondamental dans le développement des méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques. Parmi ces techniques, on cite notamment la technique de synchronisation avec commande par retour d'état, la synchronisation par "backstepping" et la synchronisation par observateurs [31]. L'approche de synchronisation avec des schémas de commande adaptative floue est l'approche qui nous intéresse dans cette thèse.

2.6.5.1 Synchronisation des systèmes chaotiques

Parallèlement aux grandes avancées réalisées dans la théorie de chaos, les perspectives de l'utilisation du chaos dans diverses applications, notamment en télécommunication, ont motivé les chercheurs à étudier la question de l'éventuelle possibilité de synchroniser le chaos. La synchronisation des oscillateurs non linéaires est un phénomène qui a attiré l'attention des chercheurs depuis le constat et la description de ce phénomène par Huygens en 1673, dans un exemple de deux systèmes mécaniques couplés. Le phénomène de synchronisation est manifesté lorsque deux systèmes dynamiques évoluent d'une manière identique en fonction de temps [31, 10].

Rappelons qu'un système chaotique est un système déterministe, extrêmement sensible aux conditions initiales. Par conséquent, Typiquement, deux trajectoires issues de deux conditions initiales arbitrairement proches l'une de l'autre divergent exponentiellement avec le temps. Il s'ensuit que deux systèmes chaotiques ne peuvent synchroniser (sauf si les conditions initiales sont exactement les mêmes, ce qui est physiquement et numériquement impossible). A première vue, parler de synchronisation pour des systèmes chaotiques semble donc être surprenant, et on peut penser que le chaos est incontrôlable. Cependant, des recherches récentes ont montré que l'on pouvait synchroniser deux systèmes chaotiques en les couplant. Ce résultat s'applique dans plusieurs domaines, par exemple pour augmenter la puissance des lasers, synchroniser les sorties d'un circuit électrique, contrôler les oscillations de réactions chimiques, et coder les messages électroniques afin de sécuriser les communications [31].

La synchronisation est basée sur maître-esclave des systèmes chaotiques. Les performances du schéma en termes de sécurité, de robustesse aux attaques et de qualité de transmission, sont testées à travers deux cas d'étude utilisant différents modèles de systèmes chaotiques. [31].

2.7 Commande robuste

Toutefois, les performances de poursuite sont liées directement au choix des valeurs initiales des paramètres ajustables, et la robustesse du système bouclé vis-à-vis des incertitudes et des perturbations externes ne peut être garantie. Pour remédier à ces inconvénients et maintenir de bonnes performances de poursuite, l'utilisation d'approches de robustification s'avère nécessaire. Dans ce sens, plusieurs contrôleurs adaptatifs flous robustes utilisant la technique H^∞ ont été développés [21, 24, 127].

Ces approches se basent sur l'ajout d'un signal de commande de type robuste pour atténuer les effets des erreurs d'approximation et des perturbations externes à un niveau arbitraire prescrit. Ce terme de commande peut être traduit dans l'espace d'état par l'obtention d'une matrice définie positive unique solution de l'équation de Riccati [58].

D'autre part, en raison de sa robustesse vis-à-vis des incertitudes et des perturbations externes, la commande par mode glissant, qui consiste à définir une surface de glissement en fonction des états du système de façon qu'elle soit attractive est combinée avec les

algorithmes adaptatifs flous dans de nombreux travaux Tong(1999), Yoo (1998)...

2.7.1 Théorie de la commande par mode glissant

La commande par modes de glissement est une technique particulièrement intéressante, qui traite l'inévitable problème des incertitudes. Elle remonte aux années 1970. Son principe consiste à amener, dans un temps fini, quelles que soient les conditions initiales, le point représentatif de l'évolution du système sur une hypersurface de l'espace de phase par l'incorporation d'éléments de commutation dans la loi de commande. Le système se met en régime glissant lorsque ce point atteint l'hypersurface, dite surface de glissement. Son comportement devient alors insensible aux perturbations sur la sortie et aux variations paramétriques. Ce genre de commande souffre de problème de réticence ou "broutement" inhérent à la fonction discontinue (i.e. la fonction signe) [23, 104, 11, 4, 62]. La théorie des systèmes à structure variable datant du début du 20^{ème} siècle a pris son essor dans les années 60 Emelyanov [38] et à cause de la structure du contrôleur utilisé qui peut changer d'une façon discontinue entre deux ou plusieurs structures, c'est le cas par exemple des circuits de conversion de puissance où le système est gouverné par une équation différentielle différente pour chaque position de l'interrupteur [49].

La théorie des systèmes à structure variable et les modes glissants associés a fait l'objet d'études détaillées au cours des trente dernières années aussi bien par les chercheurs soviétiques que par les chercheurs d'autres pays, ce n'est que durant le premier congrès de l'IFAC en 1960 que la détermination du comportement dynamique du système commandé sur la surface de commutation a été considérée [62, 16].

2.7.1.1 Technique de commande par mode glissant

La commande par régime glissant consiste à garantir qu'un système dynamique d'ordre n peut être amené vers l'origine à partir de la stabilisation d'un nouveau système d'ordre 1; une seule variable s va définir le nouveau système au lieu de stabiliser de manière explicite les n variables qui constituent le système original, le problème est réduit à la stabilisation de s qui est une fonction des variables des systèmes elle est couramment appelée variable de glissement.

Plus précisément cette technique repose sur les deux étapes décrites ci-dessous :

- On définit d'abord une fonction $s = 0$ appelée surface de glissement, cette variable

est déterminée de telle sorte que lorsque le point représentatif des systèmes l'atteint, sa dynamique le fait converger vers zéro.

- Ensuite, on impose une dynamique sur s afin de garantir que le système va effectivement atteindre la surface de glissement à l'aide de la condition d'attraction 2.49.

La façon de définir s permet de déduire la commande à partir de la dynamique imposée.

2.7.1.2 Synthèse de loi de commande par mode glissant

Soit le système non linéaire défini par :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \quad (2.48)$$

où $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathfrak{R}$ est la commande, $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ sont des fonctions non linéaires.

La loi de commande par mode glissant est construite de façon à ce que les trajectoires du système pointent vers la surface de glissement $s = 0$ dans un premier lieu et ensuite maintenir ces trajectoires sur cette surface en deuxième lieu. Pratiquement, cette commande est composée de deux composantes : une discontinue u_s , permet de ramener les trajectoires vers la surface de glissement et d'assurer la robustesse vis-à-vis des perturbations externes, et la seconde, continue, dite la commande équivalente u_{eq} , permet le maintien et le glissement le long de la surface.

L'étude de l'existence du mode de glissement est basée sur la méthode de Lyapunov, afin de garantir l'attractivité de la surface $s(t, \mathbf{x}) = 0$, ce qui peut être traduit mathématiquement par [16, 33] :

$$s\dot{s} < 0 \quad (2.49)$$

Cette condition indique que les trajectoires des systèmes convergent asymptotiquement vers la surface de glissement $s(t, \mathbf{x}) = 0$ puis restent dans un ϵ -voisinage de cette surface [33].

2.7.1.3 Phénomène de réticence ou broutement

Le terme discontinu $K \cdot \text{sign}(s)$ de la commande par mode glissant excite de fortes oscillations autour de la surface, qui entraînent l'apparition de ce qu'on appelle réticence connu en anglais sous le nom de "Chattering". Afin d'éliminer le broutement, plusieurs techniques ont été proposées telles que :

- la décomposition de la commande en une composante continue de basse fréquence et une commande discontinue de haute fréquence [62],
- la solution de la couche limite : Dans ce cas la fonction signe est remplacée par des approximations continues [123] comme la fonction de saturation *SAT* qui filtre les hautes fréquences. Autres fonctions peuvent être aussi utilisées.
- la solution basée sur un observateur : L'idée proposée par [9] consiste à générer les modes glissants idéaux dans une boucle auxiliaire d'observation.
- la solution par la commande continue dans une bande autour de la surface de glissement [124]. Et plus récemment les modes glissants d'ordre supérieur (HOSM) [39], l'idée est de satisfaire deux conditions de contrainte $s = \dot{s} = 0$ au lieu de la précédente, et simultanément garantir la continuité de \dot{s} . Pour cela l'espace d'état est élargi par l'addition de la variable de commande u comme nouvelle coordonnée.
- solution par un régulateur PI type adaptatif flou : Le terme discontinu est remplacé par un régulateur PI adaptatif flou comme dans [53]. On utilise un régulateur PI^λ d'ordre fractionnaire puis on le compare avec l'utilisation de la fonction *SAT* dans le chapitre 4.

2.7.2 Théorie de la commande Robuste H^∞

La robustesse est une notion très large qui traduit toujours la même idée, à savoir l'insensibilité ou par défaut la quasi-insensibilité. Aussi, dans un même domaine, il existe autant de types de robustesses que de grandeurs insensibles. Le domaine de la commande n'y échappe pas. Dans celui-ci, il est fréquent de considérer la robustesse de la stabilité dont l'objectif est le maintien de la stabilité ou en d'autre terme, la garantie d'une valeur maximale du facteur de résonance en asservissement ou en régulation [32, 20, 41, 4, 87].

2.8 Notion de base sur la stabilité

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour de son point d'équilibre, c'est-à-dire, la capacité à revenir à sa position d'équilibre lorsqu'il est ponctuellement écarté. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de ses trajectoires d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Dans la littérature, plusieurs approches ont été proposées :

les méthodes d'analyse qualitative, les méthodes géométriques, la théorie d'hyperstabilité de Popov, la théorie de Lyapunov.

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle [61, 58, 33, 98].

2.8.1 Définitions et Stabilité de Lyapunov

L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche [11].

NB - Les définitions et les résultats donnés dans cette section sont particulièrement utiles dans l'analyse des schémas de commande adaptative.

2.8.2 Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov permet d'analyser la stabilité d'un système autour de son point d'équilibre sans le résoudre explicitement [124]. L'existence d'une fonction particulière fournit des informations sur la stabilité du système.

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrits par l'équation dynamique [138] :

$$\dot{x} = f(\mathbf{x}, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.50)$$

Définition 2.6. Soit $V(\mathbf{x}, t) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction continue. V est dite propre définie positive si :

1. $\forall t \in \mathbf{R}^+, \forall x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0, V(\mathbf{x}, t) > 0;$
2. $\forall t \in \mathbf{R}^+, V(\mathbf{x}, t) = 0 \Rightarrow x = 0;$
3. $\forall t \in \mathbf{R}^+, \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}, t) = \infty.$

Définition 2.7. (Fonction de Lyapunov) : Une fonction $V(\mathbf{x}, t)$ de classe C^1 est une fonction de Lyapunov locale (respectivement globale) au sens large pour le système (2.50) si elle est propre définie positive et s'il existe un voisinage de l'origine v_0 tel que $x \in v_0$ (respectivement $x \in \mathbf{R}^n$) [138] :

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}(t)) \leq 0$$

Si $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq 0$, alors $V(\mathbf{x}, t)$ est appelée fonction de Lyapunov au sens strict pour (2.50).

Définition 2.8. (*Méthode directe de Lyapunov*) : Si le système (2.50) admet une fonction de Lyapunov locale au sens large (respectivement au sens strict) alors l'origine est un point d'équilibre localement stable (respectivement asymptotiquement stable). Ce résultat peut être validé globalement $\forall \in \mathbf{R}^n$.

Remarque 2.6. La fonction de Lyapunov quadratique est choisie comme $V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$, $P = P^T > 0$, le système linéaire : $\dot{x} = A x(t)$ est globalement exponentiellement stable à l'origine si et seulement si P est la solution de l'équation $A^T P + P A = -Q$, pour une matrice Q symétrique définie positive.

Remarque 2.7. l'extension de la stabilité via la théorie de Lyapunov dans le cas fractionnaire est donnée et démontrée dans [2, 35, 79]

2.8.3 Extension au cas fractionnaire de la méthode directe de Lyapunov

Par méthode directe de Lyapunov nous faisons allusion à la méthode consistant à trouver une fonction de Lyapunov associée à un problème non-linéaire, si une telle fonction existe alors le système est stable. Cette méthode est difficile à mettre en oeuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que la méthode directe de Lyapunov nous donne une condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire que le système peut être stable même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapunov car il n'y a pas de règle générale pour trouver une telle fonction, cependant, dans les problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat.

Commençons par définir la stabilité au sens de Mittag-Leffler [79] :

Définition 2.9. [55] La solution de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire

$$D^\alpha y(x) = f(\mathbf{x}, y(x)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2.51)$$

est dite Mittag-Leffler stable si :

$$\|y(x)\| \leq \{m y(x_0)(x - x_0)^{-\gamma} E_{\alpha, 1}(-\lambda(x - x_0)^\alpha)\}^b, \quad (2.52)$$

où $0 < \alpha < 1$, $\gamma \in [0, 1 - \alpha]$, $\lambda \geq 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(y) \geq 0$ et $m(y)$ est localement lipschitzienne sur $\mathbf{x} \in B \subset \mathbf{R}^n$ avec m_0 comme constante de Lipschitz.

Remarque 2.8. *La stabilité de Mittag-Leffler implique la stabilité asymptotique.*

On va maintenant énoncer un théorème qui est considéré comme une extension de la méthode directe de Lyapounov au cas d'un système d'équations fractionnaires, et qui a pour résultat la stabilité au sens de Mittag-Leffler [55].

Théorème 2.8. *Soit $y = 0$ un point d'équilibre du système (2.19) et $D \in \mathbf{R}^N$ un domaine contenant l'origine. Soit $V(\mathbf{x}, y(x)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continument dérivable et localement lipschitzienne par rapport à y telle que :*

$$\alpha_1 \|y(x)\|^a \leq V(\mathbf{x}, y(x)) \leq \alpha_2 \|y(x)\|^{ab}, \quad (2.53)$$

$$D^\beta V(\mathbf{x}, y(x)) \leq -\alpha_3 \|y(x)\|^{ab}, \quad (2.54)$$

où $x \geq 0$, $y \in D$, $\beta \in (0, 1)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, a et b sont des constantes positives. Alors $y = 0$ est Mittag-Leffler stable.

Si les hypothèses sont vérifiées sur \mathbf{R}^N , alors $y = 0$ est globalement Mittag-Leffler stable.

La démonstration de ce théorème est trouvée dans [79].

2.8.4 Lemme de Barbalat

Le lemme suivant sera utilisé intensivement à travers cette thèse, afin de démontrer la convergence de l'erreur de poursuite vers zéro.

Lemme 2.1. *: Si $f, \dot{f} \in L_\infty$ et $f \in L_p$, pour $p \in [1, \infty[$, alors $f \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Le résultat du Lemme 2.1 est un cas spécial d'un résultat plus général donné par le lemme de Barbalat indiqué ci-dessous :

Lemme 2.2. *(Lemme de Barbalat, [61]) : Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$, existe et est finie, et $f(t)$ est une fonction uniformément continue, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$*

Remarque 2.9. *l'extension de lemme de Barbalat dans le cas fractionnaire donnée et démontrée dans [43], qui sera utilisée dans l'analyse de la stabilité pour les futurs chapitres (Chapitre 4 et Chapitre 5).*

2.9 Gain ou fonction de type-Nussbaum

Sous la commande adaptative, le signe du gain de commande est nécessaire pour déterminer la direction de recherche des paramètres à estimer. Pour contourner le problème de la méconnaissance de ce signe, on utilise en général la technique du gain de Nussbaum. **N.B** : Généralement, dans le domaine de la commande adaptative floue, la technique du gain de Nussbaum est utilisée dans l'approche directe, dans cette thèse, cette technique est utilisée dans l'approche indirecte.

Définition 2.10. Une fonction $N(\zeta)$ est appelée fonction de type-Nussbaum si elle vérifie les propriétés suivantes [101, 100, 46, 45, 11] :

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\zeta) d\zeta = +\infty \quad (2.55)$$

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\zeta) d\zeta = -\infty \quad (2.56)$$

Ces propriétés sont exploitées dans la démonstration de la stabilité des systèmes. les fonctions continues $N_1(\zeta) = \zeta^2 \cos(\zeta)$, $N_2(\zeta) = \zeta \cos(\sqrt{|\zeta|})$, $N_3(\zeta) = \cos(\frac{\pi}{2}\zeta)e^{\zeta^2}$ et $N_4(\zeta) = \ln(\zeta + 1) \cos(\sqrt{\ln(\zeta + 1)})$ sont des fonctions de Nussbaum [101, 139, 12]. Par exemple la fonction continue $N_1(\zeta) = \zeta^2 \cos(\zeta)$, est positive dans l'intervalle $(2\pi n, 2\pi n + \frac{\pi}{2})$ et négative dans l'intervalle $(2\pi n + \frac{\pi}{2}, 2\pi n + \frac{3\pi}{2})$, n est entier. et on a,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi n + \frac{\pi}{2}} N_1(\zeta) d\zeta = +\infty,$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}} \int_0^{2\pi n + \frac{3\pi}{2}} N_1(\zeta) d\zeta = -\infty.$$

Les lemmes ci-dessous (Lemme 2.3)(Lemme 2.4) sont utilisés dans l'analyse de la stabilité [77, 11].

Lemme 2.3. [44] Soient $V(\cdot)$ et $\zeta(\cdot)$ des fonctions continues définies sur $[0, t_f)$, avec $V(t) \geq 0, \forall t \in [0, t_f)$, et $N(\cdot)$ est une fonction paire de Nussbaum.

Si l'inégalité suivante est valide :

$$V(t) \leq c_0 \pm \int_0^t (gN(\zeta) \pm 1) \dot{\zeta} d\tau, \quad \forall t \in [0, t_f), \quad (2.57)$$

où g est une constante différente de zéro et c_0 représente une certaine constante appropriée. Alors $V(t)$, $\zeta(t)$ et $\int_0^t (gN(\zeta) \pm 1) \dot{\zeta} d\tau$ doivent être bornés sur $[0, t_f)$.

Lemme 2.4. *Considérons le système d'ordre fractionnaire comme,*

$$D^\alpha y(t) = -ay(t) + b \quad (2.58)$$

alors il existe une constante $t_0 > 0$ de telle sorte que pour toutes $t \in (t_0, \infty)$,

$$\|y(t)\| \leq \frac{2b}{a} \quad (2.59)$$

où $y(t)$ est la variable d'état, et a, b sont deux constantes positives.

La preuve du lemme 2.4 est trouvée dans [77].

Une fonction de type-Nussbaum sera utilisée dans le chapitre 5, pour estimer la direction de la commande proposée.

2.10 Conclusion

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul fractionnaire. Nous y répertorions quelques notions essentielles sur les systèmes de commande d'ordre fractionnaire nécessaires pour la compréhension de notre travail sur la commande adaptative floue d'ordre fractionnaire des systèmes d'ordre fractionnaire.

Nous avons présenté la structure générale d'un contrôleur flou avec les différents modèles utilisés dans sa conception ainsi que le théorème de l'approximation floue qui est consacré principalement à la présentation des notions de base de la logique floue et des systèmes flous.

Quelques outils mathématiques utilisés et des définitions inhérentes à la stabilité et quelques lemmes et théorèmes indispensables pour la synthèse des lois de commandes sont également donnés.

Chapitre 3

Commande robuste H^∞ adaptative floue des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

3.1 Introduction

L'intérêt de la logique floue réside dans sa capacité à traiter l'imprécis, l'incertain et le vague. Ces dernières années, la logique floue a été appliquée dans divers domaines. Cependant, la commande floue est le domaine qui suscite le plus de curiosité et s'avère être un champ d'application actif à travers le monde [62, 66, 33].

Nous allons présenter dans ce chapitre, quelques notions théoriques de base sur la logique floue, la commande H^∞ et la commande adaptative. La stabilité des systèmes dynamiques sera abordée. Par la suite, l'approche de la commande adaptative floue H^∞ sera formulée et développée. Son efficacité sera mise en évidence par simulation, sous l'environnement Matlab, à travers la commande et la synchronisation d'un système chaotique d'ordre fractionnaire

En incorporant aussi, le critère de la technique de H^∞ et la théorie de Lyapunov [24], on propose un nouvel algorithme de commande adaptative floue de telle sorte que non seulement la stabilité du système est garantie, mais également l'influence de la perturbation et l'erreur d'approximation sur l'erreur de poursuite peut être atténuée à un niveau prescrit

par l'intermédiaire de la technique proposée de H^∞ .

La méthode de conception proposée essaye de combiner la méthode d'approximation floue et l'algorithme de la commande adaptative pour la conception d'une commande de poursuite robuste des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire avec une incertitude ou une variation inconnue des paramètres et des structures du système.

3.2 Définitions

3.2.1 Contrôleur flou

Les grandeurs de sortie d'un processus à commander et éventuellement d'autres mesures déterminantes pour saisir l'évolution dynamique du processus ainsi que les consignes définissant les variables d'entrée du contrôleur flou. Les variables de sortie de ce contrôleur sont les commandes à appliquer au processus [106]. Le contrôleur flou est constitué de quatre blocs principaux : la base de connaissance, le système d'inférence, l'interface de fuzzification et l'interface de défuzzification.

La base de connaissance est composée d'une base des données et d'une base de règles. La base des données contient des faits de la forme : x est A pour les variables linguistiques d'entrée et de sortie du contrôleur flou. La base des règles contient des propositions de la forme si x_1 est A_1 et x_2 est A_2 alors y est B . Elle caractérise la stratégie de commande émise par l'expert sous forme de règles linguistiques. Le système d'inférence est capable de raisonner à partir des informations contenues dans la base de connaissance et de faire des déductions.

Un contrôleur flou passe généralement par les étapes suivantes :

- Choix de la stratégie de fuzzification.
- Etablissement de la base de règles.
- Choix de la méthode d'inférence.
- Choix de la stratégie de défuzzification.

Remarque 3.1. *dans notre étude on se base sur les systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S) section 2.5.1.*

3.2.2 Rappel sur les systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S)

Les systèmes de logique floue adressent l'imprécision des variables d'entrée et de sortie directement en les définissant avec des nombres flous [28].

La configuration de base du système de Takagi-Sugeno (T-S) contient une base de règles floues, qui se compose d'une collection de règles floues IF-THEN [126, 19] :

$$R^{(l)} : \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^l \cdots, \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^l \text{ THEN } y_l = f_l(x)$$

$$y_l = q_0^l + q_1^l x_1 + \cdots + q_n^l x_n = \theta_l^T [1 \ x^T]^T$$

avec y est une variable linguistique, et un moteur d'inférence flou pour combiner les règles IF-THEN dans la base de règles floues dans une cartographie d'un vecteur linguistique $x^T = [x_1 + x_2 + \cdots + x_n] \in \mathbf{R}^n$ à une variable de sortie $y \in \mathbf{R}$ [27].

Si $f_l(x)$ est une fonction linéaire : $f_l(x) = q_0^l + q_1^l x_1 + \cdots + q_n^l x_n$, alors on a un système flou de Takagi-Sugeno d'ordre un, par contre, si la fonction $f_l(x)$ est un polynôme d'ordre zéro : $f_l(x) = q_0^l$, on a donc un système flou de Takagi-Sugeno d'ordre zéro (voir la section 2.5.1).

3.2.3 Commande adaptative

La commande adaptative est un ensemble de techniques utilisées pour l'ajustement automatique en ligne des paramètres du régulateur afin de réaliser ou de maintenir un certain niveau de performances quand les paramètres du procédé à commander varient dans le temps. Les paramètres du régulateur sont adaptés de manière à poursuivre le système dans son évolution [33, 68].

En principe, un système de commande adaptative mesure l'indice de performance du système à commander à partir de l'écart entre l'indice de performance désiré et l'indice de performance mesuré. Le mécanisme d'adaptation commande certains paramètres du système ajustable ou introduit un signal supplémentaire de commande.

Il existe deux types de cette commande :

- 1- Commande adaptative floue directe (auto-ajustable) : où la loi de commande est directement approximée par un ou plusieurs systèmes adaptatifs flous.
- 2- Commande adaptative floue indirecte (avec modèle de référence MRAC) : dans cette méthode, on approxime d'abord le modèle du processus par des systèmes adaptatifs flous puis on synthétise la loi de commande à partir du modèle approximé.

3.2.4 Commande adaptative floue

Le plus souvent, les régulateurs flous sont utilisés dans des systèmes qui possèdent des variations inconnues intrinsèques. L'objectif est donc de conserver de bonnes performances du système complet en adaptant le régulateur en fonction des variations du système.

La commande adaptative floue se compose donc d'un régulateur flou adaptatif (soit unique, soit choisi parmi un groupe de régulateur en fonction de ses performances).

La chose la plus importante qui différencie un régulateur adaptatif flou d'un régulateur adaptatif conventionnel est que le premier peut prendre en compte des informations linguistiques. Ceci est très important lorsque le système possède des incertitudes que l'opérateur humain a appris à anticiper.

En outre, il est clair de prouver qu'un système à multi-sorties peut toujours être approximé par un groupe de systèmes d'approximation à une sortie unique.

3.3 Problématique et conception de la commande adaptative floue robuste H^∞

On considère le système SISO non linéaires d'ordre fractionnaire comme suit :

$$\begin{cases} x_1^{(q_1)} = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(q_{n-1})} = x_n \\ x_n^{(q_n)} = f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u + d(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Si $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ le système ci-dessus est appelé un système d'ordre commensurable, alors, une forme équivalente du système ci-dessus est décrite comme :

$$\begin{cases} x^{(nq)} = f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u + d(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

où $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T$ est le vecteur d'état, $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont des fonctions non linéaires inconnues, mais bornées qui expriment la dynamique du système, $d(t)$ est la perturbation externe donnée bornée, e.g. $|d(t)| \leq D$, et $u(t)$ est l'entrée de commande.

Le système non linéaire (3.2) est supposé contrôlable et le gain d'entrée $g(\mathbf{x}, t) \neq 0$ doit être non nul. Par conséquent, et sans perte de généralité, nous supposons que $g(\mathbf{x}, t) > 0$. L'objectif de la commande est de forcer la sortie du système y à suivre un signal de référence donné borné y_d , sous la contrainte que tous les signaux impliqués doivent être bornés.

En se basant sur les travaux de Wang comme [130, 131, 132], les hypothèses ci-dessous sont considérées.

Hypothèse 3.1. *le gain de commande $g(\mathbf{x}, t)$ est différent de zéro pour tout x et ainsi de signe connu. Sans perte de généralité, il est supposé strictement positif $g(\mathbf{x}, t) > 0$.*

Hypothèse 3.2. *le vecteur d'état \mathbf{x} est mesurable.*

Hypothèse 3.3. *la trajectoire désirée et ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont connues, continues et bornées.*

Hypothèse 3.4. *la limite supérieure de la perturbation $d(t)$ est D , c'est-à-dire $|d(t)| \leq D$ avec D est une constante positive inconnue.*

L'objectif consiste à déterminer une loi de commande assurant la bornitude de tous les signaux du système et la poursuite pour la sortie d'une trajectoire de référence en présence des perturbations externes. Pour commencer, le signal de référence de vecteur \mathbf{y}_d et le vecteur d'erreur \mathbf{e} sont définis comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_d &= [y_d, y_d^{(q)}, y_d^{(2q)}, \dots, y_d^{((n-1)q)}]^T \in \mathbf{R}^n \\ \mathbf{e} &= \mathbf{y}_d - \mathbf{y} = [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in \mathbf{R}^n \\ \mathbf{e}^{(iq)} &= \mathbf{y}_d^{(iq)} - \mathbf{y}^{(iq)} \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \in \mathbf{R}^n$ est choisi de telle sorte que l'état stable $|\arg(\text{eig}(A))| > q\pi/2$ est satisfait, où $0 < q < 1$ et $\text{eig}(A)$ représente les valeurs propres de la matrice d'état du système donnée par la suite.

i). Si les fonctions $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont connues avec la perturbation externe $d(t)$ est nulle, alors la loi de commande donnée par la forme suivante [82, 27] :

$$u_{eq} = \frac{1}{g(\mathbf{x}, t)} \left(-f(\mathbf{x}, t) + y_d^{(nq)} + \mathbf{k}^T \mathbf{e} \right) \quad (3.3)$$

En substituant (3.3) dans (3.2) on trouve [28] :

$$e^{nq} = k_n e^{(n-1)q} + \dots + k_1 e = 0 \quad (3.4)$$

qui implique que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ qui est l'un des objectifs de la commande proposée.

ii). Cependant, Si les fonctions $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont inconnues avec la perturbation externe $d(t)$ est non nulle ($d(t) \neq 0$), l'effort de commande idéal (3.3) ne peuvent pas être mis en œuvre (non réalisable). On remplace $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ par les systèmes flous $f(\mathbf{x}, \theta_f)$ et $g(\mathbf{x}, \theta_g)$ spécifiées comme :

$$f(\mathbf{x}, \theta_f) = \theta_f^T \xi(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

$$g(\mathbf{x}, \theta_g) = \theta_g^T \xi(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

Avec $\xi(\mathbf{x})$ est un vecteur de fonctions floues de base supposé convenablement fixé en avance par l'utilisateur, θ_f et θ_g sont les vecteurs de paramètres ajustés par des lois d'adaptation sur la base d'un critère de stabilité de Lyapunov.

Par conséquent, l'effort de contrôle qui en résulte peut être obtenu comme [82, 84] :

$$u = \frac{1}{g(\mathbf{x}, \theta_g)} \left(-f(\mathbf{x}, \theta_f) + y_d^{(nq)} + \mathbf{k}^T e - u_a \right) \quad (3.7)$$

Où le compensateur robuste (terme H^∞) u_a est utilisé pour atténuer la perturbation externe et les erreurs d'approximation floue. En substituant (3.7) à (3.2) on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(nq)} &= f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u + d(t) + g(\mathbf{x}, \theta_g)u - g(\mathbf{x}, \theta_g)u \\ &= [f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, \theta_f)] + y_d^{(nq)} + \mathbf{k}^T e - u_a \\ &+ [g(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x}, \theta_g)]u + d(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

alors

$$\mathbf{e}^{(nq)} + [f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, \theta_f)] + y_d^{(nq)} - u_a + [g(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x}, \theta_g)]u = 0 \quad (3.9)$$

L'équation (3.9) peut être réécrite comme représentation d'état

$$\mathbf{e}^{(q)} = A\mathbf{e} + B[-f(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, \theta_f) + u_a + (-g(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, \theta_g))u - d(t)] = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & \dots & -k_{(n-1)} & -k_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and,} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tant que $(|sI - A| = s^{(n)} + k_1 s^{(n-1)} + \dots + k_n)$ est stable (A stable).

Le vecteur des paramètres optimaux θ_f^* et θ_g^* est défini par :

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} \left[\sup_{x \in \Omega_x} |f(\mathbf{x} | \theta_f) - f(\mathbf{x}, t)| \right] \quad (3.11)$$

$$\theta_g^* = \arg \min_{\theta_g \in \Omega_g} \left[\sup_{x \in \Omega_x} |g(\mathbf{x} | \theta_g) - g(\mathbf{x}, t)| \right] \quad (3.12)$$

où Ω_f, Ω_g et Ω_x sont des ensembles de contraintes pour θ_f, θ_g et x respectivement, définies comme :

$$\begin{aligned} \Omega_f &= \{ \theta_f \mid |\theta_f| \leq M_f \} \\ \Omega_g &= \{ \theta_g \mid |\theta_g| \leq M_g \} \\ \Omega_x &= \{ x \mid |x| \leq M_x \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

où M_f, M_g et M_x sont des constantes positives.

En utilisant (3.11) - (3.12), l'équation de l'erreur dynamique (3.10) peut être exprimée comme :

$$\mathbf{e}^{(q)} = A\mathbf{e} + B \left[f(\mathbf{x}, \theta_f) - f(\mathbf{x}, \theta_f^*) + u_a + (g(\mathbf{x}, \theta_g) - g(\mathbf{x}, \theta_g^*)) u - d(t) + \omega \right] \quad (3.14)$$

Où l'erreur d'approximation minimale est définie comme suit :

$$\omega = [-f(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, \theta_f^*)] + [-g(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, \theta_g^*)] u - d(t) \quad (3.15)$$

Si l'on définit les erreurs, $\tilde{\theta}_f = \theta_f - \theta_f^*$ et $\tilde{\theta}_g = \theta_g - \theta_g^*$,

alors (3.14) peut être réécrite comme

$$\mathbf{e}^{(q)} = A\mathbf{e} + B \left[\xi(\mathbf{x})^T \tilde{\theta}_f + \xi(\mathbf{x})^T \tilde{\theta}_g u + u_a + \omega \right] \quad (3.16)$$

Après la considération précédente, le théorème (3.1) peut être obtenu [24, 82].

3.4 Analyse de la stabilité

Théorème 3.1. *Considérons le système SISO non linéaire d'ordre fractionnaire (3.2) et la loi de commande (3.7) si le compensateur robuste u_a et les bases floues sur les lois d'adaptation sont choisis comme suit :*

$$u_a = -\frac{1}{r} B^T P \mathbf{e} \quad (3.17)$$

$$\theta_f^{(q)} = -r_1 \xi(\mathbf{x}) B^T P \mathbf{e} \quad (3.18)$$

$$\theta_g^{(q)} = -r_2 \xi(\mathbf{x}) B^T P \mathbf{e} u \quad (3.19)$$

où r, r_1 et r_2 sont des constantes positives, et $P = P^T$ est la solution de l'équation de Riccati suivante :

$$PA + A^T P + Q - PB \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\rho^2} \right) B^T P = 0 \quad (3.20)$$

Avec $Q = Q^T > 0$ est une matrice symétrique arbitraire définie positive de dimensions $(n \times n)$. Ainsi, la performance de poursuite H^∞ peut être réalisée pour un niveau d'atténuation donné ρ qui satisfait $2\rho^2 \geq r$ et toutes les variables du système en boucle fermée sont bornées [84].

Preuve. Afin d'analyser la stabilité en boucle fermée, la fonction de Lyapunov est choisie comme :

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) P \mathbf{e}(t) + \frac{1}{2r_1} (\tilde{\theta}_f^T) (\tilde{\theta}_f) + \frac{1}{2r_2} (\tilde{\theta}_g^T) (\tilde{\theta}_g) \quad (3.21)$$

La dérivée d'ordre fractionnaire de (3.21) par rapport au temps, nous obtenons [82] :

$$\begin{aligned} V^{(q)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}^{(q)}(t))^T P \mathbf{e}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) P \mathbf{e}(t) + \frac{1}{r_1} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f^{(q)} + \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g^{(q)} \\ &= \frac{1}{2} \left(A \mathbf{e} + B \left[\xi(\mathbf{x})^T \tilde{\theta}_f + \xi(\mathbf{x})^T \tilde{\theta}_g u + u_a + \omega \right] \right)^T P \mathbf{e} \\ &+ \frac{1}{r_1} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f^{(q)} + \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g^{(q)} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (A^T P + P A) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T P B u_a + \mathbf{e}^T P B \omega \\ &+ \left(\tilde{\theta}_f^T \left[\xi(\mathbf{x}) B^T P \mathbf{e} + \frac{1}{r_1} \tilde{\theta}_f^{(q)} \right] \right) \\ &+ \left(\tilde{\theta}_g^T \left[\xi(\mathbf{x}) B^T P \mathbf{e} u + \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_g^{(q)} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le terme de robustesse u_a et les lois d'adaptation (3.17), la dérivée $V^{(q)}(t)$ dans (3.22) est réécrite comme :

$$\begin{aligned} V^{(q)}(t) &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} - \frac{1}{2\rho^2} \mathbf{e}^T P B B^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T P B \omega \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} B^T P \mathbf{e} - \rho \omega \right)^T \left(\frac{1}{\rho} B^T P \mathbf{e} - \rho \omega \right) + \frac{1}{2} \rho^2 \omega^T \omega \\ &\leq -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \frac{1}{2} \rho^2 \omega^T \omega \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'intégration (3.23) à partir de $t = 0$ à $t = T$,

$$V(T) - V(0) \leq -\frac{1}{2} \int_0^T \left(\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \frac{1}{2} \rho^2 \omega^T \omega \right) dt \quad (3.24)$$

Puisque $V(T) \geq 0$, (3.24) peut être réécrite comme suit :

$$\int_0^T \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} dt \leq \mathbf{e}^T(0) P \mathbf{e}(0) + \theta^T(0) \theta(0) + \rho^2 \int_0^T \omega^T \omega dt \quad (3.25)$$

Par conséquent, la performance de poursuite de l'approche H^∞ peut être réalisée.

□

3.5 Algorithme de la technique proposée

Etape 1 - Définition des m_i ensembles flous F_i^l dont les fonctions d'appartenance sont $\mu_{F_i^l(x_i)}$, où $i = 1, 2, \dots, n$. Et spécifiquement, les règles floues de base des $f(\mathbf{x}, \theta_f)$ et $g(\mathbf{x}, \theta_g)$ sont constituées comme règles de la forme :

$$R_f^{(l)} : IF \ x_1 \text{ is } F_1^l, \text{ and, } \dots, \text{ and } x_n \text{ is } F_n^l \text{ THEN } f(\mathbf{x}, \theta_f) \text{ is } G^l \quad (3.26)$$

$$R_g^{(l)} : IF \ x_1 \text{ is } F_1^l, \text{ and, } \dots, \text{ and } x_n \text{ is } F_n^l \text{ THEN } g(\mathbf{x}, \theta_g) \text{ is } H^l \quad (3.27)$$

où $l = 1, 2, \dots, m_i$ et G^l et H^l sont des ensembles flous dans \mathbf{R}^l [132].

Construction des fonctions floues de base comme dans (??).

Etape 2 - Spécification d'une matrice Q symétrique définie positive. Et la résolution de l'équation de Lyapunov, pour obtenir la matrice symétrique $p > 0$.

Etape 3 - Spécification des \mathbf{k}_i , telles que les racines de $s^{(n)} + k_1 s^{(n-1)} + \dots + k_n = 0$ soient dans le demi-plan gauche.

Etape 4 - Résolution de l'équation de Riccati donnée comme [24] :

$$PA + A^T P + Q - PB \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\rho^2} \right) B^T P = 0$$

Etape 5 - Enfin l'obtention de la loi de commande globale (3.7).

$$u = \frac{1}{g(\mathbf{x}, \theta_g)} \left(-f(\mathbf{x}, \theta_f) + y_d^{(nq)} + \mathbf{k}^T e - u_a \right)$$

En prenant avec considération le terme robuste H^∞ et les lois d'adaptation (3.17).

$$u_a = -\frac{1}{r} B^T P \mathbf{e}$$

$$\theta_f^{(q)} = -r_1 \xi(\mathbf{x}) B^T P \mathbf{e}$$

$$\theta_g^{(q)} = -r_2 \xi(\mathbf{x}) B^T P \mathbf{e} u.$$

3.6 Exemple illustratif

Dans cette section, on applique la stratégie de commande adaptative floue H^∞ pour la synchronisation des deux différents systèmes chaotiques de Duffing d'ordre fractionnaire. On considère deux systèmes chaotiques de Duffing d'ordre fractionnaire :

1. Le premier système est un système de référence donné comme :

$$\begin{cases} D^q y_1 = y_2 \\ D^q y_2 = y_1 - 0.25y_2 - y_1^3 + 0.3 \cos(t) \end{cases} \quad (3.28)$$

2. Le second est un système de réponse (de commande) donné par :

$$\begin{cases} D^q x_1 = x_2 \\ D^q x_2 = x_1 - 0.3x_2 - x_1^3 + 0.35 \cos(t) + u(t) + d(t) \end{cases} \quad (3.29)$$

Où la perturbation externe donnée comme $d(t) = 0.1 \sin(t)$.

L'objectif principal est de commander notre système de réponse pour suivre le système de référence, avec les fonctions $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont totalement inconnues.

Les conditions initiales sont choisies comme suit : $y(0) = [0, 0]^T$ et $x(0) = [0.2, -0.2]^T$ respectivement. On considère dans ce cas deux valeurs différentes de $q = 0.95$ et $q = 0.98$ pour tester la robustesse de la commande proposée. Pour les autres constantes de conception, elle sont fixées comme suit : $k_1 = k_2 = 1$, $r_1 = 100$, $r_2 = 40$, $r = 0.005$, $\rho = 0.05$, le pas $h = 0.001$.

Les figures (3.1) et (3.8) ci-dessous illustrent respectivement les résultats de simulation sans l'application de notre loi de commande :

i). Pour $q = 0.95$ nous avons les résultats suivants :

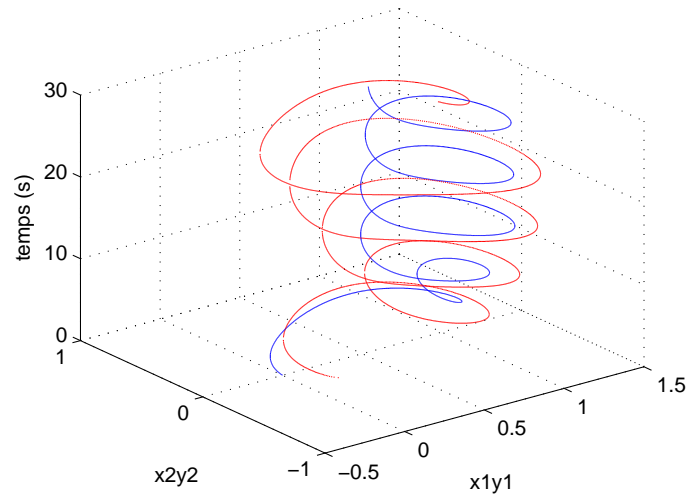


FIGURE 3.1: Plan de phase des trajectoires des systèmes chaotiques sans l'action de commande.

Chacune des fonctions $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ est représentée par un système flou, et chaque système flou a comme entrée x_1 et x_2 . le système flou est utilisé avec les entrées x_1 et x_2 car la forme de la fonction est inconnue. Pour chaque variable d'entrée, on définit sept fonctions d'appartenance de type gaussienne comme suit :

$$\mu_{F_i^l}(x_i) = \exp\left(-0.5 \left(\frac{x_i - \bar{x}}{0.8}\right)^2\right), \quad i = 1, 2 \text{ et } l = 1, \dots, 7$$
 avec \bar{x} est choisi dans l'intervalle $[-1, 2]$. On applique la loi de commande globale (3.7) comme suit :

$$u(t) = \frac{1}{\xi^T(\mathbf{x})\theta_g} \left(-\xi^T(\mathbf{x})\theta_f + y_d^{(nq)} + \mathbf{k}^T e - u_a \right)$$

Les figures (3.2-3.7) illustrent respectivement les résultats de simulation avec l'application de l'effort de la commande proposée :

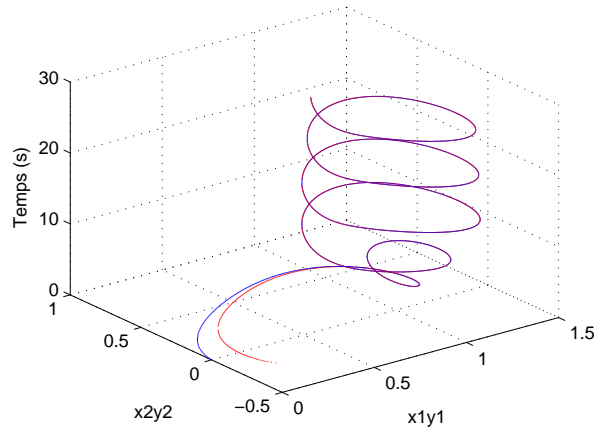


FIGURE 3.2: Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse.

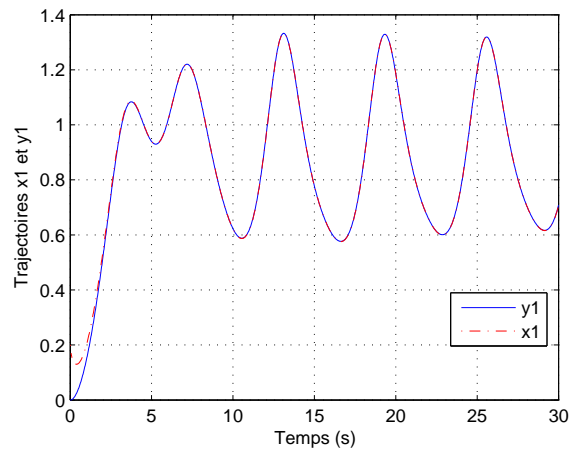


FIGURE 3.3: Trajectoires des états x_1 et y_1 .

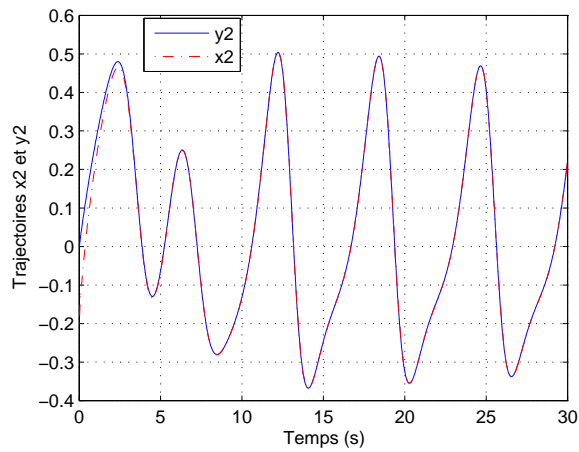


FIGURE 3.4: Trajectoires des états x_2 et y_2 .

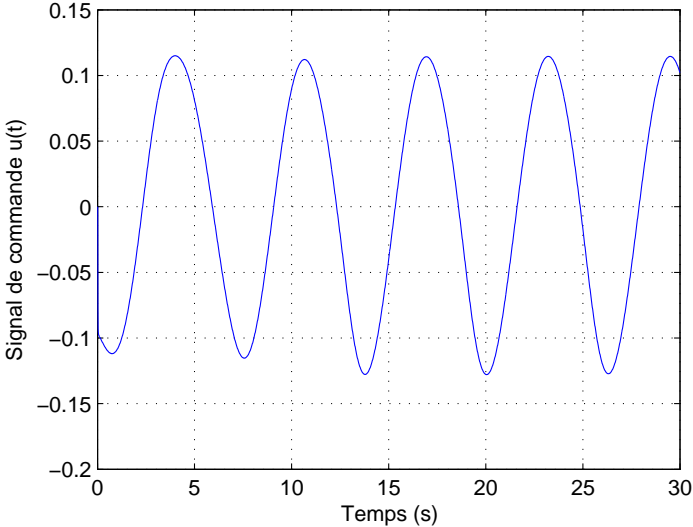


FIGURE 3.5: Signal de commande $u(t)$.

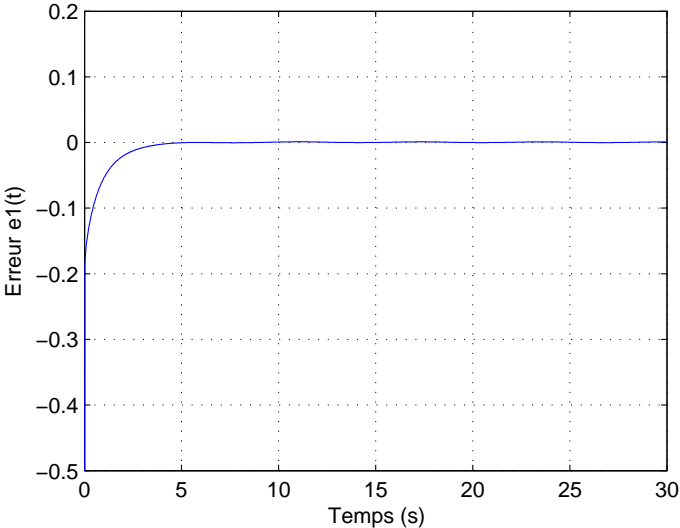


FIGURE 3.6: Signal de l'erreur $e_1(t)$.

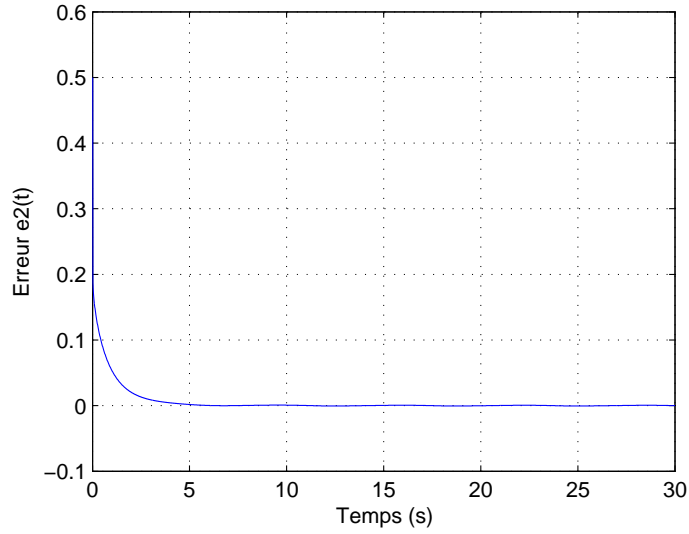


FIGURE 3.7: Signal de l'erreur $e_2(t)$.

ii). Pour $q = 0.98$ nous avons les résultats suivants :

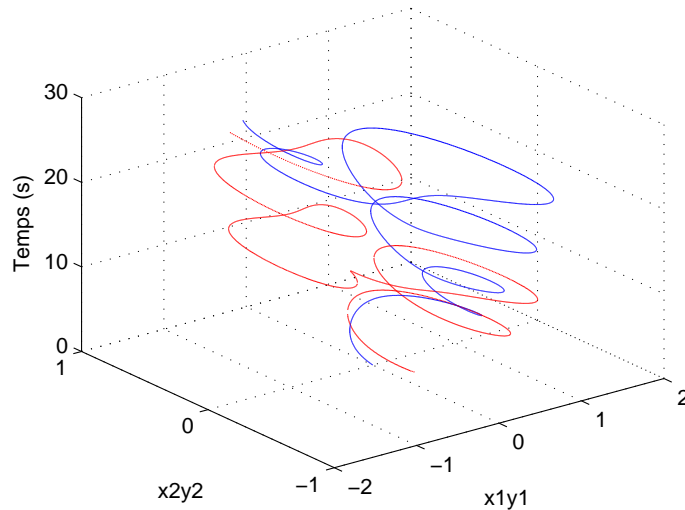


FIGURE 3.8: Plan de phase des trajectoires des systèmes chaotiques sans commande.

Après l'application de notre loi de commande on a les résultats comme (3.9-3.14) :

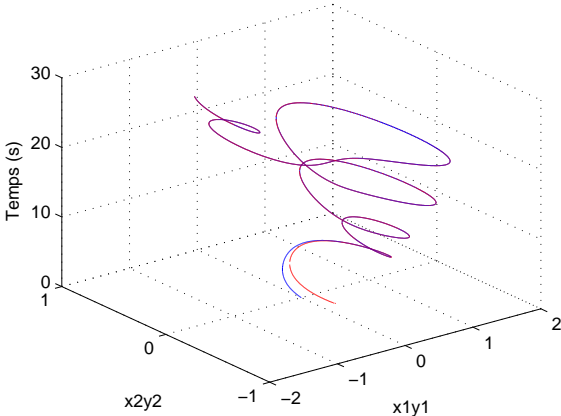


FIGURE 3.9: Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse.

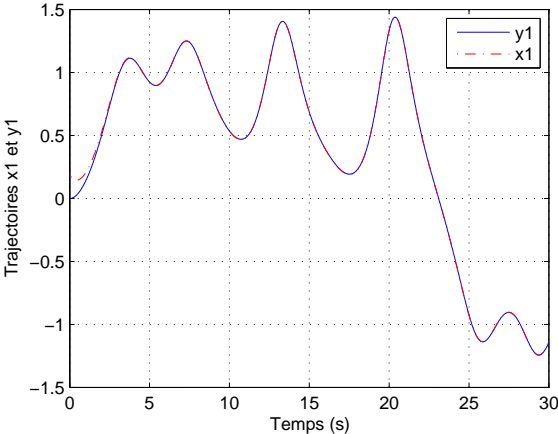


FIGURE 3.10: Trajectoires des états x_1 et y_1 .

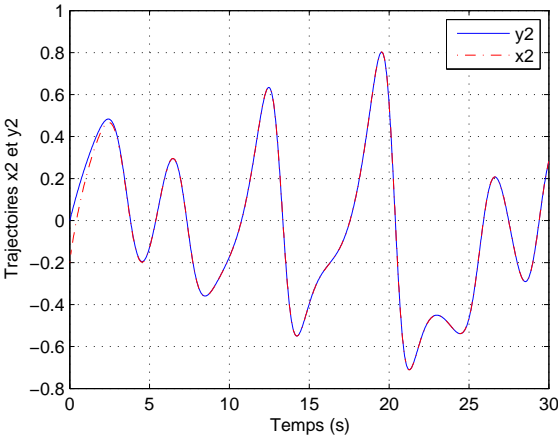


FIGURE 3.11: Trajectoires des états x_2 et y_2 .

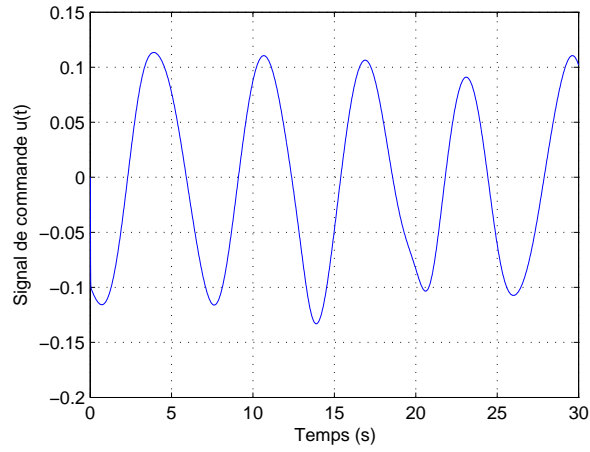


FIGURE 3.12: Signal de commande $u(t)$.

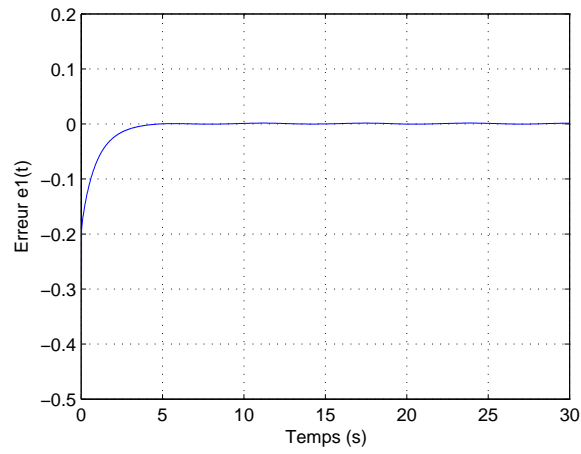


FIGURE 3.13: Signal de l'erreur $e_1(t)$.

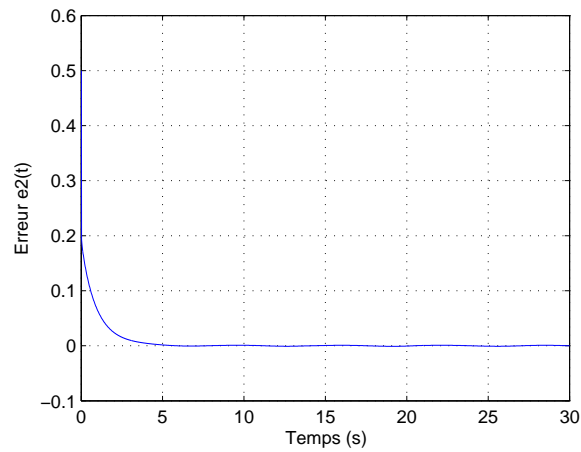


FIGURE 3.14: Signal de l'erreur $e_2(t)$.

Discussion des résultats

- La signification de la commande proposée pour différentes valeurs de q est exprimée.
- Réalisation d'une rapide synchronisation des systèmes de référence et de réponse.
- Pour q est réduit on voit que le chaos est réduit, c.-à-d., l'erreur de synchronisation est réduite, en conséquence.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre une commande adaptative floue H^∞ est proposée pour traiter la synchronisation de chaos entre deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire incertain. En se basant sur l'approche de la synthèse de Lyapunov, des paramètres libres du contrôleur adaptatif flou peuvent être accordés en ligne par la loi de commande de feedback et les lois d'adaptation.

Un exemple de simulation de la synchronisation de chaos de deux systèmes d'ordre fractionnaire de Duffing est donné pour démontrer l'efficacité de la méthodologie proposée.

La signification du schéma de commande proposé dans la simulation pour différentes valeurs de q est manifeste pour tester la robustesse. Les résultats de simulation prouvent qu'une synchronisation rapide entre le système de commande et la réponse peut être réalisée, et pendant la valeur de q est réduite on voit que le chaos est réduit, c.-à-d., l'erreur de synchronisation est réduite, en conséquence.

Chapitre 4

Commande Adaptative floue par mode glissant des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, une stratégie de commande adaptative indirecte par logique floue (CALF), basée sur la théorie robuste de mode glissant est considérée pour synchroniser deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Les systèmes flous sont utilisés pour rapprocher (ou approximer) les fonctions inconnues du système fractionnaire.

L'une des principales contributions de ce chapitre est l'utilisation d'un régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ dans la loi de commande pour éliminer (ou éviter) l'action de chattering dans le signal de commande et de surface de glissement. On se basant sur l'extension du critère de stabilité de Lyapunov au cas fractionnaire, l'analyse de stabilité est réalisée par la technique proposée pour un taux d'erreur de synchronisation acceptable.

Un exemple illustratif est donné pour montrer l'efficacité du système de commande proposé. Les simulations sont mises en œuvre en utilisant une méthode numérique basée sur l'approche Grünwald-Letnikov pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaires.

En outre, nous nous intéressons dans ce chapitre au problème de la commande et la syn-

chronisation de deux systèmes chaotiques incertains d'ordre fractionnaire en incorporant un algorithme adaptatif flou via mode glissant, où une méthode d'approximation floue est utilisée pour modéliser le système incertain d'ordre fractionnaire [64]. Sur la base du théorème de stabilité de Lyapunov, un algorithme efficace de commande adaptative floue est proposé qui garantit la stabilité du système de commande et atténue l'influence de l'erreur d'approximation et de la perturbation externe sur l'erreur de poursuite à un niveau arbitrairement prescrit par la technique de conception de poursuite robuste par mode glissant [5].

Une technique de synchronisation améliorée est proposée pour une commande robuste par mode glissant des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire en claquant l'élimination d'une grande incertitude ou une variation inconnue dans les paramètres et les structures du système. La technique donnée combine la technique d'atténuation, la méthode d'approximation par logique floue, et l'algorithme de commande adaptative.

La principale caractéristique de ce travail consiste à combiner une commande adaptative fractionnaire PI^λ avec un contrôleur par mode glissant afin d'éliminer l'action de chattering au signal de commande. La méthode d'approximation numérique de Grünwald-Letnikov est utilisée pour la résolution de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire avec l'amélioration du résultat de performance.

Dans ce chapitre, une nouvelle stratégie de commande robuste indirecte adaptative floue a été proposée pour assurer la stabilité des performances constantes des systèmes non linéaires incertains chaotiques d'ordre fractionnaire. Une commande proportionnelle intégrale PI-fractionnaire est considérée en combinant avec la commande adaptative floue par mode de glissement pour une classe des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire non linéaires inconnus, afin d'éviter le phénomène de chattering et d'offrir une bonne performance de l'état en régime transitoire et permanent ; en outre, on applique la théorie de la synthèse de Lyapunov pour assurer que tous les signaux du système en boucle fermée soient bornés, ainsi que la poursuite de la sortie du système et de référence avec les incertitudes des perturbations soit réalisée [53, 83].

Pour confirmer l'efficacité du schéma de commande proposée, un système de réponse chaotique d'ordre fractionnaire est entièrement illustré pour suivre une trajectoire de sortie d'un système de référence chaotique d'ordre fractionnaire [28]. Les systèmes de commande d'ordre fractionnaire ont montré des performances et des propriétés très intéressantes, et

à cet effet, de nombreuses applications de ces systèmes ont été signalées dans différents domaines tels que le traitement du signal [91], traitement de l'image [108], le contrôle automatique [69, 71], la robotique [34], et l'énergie renouvelable [18].

La synchronisation ou la commande de ces systèmes est une tâche difficile, car l'une des caractéristiques principales des systèmes chaotiques est leur grande sensibilité aux conditions initiales, mais ils recueillent de plus en plus d'efforts de recherche en raison de ses applications potentielles dans la communication sécurisée et de traitement de commande [54].

Pour le cas particulier des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, de nombreuses approches ont été proposées pour réaliser la synchronisation du chaos, comme le contrôle de PC [76], méthode d'observateur de l'état non linéaire [135], la commande adaptative [102, 65], et la commande par mode glissant qui nous intéressera par la suite [50].

4.2 Schéma de commande adaptative floue indirecte par mode glissant d'ordre fractionnaire

On présente maintenant la stratégie de commande adaptative floue proposée, qui permet la synchronisation des deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, c.-à-d., pour forcer la sortie du système de réponse à suivre la trajectoire du système de référence [83]. Considérons le système non linéaire d'ordre fractionnaire donné comme suit [82], [132] :

$$\begin{aligned}
 x_1^{(q_1)} &= x_2 \\
 &\vdots \\
 x_{n-1}^{(q_{n-1})} &= x_n \\
 x_n^{(q_n)} &= f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u + d(t) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ le système ci-dessus est appelé un système d'ordre commensurable, alors, une forme équivalente du système (4.1) est décrit comme :

$$\begin{aligned} x^{(nq)} &= f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u + d(t) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur d'état, $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont des fonctions non linéaires inconnues, mais bornées qui expriment la dynamique du système, $d(t)$ est la perturbation externe donnée bornée, e.g. $|d(t)| \leq D$, et $u(t) \in \mathbf{R}$ est l'entrée de commande.

Le système non linéaire (4.2) est supposé contrôlable et le gain d'entrée $g(\mathbf{x}, t) \neq 0$ doit être non nulle. Par conséquent, et sans perte de généralité, nous supposons que $g(\mathbf{x}, t) > 0$. L'objectif de la commande est de forcer la sortie du système y à suivre un signal de référence donné borné y_d , sous la contrainte que tous les signaux impliqués doivent être bornés. Par souci de simplicité, dans ce chapitre la commande (AFLC) pour un système d'ordre commensurable est proposée, étant donné que la condition de stabilité du système d'ordre incommensurable peut être convertie en condition de stabilité d'un système d'ordre commensurable [54].

Pour commencer, le signal de référence y_d et le vecteur d'erreur e sont définis comme,

$$\mathbf{y}_d = [y_d, y_d^{(q)}, y_d^{(2q)}, \dots, y_d^{((n-1)q)}]^T \in \mathbf{R}^n \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{y}_d - \mathbf{y} = [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in \mathbf{R}^n, \\ e^{(iq)} &= y_d^{(iq)} - y^{(iq)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $0 < q < 1$. Let $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \in \mathbf{R}^n$ est choisi de telle sorte que $h(p) = \sum_{i=1}^n k_i p^{(i-1)q}$, $k_n = 1$ est un polynôme de Hurwitz.

La surface de glissement dans l'espace d'état de l'erreur est définie comme suit :

$$\begin{aligned} s(\mathbf{x}, t) &= -(\mathbf{k}\mathbf{e}) \\ &= -(k_1 e + k_2 e^{(q)} + \\ &\quad \dots + k_{(n-1)} e^{((n-2)q)} + e^{((n-1)q)}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour les conditions initiales nulles $e(0) = 0$, le problème de poursuite $x = y_d$ sera considéré comme le vecteur d'état d'erreur $e(t)$ qui reste sur la surface de glissement $s(\mathbf{e}) = 0$ pour

tous $t \geq 0$.

Le processus de commande par mode glissant peut être classé en deux phases, la phase approchante avec $s(\mathbf{x}, t) \neq 0$ et la phase de glissement (glissante) avec $s(\mathbf{x}, t) = 0$ pour l'erreur initiale $e(0) = 0$. Afin de garantir que la trajectoire du vecteur d'état de l'erreur $e(t)$ se traduira à partir de la phase approchante à la phase de glissement. De ce fait, la commande par mode de glissement est réalisée en deux phases :

1. la phase approchante quand $s(\mathbf{x}, t) \neq 0$, et
2. la phase de glissement par $s(\mathbf{x}, t) = 0$, pour l'erreur initiale $e(0) = 0$.

la condition suivante appelée la condition de glissement :

$$s(\mathbf{x}, t)\dot{s}(\mathbf{x}, t) \leq -\eta |s(\mathbf{x}, t)|, \quad \eta > 0 \quad (4.6)$$

doit être satisfaite.

En l'absence des incertitudes et des perturbations externes correspondantes, la commande équivalente $u_{eq}(t)$, peut être obtenue par $\dot{s}(\mathbf{x}, t) = 0$. Cette dérivée classique plus tard peut être décomposée dans le type fractionnaire comme,

$$\begin{aligned} \dot{s}(\mathbf{x}, t) &= D^{(1-q)} (D^q (s(\mathbf{x}, t))) = 0 \\ \text{then } D^q (s(\mathbf{x}, t)) &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si les fonctions $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont connues et le système est libre de la perturbation externe i.e., $d(t) = 0$. En prenant la dérivée de la surface de glissement par rapport au temps, nous obtenons :

$$\begin{aligned} s^{(q)} &= - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + e^{(nq)} \right) \\ &= - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + y_d^{(nq)} - y^{(nq)} \right) \\ &= - \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - f(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x}, t)u_{eq} \right) - y_d^{(nq)} \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u_{eq} - y_d^{(nq)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Par conséquent, la loi de commande équivalente peut être obtenue comme

$$u_{eq} = \frac{1}{g(\mathbf{x}, t)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - f(\mathbf{x}, t) + y_d^{(nq)} \right) \quad (4.9)$$

en substituant (4.9) dans (4.2), on obtient

$$e^{(nq)} + k_n e^{((n-1)q)} + \dots + k_1 e = 0 \quad (4.10)$$

donc, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ qui est l'objectif principal de la commande.

Au contraire, dans la phase approchante $s(\mathbf{x}, t) \neq 0$, un type s'approchant de commande u_{sw} doit être ajouté afin de satisfaire à la condition suffisante (4.6) donc la commande globale par mode de glissement sera exprimée comme :

$$u_i = u_{eq} - u_{sw}, \quad (4.11)$$

avec

$$u_{sw} = \frac{1}{g(\mathbf{x}, t)} (\psi_p \text{sgn}(s)) \quad (4.12)$$

où $\psi_p \geq \eta > 0$ et,

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & \text{for } s > 0 \\ 0, & \text{for } s = 0 \\ -1, & \text{for } s < 0 \end{cases}$$

Par conséquent, la loi de commande globale par mode glissant peut être obtenue comme :

$$u^* = \frac{1}{g(\mathbf{x}, t)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - f(\mathbf{x}, t) + y_d^{(nq)} - \psi_p \text{sgn}(s) \right) \quad (4.13)$$

Nous pouvons montrer en prenant une fonction candidate de Lyapunov définie comme :

$$V = \frac{1}{2} s^2(\mathbf{e}) \quad (4.14)$$

Et, la dérivée de (4.14) de l'ordre fractionnaire q par rapport au temps, $V^{(q)}(t)$ le long de la trajectoire d'un système, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V^{(q)} &= s s^{(q)} = s \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + e^{(nq)} \right) \\ &= -s \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} - y_d^{(nq)} + y^{(nq)} \right) \\ &= -s \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t) u_{eq} - y_d^{(nq)} \right) \\ &\leq -\eta |s(\mathbf{x}, t)| \end{aligned} \quad (4.15)$$

Par conséquent, la commande par mode glissant u^* garantit la condition de glissement (4.6).

Cependant, comme mentionné dans [53], les fonctions $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont généralement inconnues dans la pratique et il est difficile d'appliquer la loi de commande (4.13) pour un système non linéaire inconnu. En outre, le problème de chattering apparaît lors de l'ajout du terme de la commande de commutation u_{sw} .

Pour résoudre ce problème, nous considérons la commande adaptative par mode glissant en utilisant un système flou et une loi de commande PI^λ adaptative d'ordre fractionnaire pour éviter ce phénomène du chattering.

L'entrée et la sortie du contrôleur PI^λ d'ordre fractionnaire en temps continu, où $\lambda = q$, sont données sous la forme :

$$u_{PI} = p(\mathbf{s} \mid \theta_p) = \theta_{p1} z_1 + \theta_{p2} z_2 \quad (4.16)$$

où $z_1 = s$, $z_2 = s^{(q)}$, θ_{p1} et θ_{p2} sont des gains de commande donnés.

L'équation (4.16) doit être réécrite comme :

$$u_{PI} = p(\mathbf{s} \mid \theta_p) = \xi^T(\mathbf{s}) \theta_p \quad (4.17)$$

où $\xi^T(\mathbf{s}) = [s, s^{(q)}] \in \mathbf{R}^2$ et $\theta_p = [\theta_{p1}, \theta_{p2}]^T \in \mathbf{R}^2$ est le vecteur de paramètres ajustables.

La loi de commande résultante, qui comprend un système flou pour approximer les fonctions inconnues $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ et un contrôleur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^q qui atténue le chattering et améliore les performances, donnée comme :

$$u_i = \frac{1}{g(\mathbf{x} \mid \theta_g)} \times \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + y_d^{(nq)} - f(\mathbf{x} \mid \theta_f) - p(\mathbf{s} \mid \theta_p) \right) \quad (4.18)$$

La commande de commutation u_{sw} est remplacée par l'action du contrôleur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^q pour éviter le problème du chattering où l'état est à l'intérieur d'une couche limitée $|s(\mathbf{x}, t)| < \phi$; l'action de commande est maintenue à la valeur saturée lorsque l'état est en dehors de la couche limite.

Par conséquent, on a $|p(\mathbf{s} \mid \theta_p)| = D + \psi_p + \omega_{max}$ lorsque $s(\mathbf{x}, t)$ est située en dehors de la couche limite, c.-à-d., $|s(\mathbf{x}, t)| \geq \phi$, où ϕ est l'épaisseur de cette couche de bornitude.

Pour obtenir la commande par mode de glissement (4.11), les fonctions $f(\mathbf{x}, t)$, $g(\mathbf{x}, t)$ du système et le paramètre de commutation ψ_p doivent être connues à l'avance.

On note que la loi de commande (4.13) est réalisable lorsque $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont bien

connues.

Cependant, $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont inconnues et la perturbation externe $d(t) \neq 0$, l'effort de la commande idéale (4.13) ne peut pas être mise en oeuvre (n'est pas réalisable). On remplace $f(\mathbf{x}, t)$, $g(\mathbf{x}, t)$ et u_{sw} par les systèmes flous $f(\mathbf{x} | \theta_f)$, $g(\mathbf{x} | \theta_g)$ et $p(\mathbf{s} | \theta_p)$ sous les formes spécifiées comme, (Equ-sys-flou-chap1), c.-à-d.,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} | \theta_f) &= \xi^T(\mathbf{x})\theta_f \\ g(\mathbf{x} | \theta_g) &= \xi^T(\mathbf{x})\theta_g \\ p(\mathbf{s} | \theta_p) &= \xi^T(\mathbf{s})\theta_p \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ici, les fonctions floues de base $\xi^T(\mathbf{x})$ et $\xi^T(\mathbf{s})$ dépendent des fonctions d'appartenance floues et sont censées être fixes, tant que θ_f , θ_g et θ_p sont ajustées par les lois d'adaptation basées sur le critère de stabilité de Lyapunov [82].

Les vecteurs des paramètres optimaux θ_f^* , θ_g^* et θ_p^* sont définis par :

$$\begin{aligned} \theta_f^* &= \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} \left[\sup_{x \in \Omega_x} |f(\mathbf{x} | \theta_f) - f(\mathbf{x}, t)| \right] \\ \theta_g^* &= \arg \min_{\theta_g \in \Omega_g} \left[\sup_{x \in \Omega_x} |g(\mathbf{x} | \theta_g) - g(\mathbf{x}, t)| \right] \\ \theta_p^* &= \arg \min_{\theta_p \in \Omega_p} \left[\sup_{s \in \Omega_x} |p(\mathbf{s} | \theta_p) - u_{sw}| \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

où Ω_f , Ω_g , Ω_p et Ω_x sont des ensembles de contraintes pour θ_f , θ_g , θ_p et x respectivement et elles sont définies comme : $\Omega_f = \{\theta_f | |\theta_f| \leq M_f\}$, $\Omega_g = \{\theta_g | |\theta_g| \leq M_g\}$, $\Omega_p = \{\theta_p | |\theta_p| \leq M_p\}$ et $\Omega_x = \{x | |x| \leq M_x\}$ où M_f , M_g , M_p et M_x sont des constantes positives.

En supposant que les paramètres flous θ_f , θ_g et θ_p est jamais atteindre les limites.

Définissons l'erreur d'approximation minimum,

$$\omega = [f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x} | \theta_f^*)] + [g(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x} | \theta_g^*)] u_i \quad (4.21)$$

et de définir les erreurs, $\tilde{\theta}_f = \theta_f - \theta_f^*$, $\tilde{\theta}_g = \theta_g - \theta_g^*$ et $\tilde{\theta}_p = \theta_p - \theta_p^*$,

Alors, les équations de la surface de glissement (4.8) peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned} s^{(q)} &= \omega + [f(\mathbf{x} | \theta_f^*) - f(\mathbf{x} | \theta_f)] + \\ &\quad [g(\mathbf{x} | \theta_g^*) - g(\mathbf{x} | \theta_g)] u_i - \\ &\quad p(\mathbf{s} | \theta_p) + p(\mathbf{s} | \theta_p^*) - p(\mathbf{s} | \theta_p^*) + d(t) \\ &= \omega - \tilde{\theta}_f^T \xi(\mathbf{x}) - \tilde{\theta}_g^T \xi(\mathbf{x}) u_i - \\ &\quad \tilde{\theta}_p^T \xi(\mathbf{s}) - p(\mathbf{s} | \theta_p^*) + d(t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.3 Analyse de la stabilité

Le théorème suivant établit la stabilité asymptotique du système de commande proposé.

Théorème 4.1. *Considérons le système d'ordre fractionnaire SISO non linéaire (4.2) avec l'entrée de commande (4.18), si les lois d'adaptation floues sont choisies comme :*

$$\begin{aligned}\theta_f^{(q)} &= r_1 s \xi(\mathbf{x}), \\ \theta_g^{(q)} &= r_2 s \xi(\mathbf{x}) u_i, \\ \theta_p^{(q)} &= r_3 s \xi(\mathbf{s})\end{aligned}\tag{4.23}$$

où r_1 , r_2 et r_3 sont des constantes positives, alors, le schéma global d'adaptation assure la stabilité globale du système en boucle fermée résultant en ce sens que l'erreur de poursuite converge asymptotiquement autour de zéro et tous les variables du système en boucle fermée sont bornées.

Proof. Afin d'analyser la stabilité en boucle fermée, la fonction candidate de Lyapunov est choisie comme :

$$V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2r_1} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f + \frac{1}{2r_2} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g + \frac{1}{2r_3} \tilde{\theta}_p^T \tilde{\theta}_p\tag{4.24}$$

En prenant la dérivée de (4.24) par rapport au temps, et à partir du Lemme de la dérivée de Caputo [2] et [35, 77] nous obtenons :

$$V^{(q)} \leq s s^{(q)} + \frac{1}{r_1} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f^{(q)} + \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g^{(q)} + \frac{1}{r_3} \tilde{\theta}_p^T \tilde{\theta}_p^{(q)}\tag{4.25}$$

so

$$\begin{aligned}V^{(q)} &\leq s \left(\omega - \tilde{\theta}_p^T \xi(s) - \tilde{\theta}_f^T \xi(\mathbf{x}) - \right. \\ &\quad \left. \tilde{\theta}_g^T \xi(\mathbf{x}) u_i - p(\mathbf{s} | \theta_p^*) + d(t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{r_1} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f^{(q)} + \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g^{(q)} + \frac{1}{r_3} \tilde{\theta}_p^T \tilde{\theta}_p^{(q)}\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
 V^{(q)} &\leq s\omega - s\tilde{\theta}_p^T \xi(\mathbf{s}) - s\tilde{\theta}_f^T \xi(x) - s\tilde{\theta}_g^T \xi(\mathbf{x})u_i - \\
 &\quad sp(\mathbf{s} \mid \theta_p^*) + sd(t) \\
 &\quad + \frac{1}{r_1} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f^{(q)} + \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g^{(q)} + \\
 &\quad \frac{1}{r_3} \tilde{\theta}_p^T \tilde{\theta}_p^{(q)} \\
 &\leq \frac{1}{r_1} \tilde{\theta}_f^T \left(\tilde{\theta}_f^{(q)} - r_1 s \xi(\mathbf{x}) \right) + \\
 &\quad \frac{1}{r_2} \tilde{\theta}_g^T \left(\tilde{\theta}_g^{(q)} - r_2 s \xi(\mathbf{x}) u_i \right) + \\
 &\quad \frac{1}{r_3} \tilde{\theta}_p^T \left(\tilde{\theta}_p^{(q)} - r_3 s \xi(\mathbf{s}) \right) - \\
 &\quad s(D + \eta) \operatorname{sgn}(s) + sd(t) + s\omega
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

En considérant le compensateur robuste fractionnaire (4.18) et les lois d'adaptations floues d'ordre fractionnaire (4.23), on obtient après une simple manipulation :

$$V^{(q)} \leq s\omega - s\psi_p \operatorname{sgn}(s) = s\omega - |s|\psi_p \leq 0. \tag{4.28}$$

Depuis ω , l'erreur d'approximation minimum, (4.28) est le meilleur résultat que nous pouvons obtenir. Par conséquent, tous les signaux dans le système sont bornés. De toute évidence, si $e(0)$ est bornée, alors $e(t)$ est également bornée pour tout $t \rightarrow \infty$. Etant donné que le signal de référence \mathbf{y}_d soit borné, alors les états du système \mathbf{x} sont bornés ainsi.

Pour compléter la preuve et d'établir la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite, nous avons besoin de prouver que $s \rightarrow 0$ que $t \rightarrow \infty$. En outre, supposons que $\|s\| \leq \psi_s$, alors (4.28) peuvent être réécrites comme :

$$V^{(q)} \leq \psi_s |\omega| - |s|\psi_p \tag{4.29}$$

L'intégration des deux côtés de (4.29), nous avons :

$$\int_0^T |s| d\tau \leq \frac{1}{\psi_p} (|V(0)| + |V(T)|) + \frac{\psi_s}{\psi_p} \int_0^T |\omega| d\tau \tag{4.30}$$

alors nous avons $s \in L_1$. La forme (4.28), nous avons que $s(t)$ est bornée et chaque terme (4.28) est borné. La continuité uniforme de la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville (section 2.3.1.2), et son bornitude de (4.22) permettent d'appliquer le *lemme de Barbalat* [121] et l'extensions de ce Lemme dans le cas fractionnaire [43]. Par conséquent, $s, s^{(q)} \in L_\infty$. Nous avons $s(t) \rightarrow 0$ que $t \rightarrow \infty$, et à partir de (4.5) l'erreur de poursuite $e(t)$ converge vers zéro, ce qui prouve que le système est stable en boucle fermée.

□

4.4 Exemple illustratif

Dans cette section, nous allons appliquer notre contrôleur adaptatif flou via mode glissant pour synchroniser deux systèmes différents de Duffing chaotiques d'ordre fractionnaire. Les comportements chaotiques dans un système de Duffing modifié d'ordre fractionnaire étudié numériquement par des portraits de phase sont donnés dans [46].

Considérons les deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing* (voir des exemples similaires dans [84, 54]) :

Le premier système de référence donné par :

$$\begin{aligned} D^q y_1 &= y_2 \\ D^q y_2 &= y_1 - 0.25y_2 - y_1^3 + 0.3 \cos(t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Le deuxième système de réponse (de commande) donné par :

$$\begin{aligned} D^q x_1 &= x_2 \\ D^q x_2 &= x_1 - 0.3x_2 - x_1^3 + 0.35 \cos(t) + u(t) + d(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

où, $d(t) = 0.1 \sin(t)$ est la perturbation externe. Dans ce chapitre on considère l'ordre fractionnaire $q = 0.98$. L'objectif principal est de commander la trajectoire du système de réponse pour suivre la trajectoire du système de référence obtenue à partir du système de commande.

Les conditions initiales des systèmes (réponse et référence) sont choisies comme suit :

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ respectivement.}$$

Selon les deux plages de sortie des états, les fonctions d'appartenance de x_i for $f(x | \theta_f)$ et $g(x | \theta_g)$ sont sélectionnées comme [82] :

$$\mu_{F_i^l}(x_i) = \exp \left[-0.5 \left(\frac{x_i - \bar{x}}{0.8} \right)^2 \right] \quad (4.33)$$

où $i = 1, 2$ et $l = 1, \dots, 7$, et \bar{x} est choisi dans l'intervalle $[-1, 2]$.

A partir des lois d'adaptation (4.23) et le terme de commande robuste (4.17), la loi de

commande (4.18) du système de réponse peut être obtenue comme suit :

$$u = \frac{1}{g(\mathbf{x} | \theta_g)} \times \left[\sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(iq)} + y_d^{(nq)} - f(\mathbf{x} | \theta_f) - p(\mathbf{s} | \theta_p) \right] \quad (4.34)$$

La spécification des paramètres de simulation donnée comme : $\mathbf{k} = [1; 1]$, $r_1 = 200$, $r_2 = 40$, $r_3 = 10$, l'axe crénneau du temps de simulation $T = 30s$ et le pas d'échantillonnage $\Delta = 0.001s$; Les résultats de simulation sont illustrés comme suit :

Fig. 4.1 montre le plan de phase 3D des systèmes de réponse et de référence avant l'application de notre loi de commande proposée. Il est évident que la performance de synchronisation est très mauvaise à cette initiale étape.

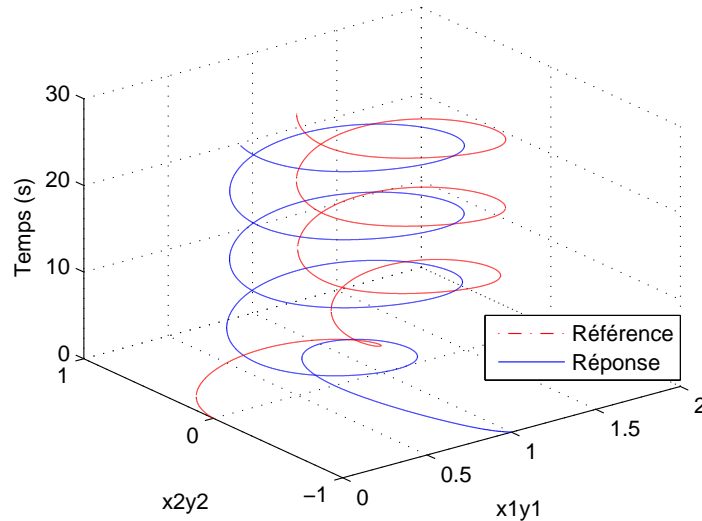


FIGURE 4.1: Portrait de phase des systèmes chaotiques de Duffing (réponse et références) sans action de commande.

4.4.1 Etape 1 : Commande par mode glissant d'ordre fractionnaire

Fig. 4.2 montre la trajectoire de synchronisation après l'introduction de la loi de commande proposée : nous pouvons remarquer une synchronisation rapide et parfaite des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire (référence et réponse). Fig. 4.3 et Fig. 4.4 montrent les trajectoires des états x_1 , y_1 et x_2 , y_2 , respectivement. La surface de glissement est représentée dans Fig. 4.5 et la trajectoire de l'effort de commande est donnée dans Fig. 4.6.

Les Fig. 4.7 et Fig. 4.8 illustrent la convergence rapide de la sortie du système de réponse au système de référence. Cependant, le phénomène des chattering apparaît comme un gros inconvénient pour cette stratégie de commande, comme il est illustré dans la surface de glissement et la trajectoire de la commande : Fig. 4.5 et Fig. 4.6, respectivement.

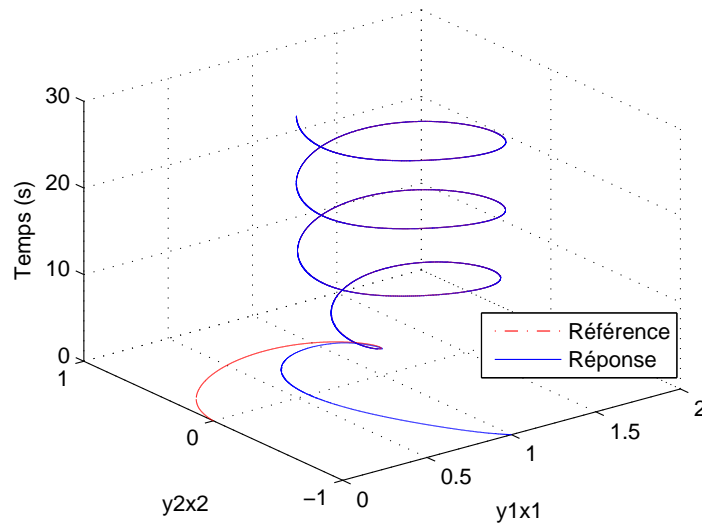


FIGURE 4.2: Performance de synchronisation du signal de référence et de réponse.

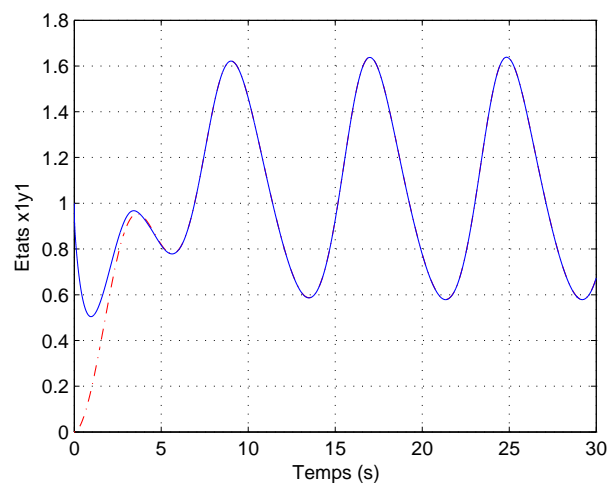


FIGURE 4.3: Trajectoires des états x_1 et y_1 .

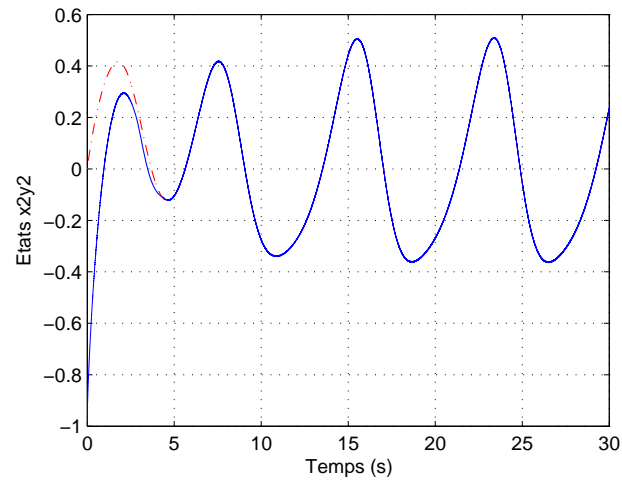
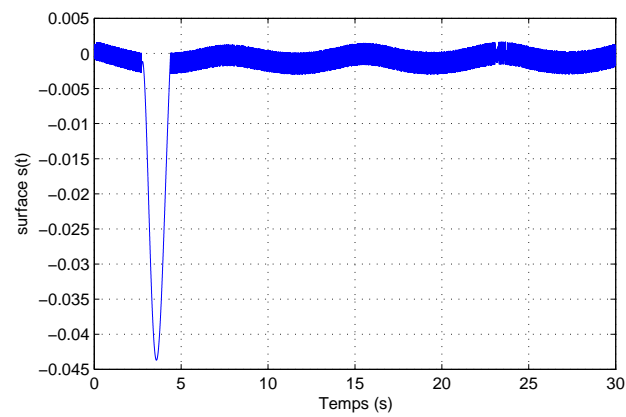
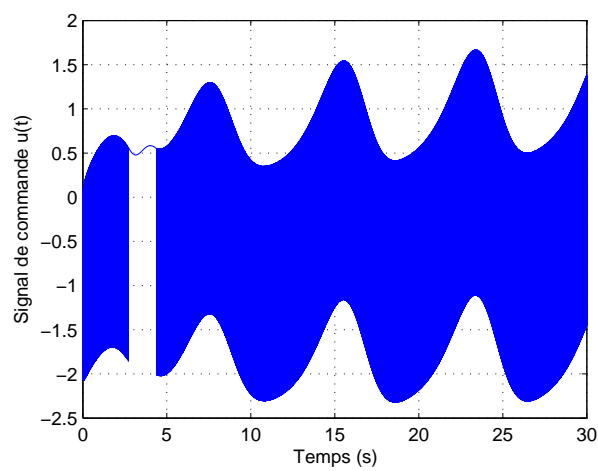
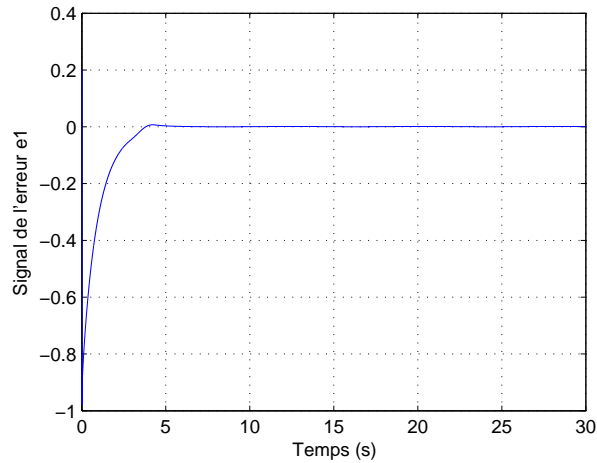
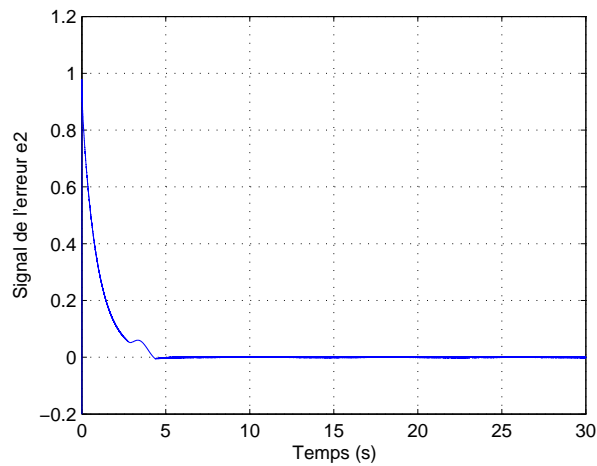
FIGURE 4.4: Trajectoires des états x_2 et y_2 .

FIGURE 4.5: Trajectoire de la surface de glissement.

FIGURE 4.6: Trajectoire de l'effort de la commande $u(t)$.

FIGURE 4.7: Signal de l'erreur $e_1(t)$.FIGURE 4.8: Signal de l'erreur $e_2(t)$.

4.4.2 Etape 2 : Introduction du contrôleur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ

Considérons maintenant le problème de l'élimination du chattering apparu dans les résultats ci-dessus, et l'introduire du contrôleur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ complémentaire où ($\lambda = q$). Les résultats de simulation sont donnés dans Fig. 4.9 pour la performance de la synchronisation des systèmes chaotiques de Duffing de réponse et de référence, Fig. 4.10 et Fig. 4.11 pour les trajectoires des états.

On peut voir d'une bonne performances de la synchronisation, même en présence de perturbations $d(t)$ et les phénomènes de chattering est éliminé dans la trajectoire de la surface

de glissement et le signal de commande $u(t)$ comme illustré dans Fig. 4.12 et Fig. 4.13 respectivement.

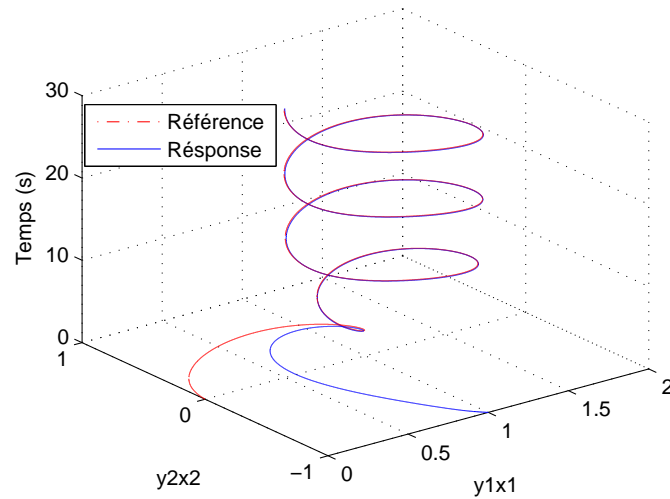


FIGURE 4.9: Performance de synchronisation des systèmes chaotiques de Duffing (réponse et référence).

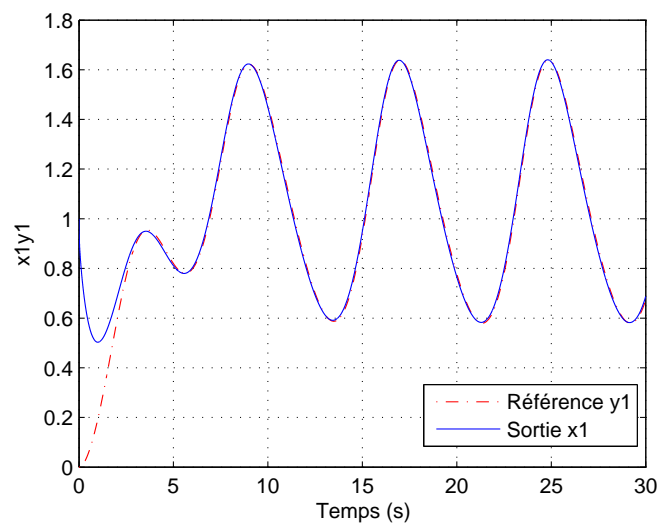
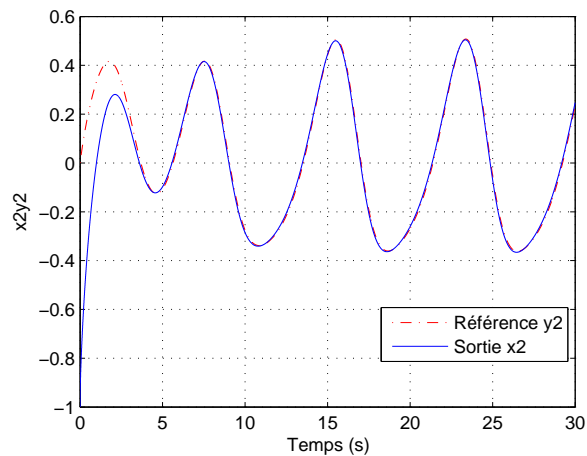
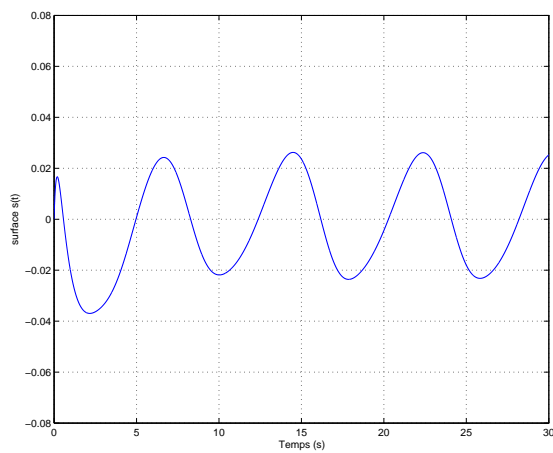
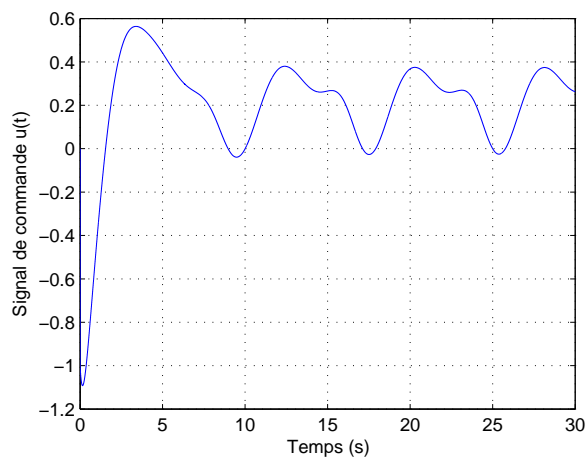
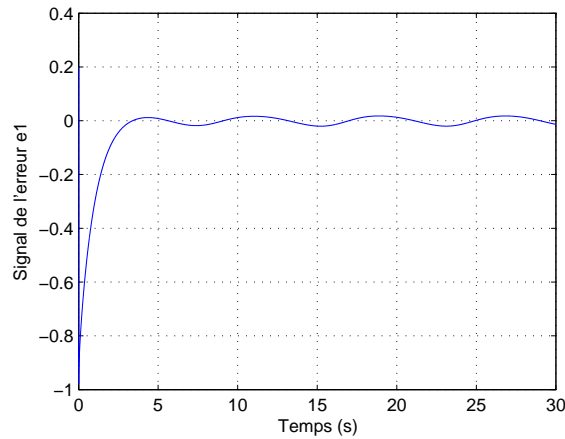
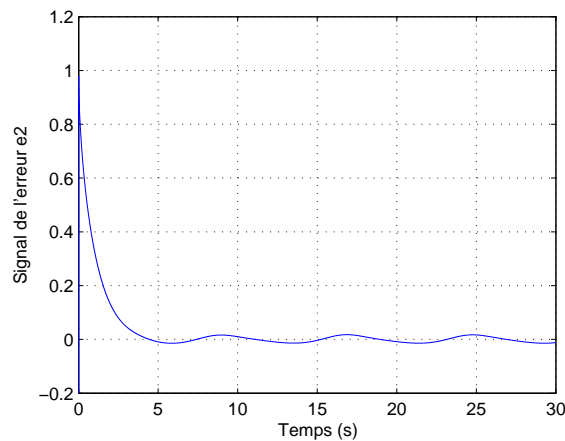


FIGURE 4.10: Trajectoires des états x_1 et y_1 .

FIGURE 4.11: Trajectoires des états x_2 et y_2 .FIGURE 4.12: Trajectoire de la surface de glissement $s(t)$.FIGURE 4.13: Trajectoire de l'effort de la commande $u(t)$.

FIGURE 4.14: Signal de l'erreur $e_1(t)$.FIGURE 4.15: Signal de l'erreur $e_2(t)$.

Remarque 4.1. - *L'objectif principal de ce chapitre est d'atténuer/éliminer les chattering et l'erreur en régime permanent en utilisant un régulateur PI^λ adaptatif d'ordre fractionnaire au sein de la couche limite. Par conséquent, les performances du système en boucle fermée est meilleure et la convergence asymptotique est garantie.*

- *On peut remarquer une certaine amélioration de la synchronisation et la performances de poursuite comme illustré dans les résultats de simulation de Fig. 4.2-4.4 et Fig. 4.9-4.13, en comparaison avec des résultats similaires de [84], [80] ...*
- *Une des raisons de cette amélioration peut être également l'utilisation de la méthode d'approximation de Grünwald-Letnikov au lieu de la méthode de Adams-Bashforth-Moulton.*

4.4.3 Etape 3 : Utilisation de la fonction de saturation "SAT"

Le broutement (phénomène de Chattering) peut être réduit en remplaçant la fonction "sign" par une fonction de saturation adéquate qui filtre les hautes fréquences. On donne ci-dessous un exemple de fonction de saturation Fig. 4.16.

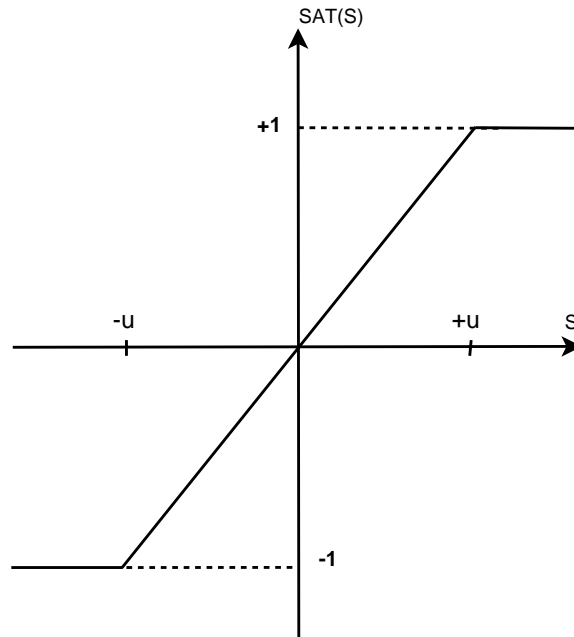


FIGURE 4.16: La fonction "SAT".

l'équation de la fonction de saturation est donnée comme suit :

$$\begin{cases} sat(S) = 1 & si S > \mu \\ sat(S) = -1 & si S < \mu \\ sat(S) = S/\mu & si |S| < \mu \end{cases} \quad (4.35)$$

où μ Un paramètre petit et positif.

les résultats de simulation sont donnés dans Fig. 4.17 pour la performance de la synchronisation des systèmes chaotiques de Duffing de réponse et de référence, Fig. 4.18 et Fig. 4.19 pour les trajectoires des états, Fig. 4.20 pour le signal de la surface de glissement, Fig. 4.21 pour le signal de la commande.

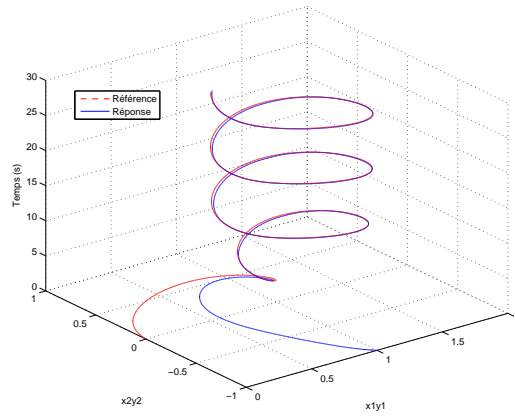


FIGURE 4.17: Performance de synchronisation des systèmes chaotiques de Duffing (réponse et référence).

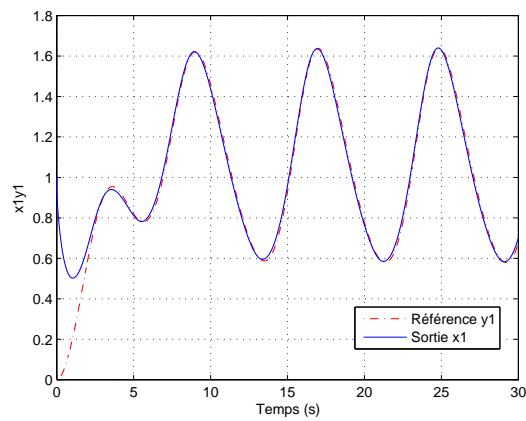


FIGURE 4.18: Trajectoires des états x_1 et y_1 .

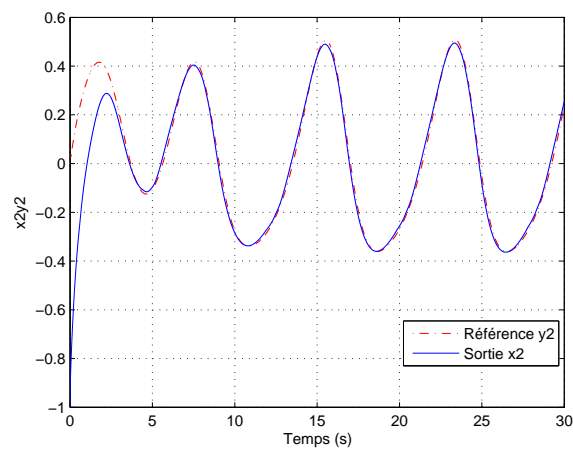


FIGURE 4.19: Trajectoires des états x_2 et y_2 .

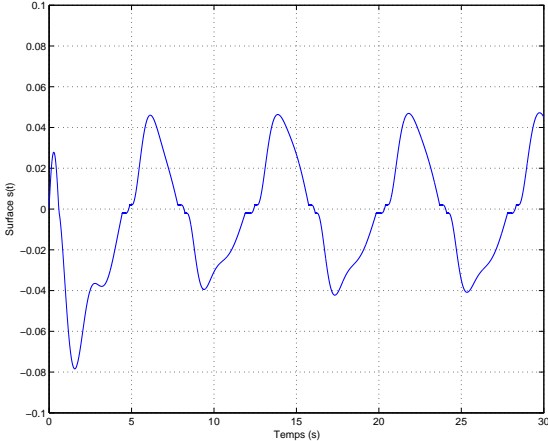


FIGURE 4.20: Trajectoire de la surface de glissement $s(t)$.

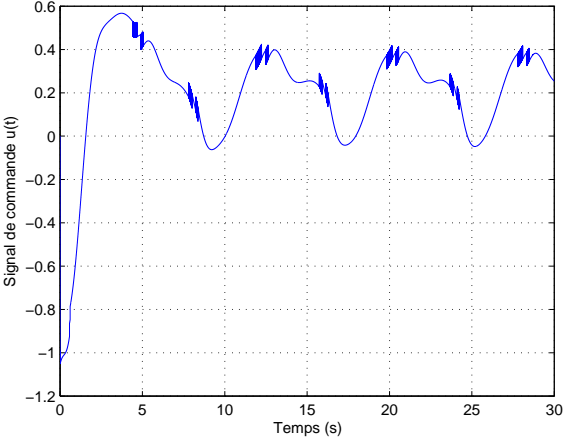


FIGURE 4.21: Trajectoire de l'effort de la commande $u(t)$.

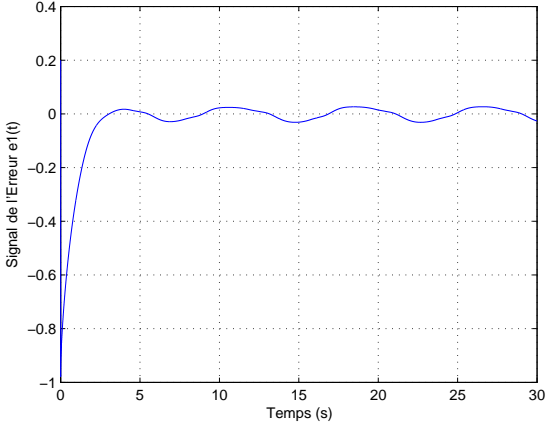
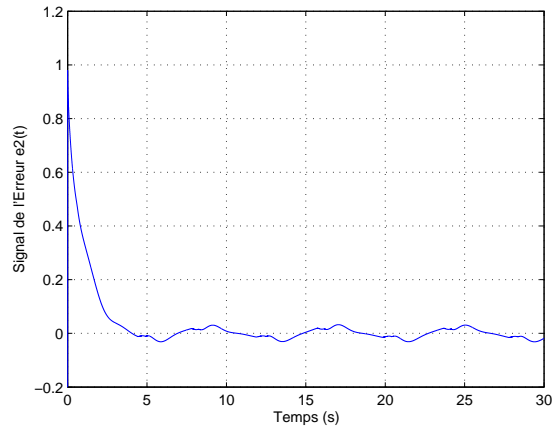


FIGURE 4.22: Signal de l'erreur $e_1(t)$.

FIGURE 4.23: Signal de l'erreur $e_2(t)$.

Remarque 4.2. *Après avoir utilisé les deux techniques (le régulateur PI^λ et la fonction "SAT") servant à éliminer le chattering, nous avons constaté que la technique de l'introduction du PI^λ donne des résultats meilleurs.*

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle stratégie de commande adaptative floue par mode glissant est proposée avec la synchronisation du chaos entre deux systèmes incertains chaotiques d'ordre fractionnaire. La contribution principale de ce chapitre est l'introduction d'un régulateur adaptatif d'ordre fractionnaire PI^λ pour éliminer/éviter le phénomène de chattering (voir section 2.7.1.3) dans le contrôleur par mode glissant.

La fonction "SAT" est également appliquée pour la même fin, cependant, la première technique contribue mieux à l'élimination du chattering.

En se basant sur l'approche de la synthèse de Lyapunov, les paramètres libres du contrôleur adaptatif flou peuvent être réglés en ligne par une loi de commande de feedback fractionnaire et par des lois d'adaptation pour réaliser la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

La stabilité asymptotique du système de commande globale est établie et la synchronisation des chaos de deux systèmes de Duffing d'ordre fractionnaire est réalisée avec l'approche d'approximation numérique de Grünwald-Letnikov.

Les résultats de simulation ont montré que la commande proposée peut atteindre les performances souhaitées, et confirme l'efficacité de la méthodologie proposée.

Chapitre 5

Commande adaptative floue des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire avec gain de commande de signe inconnu

5.1 Introduction

Nous proposons dans ce chapitre, une stratégie améliorée de commande adaptative floue, pour une classe des systèmes non linéaires (SISO) chaotiques d'ordre fractionnaire avec signe du gain de commande inconnu. L'algorithme de commande en ligne utilise des ensembles flous pour l'identification du système chaotique d'ordre fractionnaire, alors que l'absence d'une connaissance a priori sur les directions de commande est résolu par l'introduction du gain de Nussbaum d'ordre fractionnaire. En se basant sur le théorème de Lyapunov, l'analyse de la stabilité est réalisée par la méthode de commande proposée pour un niveau d'erreur de synchronisation acceptable.

Dans ce travail, la méthode de Grünwald-Letnikov est utilisée pour l'approximation numérique des systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Un exemple de simulation est donné pour illustrer l'efficacité du système de commande proposé. Nous sommes intéressés à la commande adaptative d'ordre fractionnaire des systèmes non linéaires chaotiques

d'ordre fractionnaire en utilisant une technique d'identification par logique floue. Les systèmes adaptatifs d'ordre fractionnaire ont été largement étudiés depuis une dizaine d'années car ils ont montré un comportement amélioré comparativement à la commande adaptative classique pour les systèmes partiellement inconnus [69, 74, 72, 78].

En se basant sur le théorème d'approximation universelle, les systèmes de commande adaptative floue présentent une solution efficace de la commande d'une large classe de systèmes non linéaires [131, 133]. Le régulateur adaptatif est synthétisé à partir d'une collection des règles floues IF-THEN, et les paramètres des fonctions d'appartenance caractérisant les termes linguistiques dans les règles IF-THEN changés selon une loi d'adaptation dans le but de commander un système pour suivre une trajectoire de référence [130, 63].

Une classe particulière de ces systèmes non linéaires est le problème difficile de la commande avec des directions de commande inconnues [101, 137]. L'approche de la fonction de type-Nussbaum a été introduite dans les années 1980 [134]. Cette technique a été utilisée pour le contrôle adaptatif pour des systèmes non linéaires de premier ordre [92]. Plus tard, de nombreuses études sur les systèmes de contrôle adaptatif avec fonction de type-Nussbaum ont été développés avec succès pour différentes classes de systèmes non linéaires [140, 85, 13].

La principale contribution de ce chapitre est l'introduction de l'extension de la fonction de type-Nussbaum au cas fractionnaire [65] dans le système de commande adaptative floue pour les systèmes chaotiques non linéaires avec de signe du gain de commande inconnu. La stabilité du système en boucle fermée est réalisée en utilisant la théorie de la stabilité de Lyapunov. Par ailleurs, l'influence de l'erreur d'approximation et de la perturbation externe de l'erreur de poursuite peut être atténuée à un niveau prescrit de manière arbitraire par l'intermédiaire de la technique de la conception proposée. La conception de commande adaptative floue avec la fonction de Nussbaum d'ordre fractionnaire est appliquée pour les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire non linéaires avec une grande incertitude ou une variation inconnue dans les paramètres et les structures du système. La technique de Grünwald-Letnikov est utilisée pour la résolution des équations différentielles et pour l'approximation numérique du système chaotique d'ordre fractionnaire [103, 65].

Cette étude se focalise sur les concepts de base liés à la commande adaptative floue d'ordre fractionnaire pour une classe de systèmes SISO chaotiques non linéaires d'ordre fractionnaire est proposés pour le problème de l'amélioration de la performance et la poursuite.

On proposera deux stratégies (ou schémas) de commandes : *i*). une commande adaptative floue, développée pour une classe de systèmes mono-entrée mono-sortie (SISO) non linéaires d'ordre fractionnaire avec signe du gain de commande connu, et l'autres schéma *ii*). sur la commande adaptative floue pour la même classe de systèmes avec signe du gain de commande inconnu [65], pour estimer cet inconnu signe du gain de commande on utilise l'extension de l'approche du gain de type-Nussbaum au cas fractionnaire.

5.2 Rappels sur le gain de type-Nussbaum

Comme dans la section 2.9 du chapitre A, nous rappelons la définition et les lemmes (Lemme 2.3 et Lemme 2.4) comme suit :

Définition 5.1. *Une fonction $N(\zeta)$ est appelée une fonction de type-Nussbaum si elle vérifie les propriétés suivantes [101, 100, 46, 45] :*

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\zeta) d\zeta = +\infty \quad (5.1)$$

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s N(\zeta) d\zeta = -\infty \quad (5.2)$$

Remarque 5.1. *En rappelant aussi que les lemmes ci-dessous (Lemme 2.3)(Lemme 2.4) sont utilisés dans l'analyse de la stabilité [77, 11].*

Lemme 5.1. [44] *Soient $V(\cdot)$ et $\zeta(\cdot)$ des fonctions continues définies sur $[0, t_f)$, avec $V(t) \geq 0, \forall t \in [0, t_f)$, et $N(\cdot)$ est une fonction paire de Nussbaum.*

Si l'inégalité suivante est valide :

$$V(t) \leq c_0 \pm \int_0^t (gN(\zeta) \pm 1) \dot{\zeta} d\tau, \quad \forall t \in [0, t_f), \quad (5.3)$$

où g est une constante différente de zéro et c_0 représente une certaine constante appropriée. Alors $V(t), \zeta(t)$ et $\int_0^t (gN(\zeta) \pm 1) \dot{\zeta} d\tau$ doivent être bornés sur $[0, t_f)$.

La démonstration du Lemme 5.1 est trouvée dans [45, 11].

Lemme 5.2. *on considère le système d'ordre fractionnaire comme suit :*

$$D^\alpha y(t) = -ay(t) + b \quad (5.4)$$

alors il existe une constante $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \in (t_0, \infty)$,

$$\|y(t)\| \leq \frac{2b}{a} \quad (5.5)$$

où $y(t)$ est la variable d'état, et a, b sont deux constantes positives.

La preuve de ce lemme est trouvée dans [77].

5.3 Conception du contrôleur adaptatif flou avec signe du gain de commande connu ou inconnu

Considérons le système dynamique non linéaire mono-entrée mono-sortie (SISO) décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} x_1^{(q_1)} = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(q_{n-1})} = x_n \\ x_n^{(q_n)} = f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u + d(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.6)$$

où,

$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur d'état de ce système, $u \in \mathbf{R}$ est l'entrée de commande et $y \in \mathbf{R}$ est sa sortie, avec les conditions initiales : $u(0) = 0$ et $y(0) = 0$.

Les conditions initiales sont fixées à zéro pour éviter la non robustesse pour le contrôleur adaptatif de type-Nussbaum comme l'a prouvé Georgiou et Smith [47],

Si $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ le système ci-dessus est appelé un système de commande proportionnelle. Ensuite, une forme équivalente du système ci-dessus est décrite comme suit :

$$\begin{cases} x^{(nq)} = f(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t)u + d(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5.7)$$

où $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont des fonctions non linéaires inconnues mais bornées qui expriment la dynamique du système, et $d(t)$ est une perturbation externe donnée bornée.

L'objectif consiste à déterminer une loi de commande forçant la sortie du système à suivre la trajectoire de référence \mathbf{y}_d tout en assurant la bornitude de tous les signaux du système

en boucle fermée.

Le vecteur du signal de référence \mathbf{y}_d et le vecteur de l'erreur de poursuite \mathbf{e} sont définis comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_d &= [y_d, y_d^{(q)}, y_d^{(2q)}, \dots, y_d^{((n-1)q)}]^T \in \mathbf{R}^n \\ \mathbf{e} &= \mathbf{y}_d - \mathbf{y} = [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in \mathbf{R}^n \\ e^{(iq)} &= y_d^{(iq)} - y^{(iq)}\end{aligned}$$

Soit $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \in \mathbf{R}^n$ est choisi de telle sorte que l'état stable $|\arg(\text{eig}(A))| > q\pi/2$ est satisfait, où $0 < q < 1$ et $\text{eig}(A)$ représente les valeurs propres de la matrice d'état du système. **i)** si les fonctions $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont connues et le système est libre de la perturbation externe (c.-à-d. $d(t) = 0$).

les hypothèses suivantes sont considérées [85, 13] :

Hypothèse 5.1. *Le gain de commande $g(\mathbf{x}, t)$ est non nulle et avec un signe connu, il est également strictement positif ou strictement négatif.*

Hypothèse 5.2. *La perturbation externe est bornée : $|d(t)| \leq D$ avec D une constante positive inconnue.*

Ensuite, la loi de commande du contrôleur équivalent est obtenue comme [81],

$$u^* = \frac{1}{g(\mathbf{x}, t)} \left(-f(\mathbf{x}, t) + y_d^{(nq)} + k^T \mathbf{e} \right) \quad (5.8)$$

où le signal du vecteur de référence \mathbf{y}_d et le vecteur de l'erreur de poursuite \mathbf{e}^{nq} donnés par :

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_d &= [y_d, y_d^{(q)}, y_d^{(2q)}, \dots, y_d^{((n-1)q)}]^T \in \mathbf{R}^n \\ \mathbf{e} &= \mathbf{y}_d - \mathbf{y} = [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in \mathbf{R}^n, \\ e^{(iq)} &= y_d^{(iq)} - y^{(iq)}\end{aligned}$$

En substituant (5.8) dans (5.7), nous avons :

$$e^{nq} = k_n e^{(n-1)q} + \dots + k_1 e = 0 \quad (5.9)$$

Ce qui donne $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, qui est l'objectif principal de la commande.

ii) Néanmoins, $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont inconnues et la perturbation externe $d(t) \neq 0$. De ce fait, l'implantation de la commande idéale (5.8) est difficile et voire impossible ; ce problème a été résolu par la stratégie de la commande proposée précédemment par l'utilisation de systèmes flous pour approximer des fonctions inconnues [63].

Dans ce cas, nous considérons les hypothèses suivantes [85, 13] :

Hypothèse 5.3. *Le vecteur d'état x est non mesurable, à l'exception de la sortie du système y .*

Hypothèse 5.4. *La trajectoire de référence $y_d(t)$ et sa dérivée de l'ordre fractionnaire (nq) sont connues, continues et bornées.*

Hypothèse 5.5. *Le gain de commande $g(\mathbf{x}, t)$ est non nul et de signe du gain de commande inconnu. Il est aussi, strictement positif ou strictement négatif.*

Remarque 5.2. *Dans l'hypothèse 5.5, et contrairement à la loi de commande précédente 5.8, le signe de $g(\mathbf{x}, t)$ n'a pas besoin d'être connu, car la technique de type-Nussbaum permettra d'estimer le signe du gain de commande.*

De la définition 5.1, nous savons que les fonctions de Nussbaum devraient avoir des gains infinis et des fréquences de commutation aussi infinies.

Dans la suite de cette partie, on donne la fonction de type-Nussbaum comme :

$$N(\zeta) = \zeta^2 \cos(\zeta)$$

sera utilisée pour la commande des systèmes chaotiques non linéaires disponibles.

En substituant (5.8) dans (5.7) on obtient le système de commande en boucle fermée dans le domaine de l'espace d'état comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(nq)} &= A\mathbf{x} + B[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u] \\ y &= c^T \mathbf{x} \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & \cdots & -k_{(n-1)} & -k_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and,} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant la relation $y_d^{(q)} = Ay_d + By_d^{(nq)}$, on obtient l'équation (5.11) comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(q)} &= A\mathbf{e} + B[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u^* - y_d^{(nq)}] \\ e &= c^T \mathbf{e} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Dans ce qui suit, une commande adaptative floue sera conçue pour stabiliser le système (5.6) ou le système équivalent (5.11).

Remplacement $f(\mathbf{x})$ par le système flou $f(\mathbf{x}, \theta_f)$ qui est spécifiée comme suit :

$$f(\mathbf{x}, \theta_f) = \theta_f^T \xi(\mathbf{x}) \quad (5.12)$$

Ici, la fonction floue de base $\xi(\mathbf{x})$ dépend des fonctions d'appartenance floues et doit être supposée fixe, tant que θ_f est ajustée par des lois d'adaptation basées sur un critère de stabilité de Lyapunov.

En utilisant (5.12), l'équation (5.11) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(q)} &= A\mathbf{e} + B[\xi^T(\mathbf{x})\theta_f + g(\mathbf{x})u^* - y_d^{(nq)}] \\ e &= c^T \mathbf{e} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Le vecteur d'estimation des paramètres optimaux θ_f^* est défini par :

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} \left[\sup_{x \in \Omega_x} |f(\mathbf{x} | \theta_f) - f(\mathbf{x}, t)| \right] \quad (5.14)$$

avec $\phi_f = \theta_f - \theta_f^*$ et Ω_f, Ω_x sont des ensembles de contraintes pour θ_f et x respectivement, définies comme :

$$\begin{aligned} \Omega_f &= \{\theta_f \mid |\theta_f| \leq M_f\} \\ \Omega_x &= \{x \mid |x| \leq M_x\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

où M_f et M_x sont des constantes positives.

Le théorème suivant est proposé pour montrer les performances de notre commande dans le système en boucle fermée.

Théorème 5.1. *Considérant le système de l'équation (5.7), et la loi de commande adaptative floue proposée, avec la fonction de Nussbaum fractionnaire donnée comme suit :*

$$u^* = N(\zeta) [k^T \mathbf{e} + \theta_f^T \xi(\mathbf{x}) - y_d^{(nq)}] \quad (5.16)$$

où $N(\zeta) = \zeta^2 \cos(\zeta)$ et,

$$\zeta^{(q)} = \mathbf{e}^T P B [k^T \mathbf{e} + r_1 \theta^T \xi(\mathbf{x}) - y_d^{(nq)}] \quad (5.17)$$

et la loi d'adaptation d'ordre fractionnaire pour le vecteur θ est choisie de la façon :

$$\theta^{(q)} = -r_1 \theta + r_1 \mathbf{e}^T P B \xi(\mathbf{x}) \quad (5.18)$$

où r_1 est une constante positive, et $P = P^T > 0$ est une matrice définie positive, il y a une matrice symétrique définie positive $Q = Q^T$ satisfaisant l'équation de Lyapunov comme suit :

$$A_c P + P A_c^T + P B B^T P = -Q$$

Nous choisissons $A_c = A - B \mathbf{k}^T$ est Hurwitz. Donc, tous les signaux dans le système en boucle fermée sont limités et l'erreur de poursuite converge vers un ensemble compact borné défini par : $\Omega = \{e_1, |e_1| \leq a_1\}$, où a_1 est une constante positive.

5.4 Analyse de la Stabilité

La fonction de Lyapunov est choisie comme :

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T P \mathbf{e} + \frac{1}{2r_1} \phi_f^T \phi_f \quad (5.19)$$

la dérivée de (5.19) par rapport au temps [2, 35] donne :

$$V^{(q)}(t) \leq \frac{1}{2} (\mathbf{e}^{(q)})^T P \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) P \mathbf{e}^{(q)}(t) + \frac{1}{r_1} \phi_f^T \phi_f^{(q)} \quad (5.20)$$

Par la substitution de (5.13) dans (5.20), on obtient :

$$\begin{aligned} V^{(q)}(t) \leq & \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (P A + A^T P) \mathbf{e} + \frac{1}{r_1} \phi_f^T \phi_f^{(q)} \\ & + \mathbf{e}^T P B [\xi(\mathbf{x}) \theta_f^T + g u^* - y_d^{(nq)}] \end{aligned} \quad (5.21)$$

en utilisant (5.16) et (5.17), (5.21) devient :

$$\begin{aligned}
V^{(q)}(t) &\leq \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (PA + A^T P) \mathbf{e} + \frac{1}{r_1} \phi_f^T \phi_f^{(q)} \\
&\quad + \mathbf{e}^T PB \left[\xi(\mathbf{x}) \theta_f^T + g u^* - y_d^{(nq)} \right] - \mathbf{e}^T PB \theta_f^T \xi(\mathbf{x}) \\
&\leq \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (PA + A^T P) \mathbf{e} + \phi_f^T \left[\frac{1}{r_1} \phi_f^{(q)} - \mathbf{e}^T PB \xi(\mathbf{x}) \right] \\
&\quad + \mathbf{e}^T PB \left[\xi(\mathbf{x}) \theta_f^T - y_d^{(nq)} \right] + \mathbf{e}^T PB g N(\zeta) (k^T \mathbf{e} \\
&\quad \quad + \xi(\mathbf{x}) \theta_f^T - y_d^{(nq)}) \\
&\leq \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (PA_c + A_c^T P) \mathbf{e} + \phi_f^T \left[\frac{1}{r_1} \phi_f^{(q)} - \mathbf{e}^T PB \xi(\mathbf{x}) \right] \\
&\quad + [gN(\zeta) + 1] \zeta^{(q)}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

on utilise (5.18), l'inégalité suivante est obtenue :

$$\begin{aligned}
\phi_f^T \left[\frac{1}{r_1} \phi_f^{(q)} - \mathbf{e}^T PB \xi(\mathbf{x}) \right] &= -\phi_f^T \theta = -\phi_f^T \phi_f - \phi_f^T \theta_f^* \\
&\leq -\frac{1}{2} \phi_f^T \phi_f + \frac{1}{2} \|\theta_f^*\|^2
\end{aligned} \tag{5.23}$$

et ainsi, a partir de l'inégalité de Young :

$$\mathbf{e}^T PB \leq \frac{1}{2} \mathbf{e}^T P B B^T P \mathbf{e} + \frac{1}{2} b^2 \tag{5.24}$$

où b est une constante positive.

la substitution des (5.23) et (5.24) dans (5.22), donne l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
V^{(q)}(t) &\leq \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (PA_c + A_c^T P) \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T P B B^T P \mathbf{e} \\
&\quad + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} \phi_f^T \phi_f + \frac{1}{2} \|\theta_f^*\|^2 + [gN(\zeta) + 1] \zeta^{(q)} \\
&\leq -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} \phi_f^T \phi_f + \frac{1}{2} \|\theta_f^*\|^2 \\
&\quad + [gN(\zeta) + 1] \zeta^{(q)}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

où $\mu = \lambda_{\min}(QP^{-1}, r_1)$ et $\beta = \|\theta_f^*\|^2 + \frac{1}{2} b^2$.

L'inégalité (5.25) peut être exprimée comme :

$$V^{(q)} \leq -\mu V + \omega \tag{5.26}$$

où $\omega = \beta + [gN(\zeta) + 1] \zeta^{(q)}$. Ensuite, selon le signe de ω , deux cas se présentent :

1. Si $\omega \leq 0$, alors nous avons $V^{(q)} \leq 0$ et la continuité uniforme de la dérivée d'ordre fractionnaire (??) permettant d'appliquer l'extension du lemme de Barbalat au cas fractionnaire [43]. Par conséquent, $V(t)$ est bornée et e et θ_f sont également bornées.
2. Si $\omega > 0$, alors selon le lemme 5.2, nous avons :

$$\|V(t)\| \leq \frac{2\omega}{\mu} \quad (5.27)$$

ce qui donne :

$$\|e(t)\| \leq 2\sqrt{\frac{\omega}{\mu\lambda_{\min}(P)}}$$

Cela signifie que $\|e(t)\|$ peut être arbitrairement petit, et θ_f est bornée. De (5.16), u est bornée. Ensuite, tous les signaux dans le système en boucle fermée sont bornés.

Le diagramme de la commande proposée est donné dans ci-dessous Fig. 5.1.

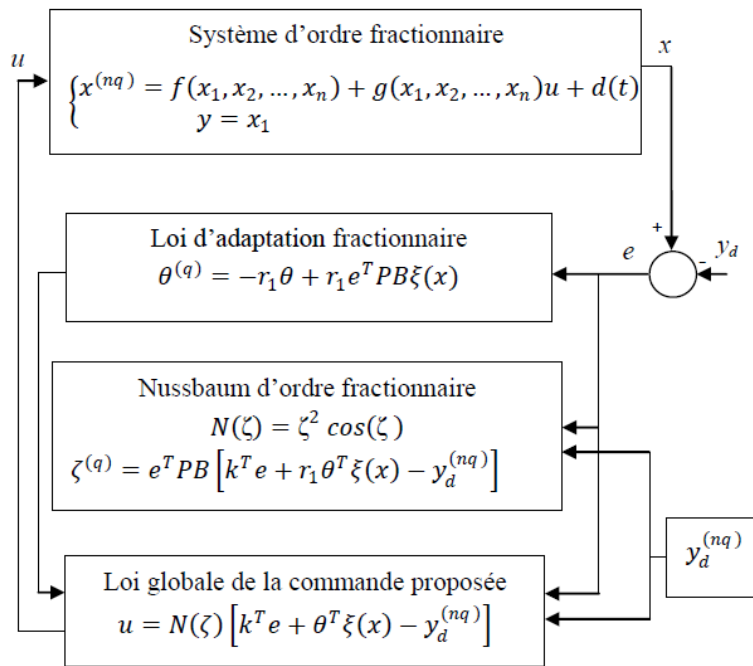


FIGURE 5.1: Schéma bloc global de la commande adaptative floue proposée avec signe du gain de commande inconnu.

5.5 Exemple illustratif

Pour illustrer la performance de l'approche de commande proposée, nous considérons deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de Duffing comme suit [80],

Le premier est un système de référence :

$$\begin{aligned} D^q y_{d1} &= y_{d2} \\ D^q y_{d2} &= 1.2 y_{d1} - y_{d2} - y_{d1}^2 + 0.5 \cos(t) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Le second est le système de réponse (à commander)

$$\begin{aligned} D^q y_1 &= y_2 \\ D^q y_2 &= y_1 - 1.8 y_2 - y_1^2 + 0.9 \cos(t) + u(t) + d(t) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Les conditions initiales sont choisies comme suit :

$$y_d(0) = [0, 0]^T \text{ et } y(0) = [1, -1]^T.$$

Nous considérons dans ce cas, la valeur d'ordre fractionnaire $q = 0,98$, avec la perturbation externe $d(t) = 0,1 \sin(t)$

. Les autres constantes de conception sont définies comme :

$$k_1 = k_2 = 1, r_1 = 200, \rho = 0.05, h = 0.01 \text{ et } T_{sim} = 40 \text{ s.}$$

L'objectif principal est de commander notre système de réponse pour suivre la sortie du système de référence sachant que les fonctions $f(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ sont complètement inconnues. Fig. 5.2 montre le plan de phase des systèmes avant l'application de la loi de commande proposée.

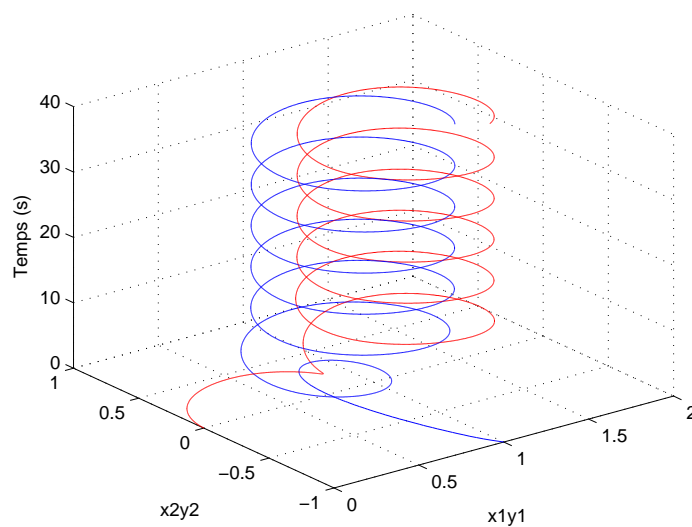


FIGURE 5.2: Plan de phase des systèmes chaotiques de Duffing (sans l'action de la loi de commande).

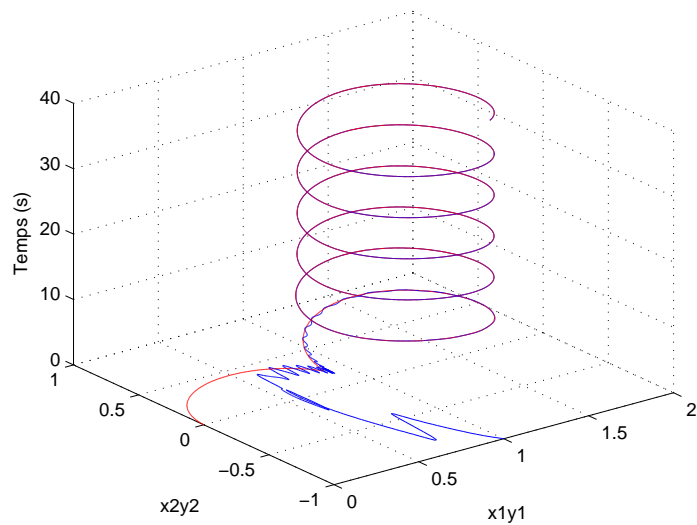


FIGURE 5.3: Performance de synchronisation des systèmes chaotiques de Duffing (référence et réponse).

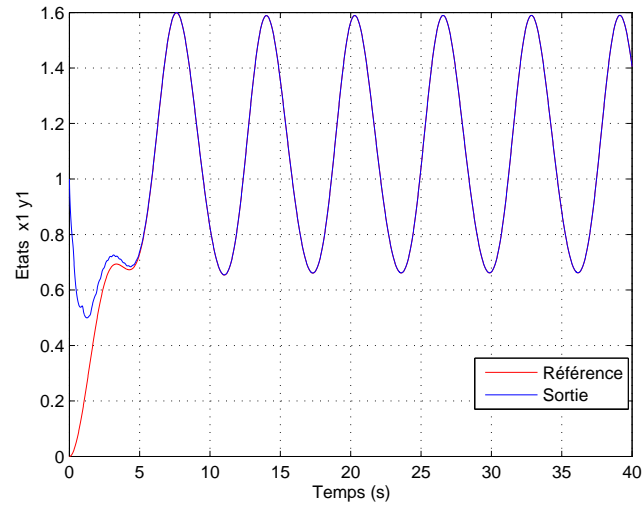
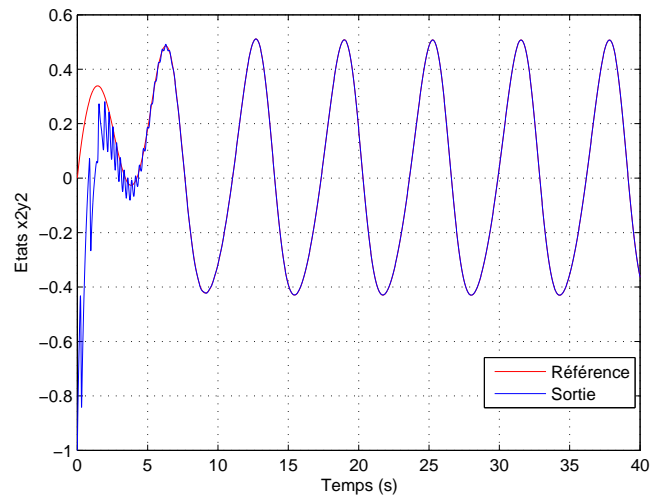
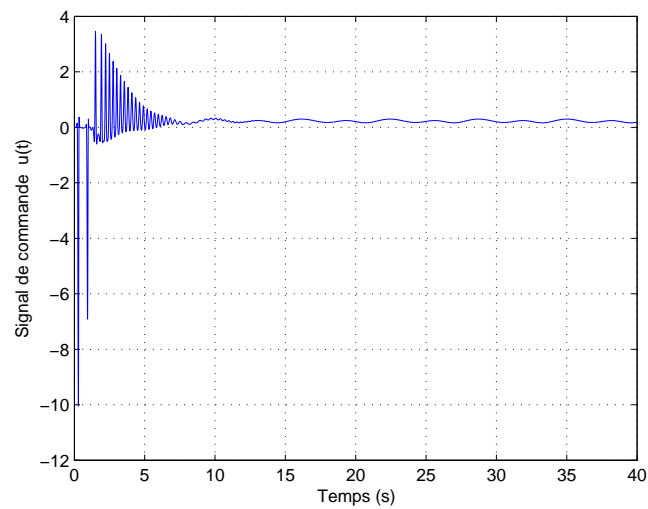
(a) Trajectoires des états des systèmes y_1 et y_{d1} .(b) Trajectoires des états des systèmes y_2 et y_{d2} .(c) signal de commande $u(t)$.

FIGURE 5.4: Résultats de simulation avec la loi de commande proposée.

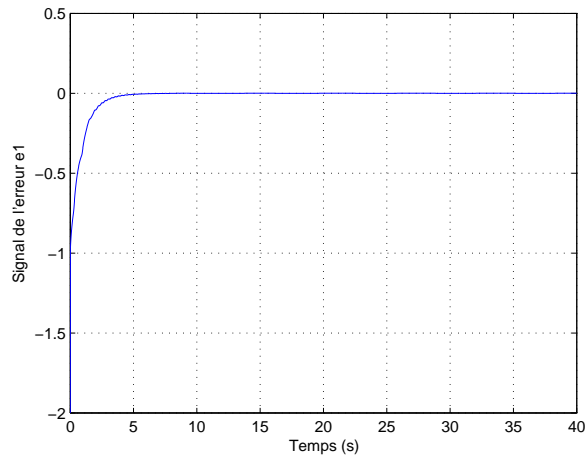
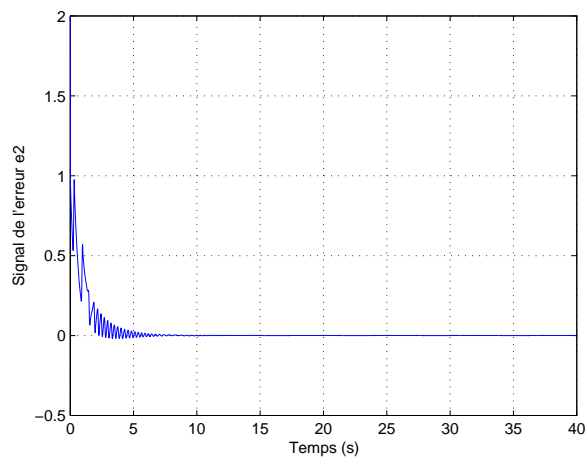
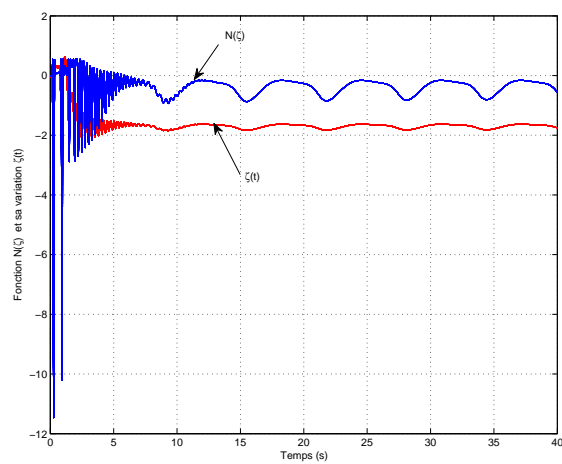
(d) Signal de l'erreur $e_1 = y_1 - y_{d1}$.(e) Signal de l'erreur $e_2 = y_2 - y_{d2}$.

FIGURE 5.5: Signaux des erreurs.

FIGURE 5.6: fonction de Nussbaum $N(\zeta)$ et sa variation $\zeta(t)$.

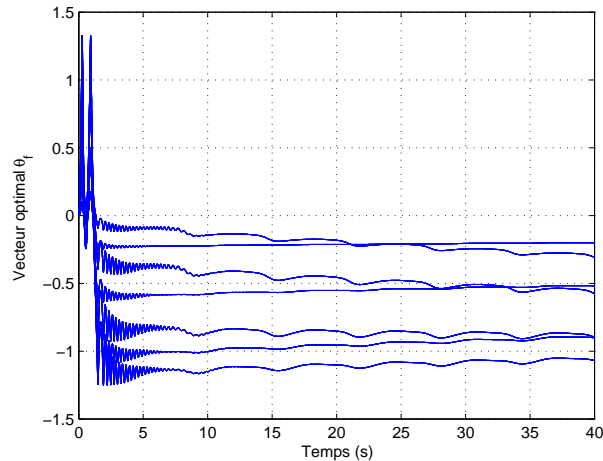


FIGURE 5.7: Vecteur des paramètres optimaux $\theta_f(t)$.

Discussion des resultats :

- Selon la Fig. 5.4, les trajectoires des réponses convergent avec précision aux trajectoires des références, même en présence de perturbations externes.
- On peut remarquer les vibrations dans le début de la Fig. 5.4(b) et Fig. 5.4(c) qui sont dues à la phase transitoire, nécessaire pour le régulateur adaptatif flou afin qu'il puisse converger les paramètres estimés vers ceux du modèle de référence. Elles dépendent principalement du choix arbitraire des conditions initiales.
- Fig. 5.5 montrent que les signaux des erreurs sont bornés et convergent asymptotiquement vers zéro.
- D'après Fig. 5.6 et Fig. 5.7 on peut remarquer que les paramètres optimaux et la fonction de Nussbaum qui estime le signe du gain de commande sont totalement bornées.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un schéma de commande adaptative floue est proposé pour une classe de systèmes SISO non linéaires d'ordre fractionnaire avec signe du gain de commande inconnu. Les systèmes flous ont été utilisés pour approximer la dynamique inconnue en ligne, y compris tous les non-linéarités du système. L'approximation numérique des systèmes d'ordre fractionnaire est réalisée par la méthode Grünwald-Letnikov.

La principale contribution de ce chapitre est d'introduire l'extension de la technique de la fonction de type-Nussbaum au cas fractionnaire, pour estimer le signe du gain de commande des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire.

Le dispositif de la commande développée garantit la bornitude de tous les signaux dans la boucle fermée et la convergence de l'erreur de poursuite. Les résultats de simulation montrent les bonnes performances des trajectoires de poursuite de notre méthode proposée.

Chapitre 6

Conclusion générale

Ce travail s'inscrit dans un axe de recherche qui connaît un enouement certain qui est la théorie de commande des systèmes chaotiques non linéaires incertains d'ordre fractionnaire, la complexité étant dans l'ordre non entier de la dérivation des équations différentielles décrivant une classe de processus non linéaire.

Le thème de recherche présenté dans cette thèse concerne le développement de schémas de commande adaptative d'ordre fractionnaire utilisant les systèmes flous pour les systèmes SISO non linéaires d'ordre fractionnaire avec des non linéarités inconnues. Nous nous sommes intéressés particulièrement aux systèmes non linéaires dits chaotiques.

L'utilisation des systèmes flous est pour l'approximation des dynamiques inconnues des systèmes d'ordre fractionnaire dans certains cas (notre cas est : approches indirectes). L'analyse de la stabilité et la robustesse de tous les schémas de commande sont étudiées par l'approche de Lyapunov.

L'approche utilisée est basée sur la nouvelle généralisation de la méthode de Grünwald-Letnikov permettant de résoudre les équations d'ordre fractionnaire des systèmes chaotiques.

On peut conclure que l'objectif de cette étude est atteint. En effet, on a pu proposer une technique de commande adaptée pour résoudre le problème de la commande des systèmes non linéaires. De plus, la stratégie de commande proposée avec le mode glissant/ H^∞ et avec signe de gain inconnu, qui présente une partie complémentaire du développement précédent est un emplacement primordial pour l'amélioration des performances.

On procède ci-après à la présentation éphémère des résultats obtenus et les perspectives de notre travail.

1). On a présenté dans le chapitre 1, un état de l'art sur les calculs et les systèmes à dérivée d'ordre fractionnaire, et on a donné quelques outils mathématiques qui concernent la démonstration pour l'analyse de la stabilité du système de commande. On a présenté aussi une méthode numérique s'appuyant sur l'approximation de la définition de Grünwald-Letnikov afin d'évaluer numériquement la dérivée fractionnaire des fonctions et de résoudre les équations à dérivée fractionnaire. La description des systèmes chaotiques de Duffing-Holmes au cas fractionnaire a constitué l'exemple d'application.

2). Le chapitre 2, a été consacré au développement de la loi de commande adaptative floue robuste par H^∞ pour traiter la synchronisation de chaos entre deux différents systèmes chaotiques incertains d'ordre fractionnaire. En se basant sur l'approche de la synthèse de Lyapunov, des paramètres libres du contrôleur adaptatif flou peuvent être accordés en ligne par la loi de commande de feedback et les lois d'adaptations. On a donné différentes valeurs de q pour tester la robustification des lois de commandes proposées.

3). Une stratégie de commande adaptative floue d'ordre fractionnaire par mode glissant d'ordre non entier a été conçue dans le chapitre 3. Les résultats de simulation concernant la commande d'un système chaotique d'ordre fractionnaire pour suivre une trajectoire désirée sont satisfaisants, mais avec l'apparition de chattering dans le signal de commande et le signal de surface, qui est un effet indésirable. Pour éliminer ce problème, un régulateur PI^λ adaptatif d'ordre fractionnaire a été ajouté sur le système proposé, les résultats de simulation ont vérifié l'analyse théorique.

En parallèle, une autre technique permettant l'élimination du chattering a été utilisée, il s'agit de la fonction de saturation « SAT ». Toute fois, les résultats obtenus sont moins probants que ceux avec l'introduction du régulateur PI^λ .

4). Dans le dernier chapitre, qui porte sur l'application de l'extension de l'approche de gain de Nussbaum au cas fractionnaire dans notre schéma de la commande adaptative floue pour estimer le signe inconnu du gain de commande. Pour démontrer l'efficacité des méthodologies proposées dans cette thèse, des exemples de simulation sont donnés pour valider l'efficacité de ces stratégies de commande.

Nous avons montré tout au long de ce travail, que l'utilisation des systèmes d'ordre

fractionnaire permette d'améliorer le niveau de performance des systèmes de commande concernant la phase transitoire de la réponse, et d'obtenir une meilleure robustesse contre les bruits et les perturbations pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire $0 < q < 1$. Bien que les techniques actuelles de l'intelligence artificielle au cas fractionnaire aient pu être efficaces dans plusieurs situations où les méthodes classiques ont échoué, leurs capacités restent incomparables à celles de l'être humain. Ce dernier réalise ses tâches dans un monde caractérisé par une très grande complexité. Il peut identifier son environnement en utilisant des mesures approximatives, indirectes et, dans certains cas, intuitives.

Ce travail pourrait donner lieu à des études complémentaires dans les directions suivantes :

- Une combinaison avec d'autres techniques telles que la commande par réseaux de neurones ou celle par l'intelligence artificielle afin d'avoir des performances plus améliorées.
- Une extension des approches adaptatives floues développées dans cette thèse au cas des systèmes multi-variables (MIMO).
- Une commande basée sur un observateur des systèmes non linéaires fractionnaires pour la synchronisation chaotique.

Annexe A

Méthodes d'approximation évoluées pour les systèmes d'ordre fractionnaire

A.1 Méthode d'approximation d'Adams-Bashforth-Moulton

Soit q un réel positif vérifiant $m - 1 < q < m$, ${}^C D^q$ désigne l'opérateur de dérivation au sens de *Caputo*.

On se donne le problème aux conditions initiales suivant

$$\begin{cases} {}^C D_0^q y(t) = f(t, y) \\ D_0^q y(0) = y_0^k, k = 0, 1, \dots, m - 1 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

La solution de l'équation (1.23) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de *Volterra*[Diethelm,02a] comme,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - \tau)^{q-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (\text{A.2})$$

Le principe de cette méthode est de remplacer l'équation originale (A.1) par l'équation intégrale de Volterra (A.2) et on utilise la formule (produit de quadrature des trapèzes) pour remplacer l'intégrale par les nœuds $t_j, j = 0, 1, \dots, n + 1$ qui sont prises respectivement à la fonction $(t_{n+1} - \cdot)^{q-1}$ [30] c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} g(\tau) d\tau &\approx \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} \tilde{g}_{n+1}(\tau) d\tau \\ &= \frac{h^q}{q(q+1)} \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} g(t_j) \end{aligned}$$

Avec

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{q+1} - (n-q)(n+1)^q & j = 0 \\ (n-j+2)^{q+1} + (n-j)^{q+1} - 2(n-j+1)^{q+1} & 1 \leq j \leq n \\ 1 & j = n+1 \end{cases}$$

Cela nous donne la formule de correction [30]

$$y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[q]-1} y_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) \\ + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_j)$$

Pour déterminer la formule de prédiction qui donne $y_h^p(t_{n+1})$, on procède de la même manière comme précédemment mais cette fois l'intégrale sera remplacée en utilisant la méthode des rectangles

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} g(t_j)$$

Où

$$b_{j,n+1} = \frac{h^q}{q} ((n-j+1)^q - (n-j)^q)$$

Où la valeur prédictiveur de $y_h^p(t_{n+1})$ est déterminée par la méthode Adams-Bashforth (Diethelm2004)

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{j=0}^{[q]-1} y_0^{(j)} \frac{t_{n+1}^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_j)$$

L'erreur d'estimation de cette approximation est décrite comme suit

$$\max_{j=0,1,\dots,N} |y(t_j) - y_h(t_j)| = O(h^p) \text{ Avec } p = \min(2, 1+q)$$

Un système ayant trois équations différentielles fractionnaire de la forme

$$D^{q_1} x(t) = f_1(x, y, z)$$

$$D^{q_2} y(t) = f_2(x, y, z)$$

$$D^{q_3} z(t) = f_3(x, y, z)$$

Avec $0 < q_i \leq 1$ ($i = 1, 2, 3$), et la condition initial (x_0, y_0, z_0) .

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_0 + \frac{h^{q_1}}{\Gamma(q_1 + 2)} f_1(x_{n+1}^P, y_{n+1}^P, z_{n+1}^P) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_1} \alpha_{1j,n+1}}{\Gamma(q_1 + 2)} f_1(x_j, y_j, z_j), \\
y_{n+1} &= y_0 + \frac{h^{q_2}}{\Gamma(q_2 + 2)} f_2(x_{n+1}^P, y_{n+1}^P, z_{n+1}^P) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_2} \alpha_{2j,n+1}}{\Gamma(q_2 + 2)} f_2(x_j, y_j, z_j), \\
z_{n+1} &= z_0 + \frac{h^{q_3}}{\Gamma(q_3 + 2)} f_3(x_{n+1}^P, y_{n+1}^P, z_{n+1}^P) + \sum_{j=0}^n \frac{h^{q_3} \alpha_{3j,n+1}}{\Gamma(q_3 + 2)} f_3(x_j, y_j, z_j)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Où

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^P &= x_0 + \sum_{j=0}^n \frac{\beta_{1j,n+1}}{\Gamma(q_1)} f_1(x_j, y_j, z_j), \\
y_{n+1}^P &= x_0 + \sum_{j=0}^n \frac{\beta_{2j,n+1}}{\Gamma(q_2)} f_2(x_j, y_j, z_j), \\
z_{n+1}^P &= x_0 + \sum_{j=0}^n \frac{\beta_{3j,n+1}}{\Gamma(q_3)} f_3(x_j, y_j, z_j), \\
\alpha_{i,j,n+1} &= \begin{cases} n^{q_i+1} - (n - q_i)(n + 1)^{q_i}, & j = 0 \\ (n - j + 2)^{q_i+1} + (n - j)^{q_i+1} - 2(n - j + 1)^{q_i+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j = n + 1 \end{cases} \\
\beta_{i,j,n+1} &= \frac{h^{q_i}}{q_i} ((n - j + 1)^{q_i} - (n - j)^{q_i})
\end{aligned}$$

A.2 Méthode de Grünwald-Letnikov

Nous décrivons dans cette partie une méthode simple et efficace pour l'évaluation des dérivées fractionnaires. Pour le calcul numérique des dérivées d'ordre fractionnaire nous pouvons utiliser la relation (A.4) découle de la définition *Grünwald-Letnikov*. Cette approche est basée sur une approximation de la dérivée fractionnaire au sens de *Grünwald-Letnikov*. Nous pouvons ainsi utiliser cette approximation pour l'évaluation numérique des fonctions usuelles et des équations différentielles fractionnaires. La relation à l'approximation numérique explicite de $q - th$ dérivé au point $kh, (k = 1, 2, \dots)$ a la forme suivante[121,57].

$${}_{(k-\frac{L_m}{h})}D_{t_k}^q f(t) \approx h^{-q} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{q}{j} f(t_{k-j}) \quad (\text{A.4})$$

Où L_m est la "longueur de la mémoire", $t_k = kh$, h le pas de temps de calcul et $(-1)^j \binom{q}{j}$ sont les coefficients binomiaux $c_j^{(q)} (j = 0, 1, \dots)$. Le calcul des coefficients se fait par formule de récurrence suivante :

$$c_0^{(q)} = 1, \quad c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)} \quad (\text{A.5})$$

La solution numérique générale de l'équation différentielle fractionnaire

$${}^G D_t^q y(t) = f(y(t), t),$$

Peut être exprimé comme

$$y(t_k) = f(y(t_k), t_k) h^q - \sum_{j=v}^k c_j^{(q)} y(t_{k-j}) \quad (\text{A.6})$$

Pour le terme de mémoire exprimée par la somme, un principe de "mémoire courte" peut être utilisé. Ensuite, l'index inférieur des sommes dans les relations (A.6) sera $v = 1$ pour $k < (L_m/h)$ et $v = k - (L_m/h)$ pour $k > (L_m/h)$, ou sans utiliser le principe de la "mémoire courte", nous mettons $v = 1$ pour tous k [119].

Cette méthode numérique est appelée développement en série entière d'une fonction génératrice. Cette approximation de la dérivée fractionnaire au sens de *Grünwald-Letnikov* est d'une part équivalente à la définition de *Riemann-Liouville* pour une large classe de fonctions [57], d'autre part, elle est bien adaptée à la définition de Caputo car elle ne nécessite que les conditions initiales et a clairement un sens physique.

Bibliographie

- [1] R.P. Agarwal. *A propos d'une note de M. Pierre Humbert*. C.R. Académie des Sciences, 1953.
- [2] N. Aguila-Camacho, M.A. Duarte-Mermoud, and J.A. Gallegos. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19 :2951–2957, 2014.
- [3] W.M. Ahmad and J.C. Sprott. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 16 :339–351, 2003.
- [4] A. SI Ammour. *Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire*. PhD thesis, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2011.
- [5] A. Si Ammour, S. Djennoune, W. Aggoune, and M. Bettayeb. Stabilization of fractional-order linear systems with state and input delay. *Asian Journal of Control*, 18(1) :1–9, 2016.
- [6] B. R. Andrievskii and A. L. Fradkov. Control of chaos : Methods and applications. i. methods. *Automation and Remote Control*, 64(5) :673–713, 2003.
- [7] P. Arena, R. Caponetto, L. Fortuna, and D. Porto. Chaos in a fractional order duffing system. In *Proceedings of ECCTD, Budapest*, pages 1259–1262, 1997.
- [8] N. Bertrand, J. Sabatier, O. Briat, and J.M. Vinassa. Fractional non-linear modelling of ultracapacitors. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation - Elsevier*, 15(5) :1327–1337, 2010.
- [9] A.G. Bondarev, S.A. Bondarev, N.E. Kosteleva, and V.I. Utkin. Sliding modes in systems with asymptotic state observers. *Automation and remote control*, 46(6) :49–64, 1985.

- [10] A. Boukabou. *Méthodes de Contrôle des Systèmes Chaotique D'ordre Elevé et leur Application pour la Synchronisation : Contribution à L'élaboration de Nouvelles Approche*. PhD thesis, Université de Constantine, Algérie, 2006.
- [11] A. Boulkroune. *Commande floue adaptative avec et sans observateur des systèmes non linéaires incertains*. PhD thesis, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie, 2008.
- [12] A. Boulkroune, M. Tadjine M. M'Saad, and M. Farza. Adaptive fuzzy control for a class of mimo nonlinear systems with unknown dead-zones. Proc. IEEE International Conference on Intelligent Systems, Varna, Bulgaria, 2008.
- [13] A. Boulkroune and M. M'saad. On the design of observer-based fuzzy adaptive controller for nonlinear systems with unknown control gain sign. *Fuzzy Sets and Systems*, 201 :71–85, 2012.
- [14] J. Buckley. Universal fuzzy controllers. *Automatica*, 28(6) :1245–1248, 1992.
- [15] J. Buckley. Sugeno type controllers are universal controllers. *Fuzzy sets and Systems*, 53 :299–303, 1993.
- [16] H. Buhler. *Réglage par mode glissant*. Presses Polytechnique, Romandes, lausanne, 1986.
- [17] S. Buller, E. Karden, D. Kok, and R.W. de Doncker. Modeling the dynamic behaviour of supercapcitors using impedance spectroscopy. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 38(6), 2002.
- [18] A. Neçaibia, S. Ladaci, A. Charef, and J. J. Loiseau. Fractional order extremum seeking approach for maximum power point tracking of photo-voltaic panels. *Frontiers in Energy*, 9(1) :43–53, 2015.
- [19] M. Chadli, I. Zelinka, and T. Youssef. Unknown inputs observer design for fuzzy systems with application to chaotic system reconstruction. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(2) :147–154, 2013.
- [20] Y.C. Chang. Robust tracking control for nonlinear mimo systems via fuzzy approaches. *Automatica*, 36(2) :1535–1545, 2000.
- [21] Y.C. Chang. Adaptive Fuzzy-based Tracking Control for Nonlinear SISO Systems via VSS and H^∞ Approaches. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 9 :278–292, 2001.

- [22] A. Charef, A. Djouambi, and H. Sun. Fractional order feedback control systems. Proceedings of the 4th J.I.E.E.E.C, Jordanie, Avril, 2001.
- [23] H. Chekireb, M. Tadjine, and D. Bouchaffra. Direct adaptive fuzzy control of nonlinear system class with applications. *Control and Intelligent Systems*, 31(2) :1–11, 2003.
- [24] B.S Chen, L. Ching-Hsiang, and C. Yeong-Chan. H^∞ tracking design of uncertain nonlinear siso systems : Adaptive fuzzy approach. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 4(1) :32–42, 1996.
- [25] Y.Q. Chen and B.M. Vinagre. A new IIR-type digital fractional order differentiator. *Signal Processing*, 83 :2359–2365, 2003.
- [26] Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, and I. Podlubny. Continued Fraction Expansion Approaches to Discretizing Fractional Order Derivatives - an Expository Review. *Nonlinear Dynamics*, 38 :155–170, 2004.
- [27] W. Chi-Hsu, L. Han-Leih, and C.L. Tsung and. Direct Adaptive Fuzzy-Neural Control With State Observer and Supervisory Controller for Unknown Nonlinear Dynamical Systems. *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, 10(1) :39–49, 2002.
- [28] W. Chi-Hsu, C.L. Tsung, L. Tsu-Tian, and L. Han-Leih. Adaptive Hybrid Intelligent Control for Uncertain Nonlinear Dynamical Systems. *IEEE Transactions On Systems, Man, And Cybernetics*, 32(5) :583–597, 2002.
- [29] W.H. Deng and C. P. Li. Chaos synchronization of the fractional system. *Physica A*, 353 :61–72, 2005.
- [30] K. Diethelm, N. J. Ford, and A. D. Freed. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29 :3–22, 2002.
- [31] H. Dimassi. *Synchronisation des systèmes chaotique par observateurs et application à la transmission d'informations*. PhD thesis, Université de Paris Sud - Paris XI, 2012. La France, 2012.
- [32] A. Djouambi. *Contribution a la commande CRONE*. PhD thesis, Université Mentouri de Constantine, 2008.
- [33] S. Doudou. *Contribution à la commande moderne des systèmes non linéaires multivariables non affines*. PhD thesis, Université Sétif 1, 2013.

- [34] F.B. Duarte and J.A.T. Macado. Chaotic phenomena and fractional-order dynamics in the trajectory control of redundant manipulators. *Nonlinear Dynamics*, 29 :315–342, 2002.
- [35] M.A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, J.A. Gallegos, and R. Castro-Linares. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Systems & Control Letters*, 22(1-3) :650–659, 2015.
- [36] R. Hilfer (Ed). *Applications of fractional calculus in physics*. World Scientific, New Jersey, 2001.
- [37] J.T. Edwards, N.J. Ford, and A.C. Simpson. The numerical solution of linear multi-term fractional differential equations : systems of equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 148 :401–418, 2002.
- [38] S.V. Emelyanov. *Sliding mode control systems*. Nauka, Moscou, 1967.
- [39] S.V. Emel'yanov, S.V. Korovin, and L.V. Levantovsky. Higher order sliding modes in the binary control system. *Soviet Physics*, 31(4) :291–293, 1986.
- [40] A. Erdélyi. *Higher Transcendental Functions*, volume 1-3. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [41] N. Essounbouli, A. Hamzaoui, , and J. Zaytoon. An improved robust adaptive fuzzy controller for mimo systems. *Control and Intelligent Systems*, 34(1) :12–21, 2006.
- [42] Y. Ferdi. Computation of fractional order derivative and integral via power series expansion and signal modelling. *Nonlinear Dynamics*, 46 :1–15, 2006.
- [43] J.A. Gallegos, M.A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, and R. Castro-Linares. On fractional extensions of Barbalat Lemma. *Systems & Control Letters*, 84(5) :7–12, 2015.
- [44] S.S. Ge and J. Wang. Robust adaptive neural control for a class of perturbed strict feedback nonlinear systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(6) :1409–1419, 2002.
- [45] S.S. Ge and J. Wang. Robust adaptive tracking for time-varying uncertain nonlinear systems with unknown control coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(8) :1463–1469, 2003.

- [46] S.S. Ge, C. Yang, and T.H. Lee. Adaptive robust control of a class of nonlinear strict-feedback discrete-time systems with unknown control directions. *Systems & Control Letters*, 57(11) :888–895, 2008.
- [47] T.T. Georgiou and M.C. Smith. Robustness Analysis of Nonlinear Feedback Systems : An Input-Output Approach. *Transactions on Automatic Control*, 42(9) :1200–1221, 1997.
- [48] R. Gorenflo and F. Mainardi. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, pages 223–276. Springer-Verlag, Wien and New York, 1997.
- [49] S. Hajri. *Commande dynamique par mode glissant application à la robustification des processus complexes*. PhD thesis, Université de Lille- France, 1997.
- [50] H. Hamiche, S. Guermah, S. Djennoune, K. Kemih, M. Ghanes, and J-P. Barbot. Chaotic synchronisation and secure communication via sliding-mode and impulsive observers. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 20(4), 2013.
- [51] T.T. Hartley, C. F. Lorenzo, and H. K. Qammer. Chaos in a fractional order chuas system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 42 :485–490, 1995.
- [52] T.T. Hartley and C.F. Lorenzo. Dynamics and Control of Initialized Fractional Order Systems. *Nonlinear Dynamics*, 29 :201–233, 2002.
- [53] H.F. Ho, Y. K. Wong, and A. B. Rad. Adaptive fuzzy sliding mode control with chattering elimination for nonlinear siso systems. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 17 :1199–1210, 2009.
- [54] S.H. Hosseinnia, R. Ghaderi, A. Ranjbar, F. Abdous, and S. Momani. Control of chaos via fractional-order state feedback controller. In D. Baleanu et al., editor, *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*, pages 511–519. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [55] T. Houmor. *Analyse du chaos dans un Système d'équations différentielles fractionnaires*. PhD thesis, Université de Constantine 1, Algérie, 2014.
- [56] C. Hwang, J-F. Leu, and S-Y. Tsay. A note on Time-Domain Simulation of Feedback Fractional-Order Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4) :625–631, 2002.

- [57] N. Ibrahima. *Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires*. PhD thesis, Ecole doctorale IAEM Lorraine, Maroc, 2011.
- [58] A. Isidori. *Nonlinear Control System*. Springer-Verlag Berlin, Benlin, 1995.
- [59] W. Jun, Z. Zhengming, and S. Xiaoying. Comparisons of electric machines used for the electro-mechanical actuation systems in all-electric airplane. volume 2 of *Proc. ICEMS'03 Sixth International Conference on Electrical Machines and Systems*, pages 665–668, 2003.
- [60] W. Jun, Z. Zhengming, and S. Xiaoying. Comparisons of electric machines used for the electro-mechanical actuation systems in all-electric airplane. *European Journal of Control*, 1(2) :113–121, 2003.
- [61] H. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, London, 1996.
- [62] K. Khettab. Commande adaptative floue des systèmes non linéaires par la méthode de backstepping utilisant le mode glissant. *Mémoire de Magister, Université de Frahat Abbas - Sétif*, 2005.
- [63] K. Khettab, Y. Bensafia, and S. Ladaci. Robust adaptive fuzzy control for a class of uncertain nonlinear fractional systems. ICEECA 2014, Proceedings of the Second International Conference on Electrical Engineering and Control Applications, Constantine-Algérie, 2014.
- [64] K. Khettab, Y. Bensafia, and S. Ladaci. Fuzzy adaptive control enhancement for non-affine systems with unknown control gain sign. In *Proceedings of the 15th IEEE Int. Conf. on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering, STA'2015, Monastir, Tunisia*, pages 616–621, 2015.
- [65] K. Khettab, S. Ladaci, and Y. Bensafia. Fuzzy adaptive control of fractional order chaotic systems with unknown control gain sign using a fractional order Nussbaum gain. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, To appear, 2016.
- [66] S. Labiod. *Contribution à la Commande Adaptative Floue des Systèmes Non Linéaires*. PhD thesis, Ecole Nationale Polytechnique (ENP) d'Alger - Algérie, 2005.
- [67] S. Ladaci. *Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire*. PhD thesis, Université Mentouri de Constantine - Algérie, 2007.

- [68] S. Ladaci and Y. Bensafia. Indirect fractional order pole assignment based adaptive control. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 19 :518–530, 2016.
- [69] S. Ladaci and A. Charef. On fractional adaptive control. *Nonlinear Dynamics*, 43(4) :365–378, 2006.
- [70] S. Ladaci, A. Charef, and A. Bennia. Loi de commande adaptative m.i.t. avec intégration d'ordre fractionnaire. Proc. CNIE'02 Conférence Nationale d'Ingénierie Electrique, pages 392–395, USTO, Oran, Algérie, 15–16 Décembre, 2002.
- [71] S. Ladaci, A. Charef, and J. J. Loiseau. Robust fractional adaptive control based on the strictly positive realness condition. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 19(1) :69–76, 2009.
- [72] S. Ladaci and K. Khettab. Fractional order multiple model adaptive control. *International Journal of Automation & Systems Engineering*, 6(2) :110–122, 2012.
- [73] S. Ladaci, J.J. Loiseau, and A. Charef. Fractional order adaptive high-gain controllers for a class of linear systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13 :707–714, 2008.
- [74] S. Ladaci, J.J. Loiseau, and A. Charef. Adaptive internal model control with fractional order parameter. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 24 :944–960, 2010.
- [75] C. Li and G. Chen. Chaos and hyperchaos in the fractional order rossler equations. *Physica A*, 341 :55–61, 2004.
- [76] C. Li and W. H. Deng. Chaos synchronization of fractional order differential systems. *International Journal of Modern Physics B*, 20 :791–803, 2006.
- [77] L. Li and Y. Sun. Adaptive Fuzzy Control for Nonlinear Fractional-Order Uncertain Systems with Unknown Uncertainties and External Disturbance. *Entropy*, 17 :5580–5592, 2015.
- [78] Y. Li, Y.Q. Chen, and Y. Cao. Fractional order universal adaptive stabilization. Proceedings of the 3rd IFAC workshop on fractional differentiation and its applications, Ankara-Turkey, 2008.

- [79] Y. LI, Y.Q. Chen, and I. Podlubny. Stability of fractional order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized mittag-leffler stability. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(5) :1810–1821, 2009.
- [80] T.C. Lin, V.E. Balas, and H.K. Chia. Fractional Order Chaotic System Tracking Design Based on Adaptive Hybrid Intelligent Control. *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2011.
- [81] T.C. Lin, W. Chi-Hsu, and L. Han-Leih. Observer-based indirect adaptive fuzzy-neural tracking control for nonlinear SISO systems using VSS and H^∞ approaches. *Fuzzy Sets and Systems*, 143(5) :211–232, 2004.
- [82] T.C. Lin and K. Chia-Hao. H^∞ synchronization of uncertain fractional order chaotic systems : Adaptive fuzzy approach. *ISA Transactions*, 50 :548–556, 2011.
- [83] T.C. Lin, C.-H. Kuo, and V. E. Balas. Uncertain fractional order chaotic systems tracking design via adaptive hybrid fuzzy sliding mode control. *International Journal Comput. Comm. Control*, 6(3) :418–427, 2011.
- [84] T.C. Lin, L. Tun-Yuan, and V.E. Balas. Adaptive fuzzy sliding mode control for synchronization of uncertain fractional order chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 44 :791–801, 2004.
- [85] Y.J Liu and Z.F. Wang. Adaptive fuzzy controller design of nonlinear systems with unknown gain sign. *Nonlinear Dynamics*, 58 :687–695, 2009.
- [86] C.F. Lorenzo and T.T. Hartley. Variable order and Distributed order Fractional Operators. *Nonlinear Dynamics*, 29 :57–98, 2002.
- [87] J-G. Lu, Y-Q. Chen, and W. Chen. Robust asymptotical stability of fractional-order linear systems with structured perturbations. *Computers and Mathematics with Applications*, 66 :873–882, 2013.
- [88] J.G. Lu. Chaotic dynamics of the fractional order lru system and its synchronization. *Physics Letters A*, 354(4) :305–311, 2006.
- [89] J.G. Lu and G. Chen. A note on the fractional-order chen system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(3) :685–688, 2006.
- [90] J.T. Machado, V. Kiryakova, and F. Mainardi. Recent history of fractional calculus. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 16 :1140–1153, 2011.

- [91] B. Mandelbrot and J. W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev*, 10 :422–437, 1968.
- [92] B. Martesson. Remarks on adaptive stabilization of first order nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 14(1) :1–7, 1990.
- [93] G.M. Mittag-Leffler. Sur la nouvelle fonction E(x). *C. R. Académie des Sciences*, 137 :554–558, 1903.
- [94] G.M. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d’une branche uniforme d’une fonction homogène. *Acta Mathematica*, 29 :101–182, 1905.
- [95] S. Momani and K. Al-Khaled. Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 162 :1351–1365, 2005.
- [96] G. Montseny. *Représentation diffusive*. Hermes Science, Paris, France, 2005.
- [97] A.S. Morse. *Recent problems in parameter adaptive control*, pages 254–264. Outils et Modèles Mathématiques pour l’Automatique, l’Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal. ED. I.D. Landau, CNRS 3, Paris, France, 1983.
- [98] E. Moulay. *Une étude des systèmes non linéaires en théorie du contrôle par les fonctions de Lyapunov*. HDR, Automatique, Université de Poitiers, 2014.
- [99] K.S. Narendra. The maturing of adaptive control. *Lecture Notes in Control and Information Systems*, 160 :3–36, 1991.
- [100] E. Nechadi, M.N. Harmas, N. Essounbouli, and A. Hamzaoui. Adaptive Fuzzy Sliding Mode Power System Stabilizer Using Nussbaum Gain. *International Journal of Automation and Computing*, 10(4) :281–287, 2013.
- [101] R.D. Nussbaum. Some remarks on the conjecture in parameter adaptive control. *Systems & Control Letters*, 3(5) :243–246, 1983.
- [102] Z.M. Odibat. Adaptive feedback control and synchronization of non-identical chaotic fractional order systems. *Nonlinear Dynamics*, 60 :479–487, 2010.
- [103] K.B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York, 1974.
- [104] R. Ordonez and K.M. Passino. Stable multi-input multi-output adaptive fuzzy/neural control. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 7(3) :345–353, 1999.

- [105] E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke. Controlling chaos. *Physical Review Letter*, 64 :1196–1199, 1990.
- [106] A. El Ougli. *Intégration des techniques floues à la synthèse de contrôleurs adaptatifs*. PhD thesis, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah de Fès - Maroc, 2009.
- [107] A. Oustaloup. *La commande CRONE*. Hermès. Paris, 1991.
- [108] A. Oustaloup. *La dérivation non entière*. Hermès. Paris, 1995.
- [109] A. Oustaloup and B. Mathieu. *La commande CRONE : du scalaire au multivariable*. Hermès. Paris, 1999.
- [110] A. Oustaloup, B. Mathieu, and P. Lanusse. The CRONE control of resonant plants : Application to flexible transmission. *European Journal of Control*, 1(2) :113–121, 1995.
- [111] A. Oustaloup, X. Moreau, and M. Nouillant. The CRONE suspension. *Control Engineering Practice*, 4(8) :1101–1108, 1996.
- [112] A. Oustaloup, J. Sabatier, and P. Lanusse. From fractal robustness to CRONE control. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 2(1) :1–30, 1999.
- [113] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press. San Diego, 1999.
- [114] I. Podlubny. Fractional order systems and $\pi^{\lambda}d^{\mu}$ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1) :208–214, 1999.
- [115] I. Podlubny, I. Petrás, B.M. Vinagre, P. O’leary, and L. Dorcak. Analogue Realisations of fractional-Order Controllers. *Nonlinear Dynamics*, 29 :281–296, 2002.
- [116] N. Retière and M. Ivanès. Modeling of electric machines by implicit derivative half-order systems. *IEEE Power Engineering Review*, pages 62–64, 1998.
- [117] D. Riu, N. Retière, and D. Linzen. Half-order modelling of supercapacitors. *IEEE industry applications conference*, pages 2550–2554, 2004.
- [118] I. Petrás. A note on the fractional-order Chua’s system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38(1) :140–147, 2008.
- [119] I. Petrás. *Fractional Derivatives, Fractional Integrals, and Fractional Differential Equations in Matlab*. InTech, Assi, Janeza Trdine 9, 51000 Rijeka, Croatia, 2011.
- [120] I. Petrás. *Fractional-Order Nonlinear Systems : Modeling, Analysis and Simulation*. Series :Nonlinear Physical Science - Springer, HEP, 2011.

- [121] S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive Control : Stability, Convergence and Robustness*. Prentice-Hall, New York, 1989.
- [122] L.J. Sheu, H. K. Chen, J. H. Chen, L. M. Tam, W. C. Chen, K. T. Lin, and Y. Kang. Chaos in the newton-leipnik system with fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals*, 36 :98–103, 2008.
- [123] J.J.E. Slotine. Sliding Controller Design for Nonlinear Systems. *Inter Jour of Control*, 40(2) :421–434, 1984.
- [124] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, New-Jersey, 1991.
- [125] H. Sun and A. Charef. Fractal System-A time domain Approach. *Annals of Bio-medical Engineering*, 18 :597–621, 1990.
- [126] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(1) :116–132, 1985.
- [127] S.C. Tong and H.X. Li. Direct adaptive fuzzy output tracking control of nonlinear systems, fuzzy sets and systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 128 :107–115, 2002.
- [128] V.K. Varentsov, Koshev A. N., and Chirkina M. A. The electrochemical processes in porous ambience - nonstationary models. volume 2 of *Proc. IFOST'08 Third International Forum on Strategic Technologies*,, pages 148–152, Novosibirsk-Tomsk, 2007.
- [129] B.M. Vinagre. *Modelado y control de sistemas dinámicos caraterizados por ecuaciones íntegro-diferenciales de orden fraccional*. PhD thesis, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, 2001.
- [130] L.X. Wang. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1(146–155), 1993.
- [131] L.X. Wang. *Adaptive Fuzzy Systems and Control : Design and Stability Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [132] L.X. Wang. Stable Adaptive Fuzzy Controllers with Application to Inverted Pendulum Tracking. *IEEE Transactions On Systems, Man, And Cybernetics*, 26(5) :677–691, 1996.

- [133] L.X. Wang and J.M. Mendel. Fuzzy basis function, universal approximation, and orthogonal least square learning. *IEEE transactions on neural networks*, 3(5) :807–814, 1992.
- [134] J.C. Willems and C.I. Byrnes. Global adaptive stabilization in the absence of information of the sign of the high frequency gain. *Lecture Notes in Control and Information Science*, 62 :49–57, 1984.
- [135] X.J. Wu, H. T. Lu, and S. L. Shen. Synchronization of a new fractional-order hyperchaotic system. *Physics Letters A*, 373 :2329–2337, 2009.
- [136] B. Yang, Y. Makarov, J. Desteese, V. Viswanathan, P. Nyeng, B. McManus, and J. Pease. On the use of energy storage technologies for regulation services in electric power systems with significant penetration of wind energy. volume 2 of *Proc. EEM'08 5th International Conference on European Electricity Market*, pages 1–6, Lisboa, 2008.
- [137] X.D. Ye and J.P. Jiang. Adaptive nonlinear design without a priori knowledge of control directions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(11) :1617–1621, 1998.
- [138] A. Zemouche. *Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 2007.
- [139] T.P. Zhang and Y. YI. Adaptive fuzzy control for a class of MIMO nonlinear systems with unknown dead-zones. *Acta Automatica Sinica*, 33(1) :96–99, 2007.
- [140] Y. Zhang, C.Y. Wen, and Y.C. Soh. Adaptive backstepping control design for systems with unknown high-frequency gain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(12) :2350–2354, 2000.

Travaux scientifiques réalisés lors de cette thèse

1. Revues internationales

- **Khatir Khettab**, Samir Ladaci and Yassine Bensafia, "*Fuzzy adaptive control of fractional order chaotic systems with unknown control gain sign using a fractional order Nussbaum gain*". IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica (2016).
- **Khatir Khettab**, Samir Ladaci and Yassine Bensafia, "*Chattering Elimination in Sliding Mode Control of Fractional Chaotic Systems Using a Fractional Adaptive PI^λ Controller*". **Soumis à** PRAMANA - journal of physics, Springer.
- Yassine Bensafia, Samir Ladaci and **Khatir Khettab**, "*Using a Fractionalized Integrator for Control Performance Enhancement*". International Journal of Innovative Computing, Information and Control, (2015).
- Samir Ladaci and **Khatir Khettab**, "*Fractional Order Multiple Model Adaptive Control*". Journal of Automation and Systems Engineering 6-2 (2012) : 110- 122, JASE'2012 on-line : jase.esrgroups.org.

2. Chapitres au livre

- **Khatir Khettab**, Samir Ladaci and Yassine Bensafia, "*Robust Adaptive Fuzzy control for a Class of Uncertain nonlinear Fractional Systems*". Book Chapter in Springer (To appear-2016).
- **Khatir Khettab**, Samir Ladaci and Yassine Bensafia, "*Robust Adaptive Interval Type-2 Fuzzy Control and Synchronization for a Class of Uncertain nonlinear Fractional Chaotic Systems*". Book Chapters : Studies in Computational Intelligence by

Springer-Verlag, Germany (To appear-2016).

3. Communications internationales

- **K. Khettab**, Y. Bensafia, S. Ladaci : "Fuzzy adaptive control enhancement for non-affine systems with unknown control gain sign". STA'2015 (IEEE-Explore). The 16th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering, Edited by :Laboratory of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering Lab-STA. December 21-23, 2015, (Monastir-Tunisia).
- Yassine Bensafia, **Khatir Khettab**, Samir Ladaci : "DC-Motor Velocity Control Using a Robust Fractionalized Adaptive PI Controller". In : STA'2015 (IEEE-Explore). The 16th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering, Edited by :Laboratory of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering Lab-STA. December 21-23, 2015, (Monastir-Tunisia)
- **K. Khettab**, Y. Bensafia, S. Ladaci : "Robust Adaptive Fuzzy control for a Class of Uncertain nonlinear Fractional Systems". the Second International Conference on Electrical Engineering and Control Applications ICEECA'2014, November 18-20, 2014 (Constantine-Algeria).
- **K. Khettab**, S. Ladaci, Y. Bensafia, A. Boukhalifa, "Control Improvement of the Direct Current Motor : Adaptive Approach with Integer/Fractional Reference Model Comparison". In Proc. 2014 International Conference on Fractional Differentiation and its Applications, ICFDA'2014, June 23-25, 2014. (Catania-Italy).
- **K. Khettab**, S. Ladaci, M. Chadli, Y. Bensafia, A. Boukhalifa, F. Abdelliche : "Enhanced Fractional Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control for Fractional Order Chaotic Systems". In Proc. 2014 International Conference on Fractional Differentiation and its Applications, ICFDA'2014, June 23-25, 2014. (Catania-Italy).
- **Khatir Khettab**, Samir Ladaci, Yassine Bensafia, A Boukhalifa "Robustification de la commande adaptative floue des systèmes non affine avec un signe de gain inconnu". In : 3rd International Conference on Systems and Processing Information, ICSIP'2013, May 12-14, 2013. (Guelma, Algeria)
- **Khettab Khatir**, Bensafia Yacine, Ladaci Samir, "Robustness Test for Fractional

Order Adaptive Control". STA'2012, The 13th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic control and computer engineering, December 17-19, 2012, (Hammamet-Tunisie).

- **Khettab Khatir**, A.Boukhalifa, F.Khaber, S.Doudou "Commande adaptative floue indirecte Robuste Adaptive via mode glissant des systèmes non linéaires perturbé" ; ICSIP'2011 Second International Conference on Systems and Information Processing, May 15-17 2011, (Guelma-Algeria).
- **Khettab Khatir**, Ladaci S, Bensafia Y, A Boukhalifa, " Robustification de la commande adaptative floue des systèmes non affine avec un signe de gain inconnu". 3rd International Conference on Systems and Processing Information, ICSIP'2013, Guelma, Algeria, May 12-14-2013.
- **Khettab Khatir**, A.Boukhalifa, Y.Bensafia, S.Ladaci, " Direct adaptive Fuzzy control with supervisory for a class of uncertain nonlinear systems" ; ICIPEE'2012 Second International Conference on Information Processing and Electrical Engineering, April 14-16 2012, (Tebessa-Algeria).

4. Communications nationales

- **Khettab Khatir**, Bensafia Yacine, Ladaci Samir, "Commande adaptative à modèle de référence avec intégration d'ordre fractionnaire" ; SOFA'2012, 3ème Séminaire National sur les Systèmes d'Ordre Fractionnaire et leurs Applications, 25-27 novembre 2012, (Guelam-Algérie).
- **Khettab Khatir**, Bensafia Yacine, Ladaci Samir, "Commande adaptative fractionnaire de type auto-ajustable" ; SOFA'2012, 3ème Séminaire National sur les Systèmes d'Ordre Fractionnaire et leurs Applications, 25-27 novembre 2012, (Guelam-Algérie).
- Bensafia Yacine, **Khettab Khatir**, Ladaci Samir, "Robustness test of the fractional adaptive control" ; SOFA'2012, 3ème Séminaire National sur les Systèmes d'Ordre Fractionnaire et leurs Applications, 25-27 novembre 2012, (Guelam-Algérie).